

JORGE SAENZ

# CALCULO DIFERENCIAL

CON  
FUNCIONES TRASCENDENTES TEMPRANAS

PARA  
CIENCIAS E INGENIERIA

SEGUNDA EDICION

HIPOTENUSA

**CALCULO**  
**DIFERENCIAL**  
CON  
FUNCIONES TRASCENDENTES TEMPRANAS  
PARA  
CIENCIAS E INGENIERIA  
SEGUNDA EDICION

**Jorge Sáenz**  
Universidad Centroccidental  
Lisandro Alvarado

HIPOTENUSA	UNIVERSIDAD YACAMBU	
	SECRETARIA GENERAL	
	CENTRO DE INVESTIGACION Y DOCUMENTACION	
	"DE TERCER AÑO"	
	PROCESOS TÉCNICOS	
	Fecha de ingreso:	24/01/2011
	registro:	10177
Barquisimeto	515.3	5-127 2ª ed.
2 005	No. ejemplares:	19
	Año	2005

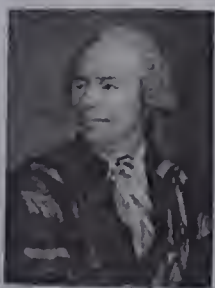
# CONTENIDO

## 1 FUNCIONES REALES 1



<i>René Descartes</i>	2
Introducción	3
1.1 Funciones Reales y sus Gráficas	4
1.2 Nuevas funciones de funciones conocidas	20
1.3 Funciones Inversas	31
1.4 Funciones Trigonómicas Inversas	35
1.5 Funciones exponenciales	40
1.6 Funciones logarítmicas	47
1.7 Aplicaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas	53
<i>Breve historia de las ecuaciones de tercer y cuarto grado</i>	62

## 2 LIMITES Y CONTINUIDAD 63

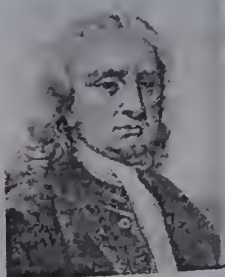


<i>Leonardo Euler</i>	64
2.1 Introducción Intuitiva a los Límites	65
2.2 Tratamiento Riguroso de los Límites	81
2.3 Límites Trigonómicos	101
2.4 Continuidad	108
2.5 Límites Infinitos y Asíntotas Verticales	122
2.6 Límites en el Infinito y Asíntotas Horizontales	134
2.7 Los Límites y el Número e	150
2.8 Asíntotas Oblicuas	153
<i>Breve historia de <math>\pi</math></i>	160



### 3 DIFERENCIACION

181



<i>Isaac Newton</i>	182
3.1 La Derivada	183
3.2 Técnicas Básicas de Derivación	196
3.3 Derivadas de las Funciones Trigonométricas	210
3.4 Derivadas de las Funciones Exponenciales y Logarítmicas	213
3.5 La Regla de la Cadena	216

### 4 OTRAS TECNICAS DE DERIVACION

205



<i>Gottfried Wilhelm Leibniz</i>	206
4.1 Derivación Implícita y Teorema de la Función Inversa	207
4.2 Derivación Logarítmica	221
4.3 Derivadas de las Funciones de las Funciones Trigonométricas Inversas	225
4.4 Derivadas de Orden Superior, Velocidad y Aceleración	228
4.5 Funciones Hiperbólicas y sus Inversas	240
4.6 Razón de cambio	251
4.7 Aproximaciones Lineales y Diferenciales	267
<i>Breve Historia Familia Bernoulli</i>	278



## 5 APLICACIONES DE LA DERIVADA 279



<i>Guillaume F. A. M. de L'Hôpital</i>	280
5.1 Máximos y Mínimos Absolutos	281
5.2 Teorema del Valor Medio	287
5.3 Monótonas, Concavidad y Criterios para extremos locales	301
5.4 Formas Indeterminadas. Regla de L'Hôpital	317
5.5 Trazado cuidadoso del grafico de una función	334
5.6 Problemas de Optimización	346
5.7 Método de Newton-Raphson	375

## APENDICES

A1

A Números reales, Intervalos, Desigualdades y Método de Sturm	A2
B Valor Absoluto	A14
C Ecuaciones Polinómicas	A21
D Plano Cartesiano, Graficas, Simetrías y Traslaciones	A31
E La Recta y la ecuación de Primer Grado	A39
F Circunferencia, Parábola, elipse e Hipérbola	A50
G Trigonometría	A59

## RESPUESTAS

A73

## **INDICE ALFABETICO** **A102**

---

## **TABLAS** **A105**

---

<b>Algebra</b>	<b>A105</b>
<b>Geometría</b>	<b>A106</b>
<b>Trigonometría (Identidades)</b>	<b>A107</b>
<b>Funciones trigonométricas de ángulos</b>	
<b>Notables</b>	<b>A109</b>
<b>Exponentes y logaritmos</b>	<b>A110</b>
<b>Identidades Hiperbólicas</b>	<b>A110</b>
<b>Alfabeto Griego</b>	<b>A110</b>
<b>Fórmulas de Derivación</b>	<b>A111</b>

## PROLOGO

Esta segunda edición aparece diez años después que se publicó la primera. Es muy gratificante la acogida que ha tenido la primera edición.

En esta segunda edición, al igual que en la anterior, se ha buscado equilibrar la teoría y la práctica. La teoría es acompañada de numerosos ejemplos. Cada sección presenta una sección de problemas resueltos, donde muchos problemas típicos de relevancia son desarrollados con todo detalle. La gran mayoría de teoremas son presentados con sus respectivas demostraciones. Cuando la demostración es compleja, ésta es presentada como un problema resuelto.

La gran novedad de esta segunda edición es la incorporación en el texto de las funciones exponenciales, logarítmicas e hiperbólicas (funciones trascendentes). Este hecho nos traerá dos ventajas muy significativas. En primer lugar, nos permitirá tratar tempranamente temas importantes como la regla de L'Hôpital y la derivación logarítmicas. Estos temas correspondían a cursos posteriores. En segundo lugar, los ejemplos y aplicaciones serán más interesantes y más variados.

Para la graficación de funciones y para cálculos auxiliares hemos hecho uso extensivo de los paquetes computacionales **Derive** y **Graphmatica**. Se recomienda el estudiante el uso de estos o cualquier otros sistemas algebraicos de computación.

He recibido valiosa ayuda y sugerencias de parte de muchos colegas. Entre estos tenemos a Maribel Perdomo, José Luis Linares, María Torralba, Wolfgang Hernández, Alexander Pérez. En forma muy especial hago testimonio de mi gratitud al Ing. Alexis Salcedo y a la estudiante de matemáticas, Br. Lucybeth Gutiérrez, quienes tuvieron la tarea de revisar todo el texto.

Jorge Sáenz Camacho

Barquisimeto, setiembre 2.005



# 1

---

## FUNCIONES REALES

---

*RENE DESCARTES*  
(1.596 -1.650)

### INTRODUCCION

- 1.1 FUNCIONES REALES Y SUS GRAFICAS
- 1.2 FUNCIONES NUEVAS DE FUNCIONES  
CONOCIDAS
- 1.3 FUNCIONES INVERSAS
- 1.4 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS  
INVERSAS
- 1.5 FUNCIONES EXPONENCIALES
- 1.6 FUNCIONES LOGARITMICAS
- 1.7 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES  
EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

*BREVE HISTORIA DE LAS ECUACIONES DE TERCER Y  
CUARTO GRADO*

## René Descartes (1.596 - 1.650)



*René Descartes, filósofo, matemático y físico francés, nació en La Haya. Es considerado como el padre de la filosofía moderna. De él es la famosa frase: "Cogito, ergo sum" (Pienso, luego existo).*

*Fue un niño de singular inteligencia, pero físicamente débil. Durante los años de su educación en el colegio jesuita de la Flèche, los religiosos, para mitigar el frío de las duras mañanas de invierno, le permitían permanecer en la cama. Se dice que fueron precisamente durante esas ociosas horas de cama cuando Descartes concibió las ideas fundamentales de la Geometría Analítica.*

*En 1.637 escribe el libro **Géometrie** en el que da nacimiento oficial a la **Geometría Analítica**. Su compatriota Pierre de Fermat (1.601-1.665), independientemente, también descubrió los principios fundamentales de esta ciencia.*

*En 1.628 se mudó a Holanda donde vivió 21 años. Durante esta permanencia escribió sus principales obras: **Principios de Filosofía**, **El Discurso del Método**, **Las Meditaciones**, etc.*

*En 1.649, la joven y energética reina Cristina de Suecia lo invitó a Estocolmo, como su tutor de filosofía. Sus clases eran en las tempranas horas de la mañana. El eminente filósofo y distinguido matemático no soportó el duro invierno sueco, muriendo a consecuencia de una neumonía el año siguiente de su llegada a Estocolmo.*

### ACONTECIMIENTOS IMPORTANTES

*Durante la vida de René Descartes, en América y en el mundo hispano sucedieron los siguientes hechos notables: En 1.609 el cronista peruano Inca Gracilazo de la Vega, hijo de un conquistador y de una princesa india, publica "**Los Comentarios Reales**", famosa obra que cuenta la historia del Imperio Incaico. El 17 de septiembre de 1.630, en la desembocadura del río Charles, unos colonos ingleses fundan la ciudad de Boston. En 1.636 en Cambridge, ciudad contigua a Boston, se funda la Universidad de Harvard. Para ese entonces, la América Española ya (1.551) y la Universidad de Santo Domingo*

## INTRODUCCION

Antes de iniciarnos en el desarrollo de Cálculo necesitamos ponernos de acuerdo en algunas notaciones y en revisar algunos conceptos muy generales que son propios de toda teoría matemática.

Recordemos que un **axioma** es una proposición que, por convención, admitimos que es verdadero, sin el requisito de una demostración. En cambio, un **teorema**, es una proposición, cuya veracidad requiere de una **demostración o prueba**.

La gran mayoría de los teoremas que encontraremos más adelante tiene la forma de una proposición **condicional**:

Si  $H$ , entonces  $T$ ,

que se simboliza así:  $H \Rightarrow T$ . Aquí,  $H$  es la hipótesis y  $T$  es la tesis

Una **demostración o prueba** de un teorema es una secuencia de proposiciones que termina con la tesis, donde cada paso de la secuencia es una hipótesis, un axioma o un teorema previamente demostrado.

A la proposición **bicondicional**:

$P$  si y sólo si  $Q$ ,

lo simbolizamos así:  $P \Leftrightarrow Q$ .

Una proposición **bicondicional**  $P \Leftrightarrow Q$ , como su nombre lo sugiere, es la conjunción de dos proposiciones condicionales:  $P \Rightarrow Q$  y  $Q \Rightarrow P$ .

Toda definición, aunque a veces no se lo exprese explícitamente, es una proposición bicondicional.

Algunos teoremas tienen la forma bicondicional,  $P \Leftrightarrow Q$ . En este caso, en realidad estamos al frente de dos teoremas:  $P \Rightarrow Q$  y  $Q \Rightarrow P$ . Esto significa que para probar  $P \Leftrightarrow Q$ , debemos aportar dos demostraciones, la de  $P \Rightarrow Q$  y la de  $Q \Rightarrow P$ .

En nuestra exposición nos encontraremos con muchos teoremas, unos más importantes que otros. A los teoremas de los cuales pensamos que no son tan relevantes, los llamamos simplemente **proposiciones**.

Con frecuencia, con el ánimo de simplificar la escritura, usaremos los siguientes símbolos:

1.  $\forall$ , que significa: para todo.
2.  $\exists$ , que significa: existe.
3.  $\exists!$ , que significa: existe y es único
4.  $\wedge$ , que significa: y (conjunción lógica)
5.  $\vee$ , que significa: o (disyunción lógica)



## SECCION 1.1

# FUNCIONES REALES Y SUS GRAFICAS

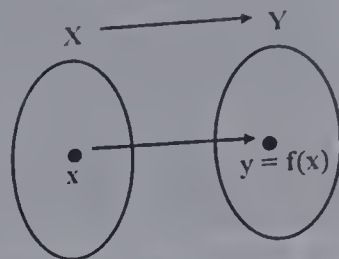
### DEFINICION

Una función es una tríada de objetos  $(X, Y, f)$ , donde  $X$  e  $Y$  son dos conjuntos y  $f$  es una regla que hace corresponder a cada elemento de  $X$  un único elemento de  $Y$ . Al conjunto  $X$  se le llama **dominio** de la función y al conjunto  $Y$ , **conjunto de llegada** de la función.

A una función  $(X, Y, f)$  se le denota más comúnmente por

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{ó} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

y se lee: "la función  $f$  de  $X$  en  $Y$ ".



Para indicar que a un elemento  $x$  de  $X$ ,  $f$  le hace corresponder el elemento  $y$  de  $Y$ , se escribe así:  $y = f(x)$ , lo cual se lee "y es igual a f de x". También diremos que  $y$  es el valor que toma  $f$  en  $x$  ó que  $y$  es la **imagen** de  $x$  mediante  $f$ . El elemento  $x$ , en este caso, es una **preimagen** del elemento  $y$ .

A la variable que usamos para denotar los elementos del dominio se le llama **variable independiente** y a la variable que denota las imágenes, **variable dependiente**. En nuestra notación anterior,  $y = f(x)$ , la **variable independiente** es  $x$  y la **dependiente** es  $y$ . Las letras  $x$  e  $y$ , por ser variables, pueden ser cambiadas por cualquier otro par de letras. Así, podemos escribir  $z = f(t)$ , en cuyo caso, la variable independiente es  $t$  y la dependiente es  $z$ .

Dadas las funciones  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: X \rightarrow Y$ . Diremos que:

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \quad \forall x \in X$$

El **rango** de la función  $f: X \rightarrow Y$  es el conjunto formado por todas las imágenes. Esto es,

$$\text{Rango de } f = \{ f(x) \in Y / x \in X \}$$

Al dominio y al rango de una función  $f: X \rightarrow Y$  los abreviaremos con  $\text{Dom}(f)$  y  $\text{Rang}(f)$ , respectivamente.

### OBSERVACION

En la definición de función hemos utilizado dos términos que merecen atención. Uno de ellos es "cada", el cual indica que todo elemento del dominio debe tener una imagen. El otro término es "único", el cual indica que todo elemento del dominio tiene exactamente una imagen.

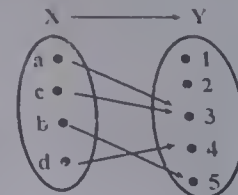
**EJEMPLO 1.** Sea la función  $f: X \rightarrow Y$ , donde  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y cuya regla  $f$  está dada por el gráfico adjunto. Se tiene:

**Dominio** =  $\text{Dom}(f) = X = \{a, b, c, d\}$

**Conjunto de llegada** =  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

**Rango** =  $\text{Rang}(f) = \{3, 4, 5\}$

La regla  $f$  establece que:  $f(a) = 3$ ,  $f(b) = 5$ ,  $f(c) = 3$ ,  $f(d) = 4$



**EJEMPLO 2.** Sea  $X$  un conjunto cualquiera. A la siguiente función se le llama **función identidad del conjunto  $X$** .

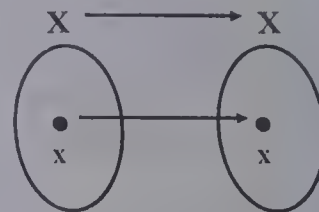
$$I_X: X \rightarrow X$$

$$I_X(x) = x$$

En este caso, el dominio, el conjunto de llegada y el rango, todos coinciden y son iguales a  $X$ . Esto es,

$$\text{Dom}(f) = \text{Conjunto de llegada} = \text{Rang}(f) = X$$

La regla  $I_X$  hace corresponder a cada elemento  $x$  el mismo elemento  $x$ .



## FUNCIONES REALES

Las funciones que nos interesan en el curso de Cálculo son las funciones reales de variable real. Una **función real de variable real** es una función cuyo dominio y cuyo conjunto de llegada son subconjuntos de  $\mathbb{R}$ . Así, son funciones de este tipo:

a.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

b.  $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

c.  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$$h(x) = 5$$

### CONVENCION.

Con el objeto de simplificar la notación, para presentar una función real de variable real  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  daremos simplemente la regla  $f$ , prescindiendo del dominio  $X$  y del conjunto de llegada  $\mathbb{R}$ . Para esto, adoptamos la convención de que el dominio es el mayor subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}$  en el cual la regla  $f$  tiene sentido. Así, por ejemplo, diremos la función:  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  en lugar de la función:

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{x-1}$$

Aquí el dominio es  $X = \mathbb{R} - \{1\}$ . Hemos eliminado a 1 ya que no existe división entre 0. Además, 1 es el único elemento que presenta esta situación.

**EJEMPLO 3.** Hallar el dominio y el rango de las funciones:

1.  $f(x) = x - 3$       2.  $g(x) = \sqrt{x-3}$

**Solución**

1. Como  $f(x) = x - 3$  está definido para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos que  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ .

Por otro lado,  $\text{Rang}(f) = \mathbb{R}$ . En efecto, dado  $y \in \mathbb{R}$ , tomamos  $x = y + 3$ . Se cumple que  $x \in \mathbb{R} = \text{Dom}(f)$  y

$$f(x) = x - 3 = (y + 3) - 3 = y.$$

2. Como la expresión subradical de  $g(x) = \sqrt{x-3}$  debe ser no negativa, tenemos:

$$x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, +\infty),$$

Esto es,  $\text{Dom}(g) = [3, +\infty)$ .

Por otro lado,  $\text{Rang}(g) = [0, +\infty)$ . En efecto, dado  $y \in [0, +\infty)$  tomamos  $x = y^2 + 3$ .

Se cumple que  $x \geq 3$ , o sea  $x \in [3, +\infty)$  y

$$g(x) = \sqrt{x-3} = \sqrt{(y^2 + 3) - 3} = \sqrt{y^2} = |y| = y$$

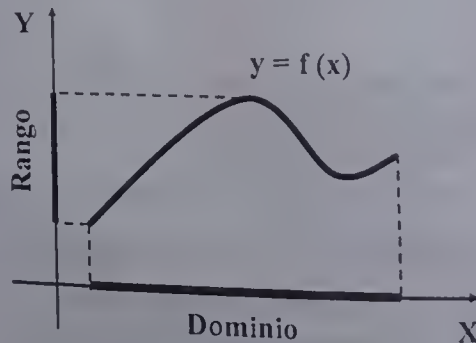
## GRAFICAS DE FUNCIONES Y CRITERIO DE LA RECTA VERTICAL

Se llama **gráfico** o **gráfica** de la función

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

al conjunto:

$$G = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 / x \in X \}$$



No toda curva en el plano es el gráfico de una función. Para reconocer las curvas que corresponden a gráficos de funciones se tiene el siguiente criterio geométrico:

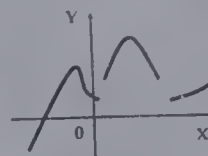
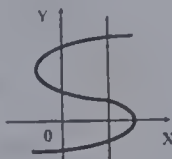
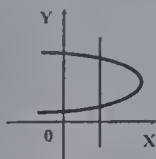


### CRITERIO DE LA RECTA VERTICAL

Una curva en el plano es el gráfico de una función si y sólo si toda recta vertical corta a la curva a lo más una vez.

La veracidad de este criterio estriba en el hecho de que si una recta vertical  $x = a$  corta a la curva dos veces, en  $(a, b)$  y en  $(a, c)$ , entonces  $a$  tiene dos imágenes,  $b$  y  $c$ ; pero esto viola la definición de función.

De acuerdo a este criterio, de las siguientes curvas, sólo la última representa a una función:



**EJEMPLO 4.** Graficar y hallar el dominio y rango de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

**Solución**

Es claro que  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ .

Por otro lado, factorizando el numerador tenemos que:

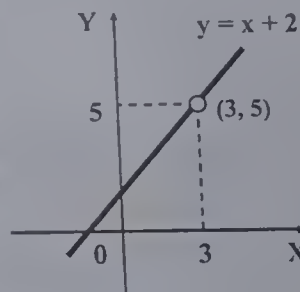
$$f(x) = \frac{(x + 2)(x - 3)}{x - 3}$$

Si  $x \neq 3$ , simplificamos el factor  $x - 3$  y obtenemos:

$$f(x) = x + 2, \text{ para } x \neq 3.$$

Luego, la función  $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$  es igual a la función lineal  $y = x + 2$ , excepto en el punto  $x = 3$ , en el cual  $f$  no está definida. En consecuencia, el rango de  $f$  es igual al rango de  $y = x + 2$  menos el número  $y = 3 + 2 = 5$ . Esto es,

$$\text{Rang}(f) = \mathbb{R} - \{5\}$$



### FUNCIONES DEFINIDAS POR TROZOS

Algunas funciones son definidas por partes, como en los dos siguientes ejemplos.

**EJEMPLO 5.** Graficar y hallar el dominio y rango la función parte entera:

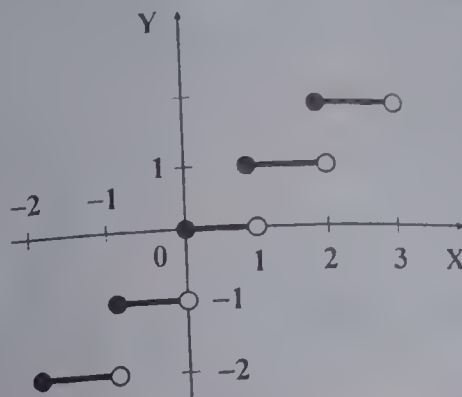
$$f(x) = [x] = n, \text{ si } n \leq x < n + 1, \text{ donde } n \text{ es un entero.}$$

A esta función también se la llama función máximo entero o, simplemente, función escalera.

**Solución**

En términos más explícitos, a esta función la definimos así:

$$[x] = \begin{cases} -2, & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2, & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



Dominio:  $\mathbb{R}$

Rango:  $\mathbb{Z}$ .

**EJEMPLO 6.** Graficar y hallar el dominio y rango de la función valor absoluto

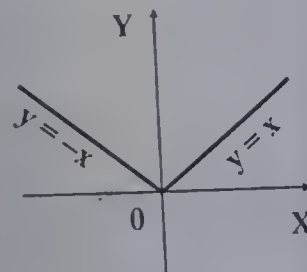
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Solución**

EL gráfico de la función valor absoluto está conformado por dos semirrectas:

La semirrecta  $y = x$  para  $x \geq 0$ , a la derecha del eje Y; y la semirrecta  $y = -x$  para  $x < 0$ , a la izquierda del eje Y.

Dominio:  $\mathbb{R}$       Rango:  $[0, \infty)$



## FUNCIONES PARES E IMPARES Y SIMETRÍA

1. Una función  $f$  es **par** si, para todo  $x$  en el dominio de  $f$ , se cumple que:

$$f(-x) = f(x)$$

2. Una función  $f$  es **impar** si, para todo  $x$  en el dominio de  $f$ , se cumple que:

$$f(-x) = -f(x)$$

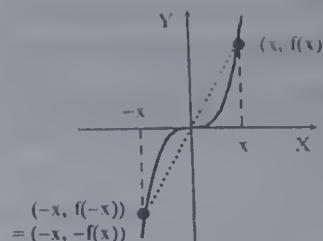
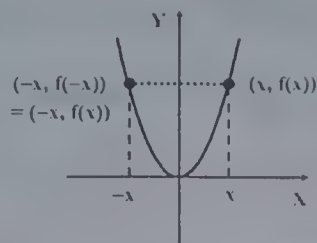
**EJEMPLO 7.** a. Probar que la  $f(x) = x^2$  es par. Graficar la función.

b. Probar que la  $f(x) = x^3$  es impar. Graficar la función.

**Solución**

a.  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

b.  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$



Se prueba fácilmente que:

- a. Una función  $f$  es par  $\Leftrightarrow$  el gráfico de  $f$  es simétrico respecto al eje  $Y$ .
- b. Una función  $f$  es impar  $\Leftrightarrow$  el gráfico de  $f$  es simétrico respecto al origen.

El término de función **par** o **impar** está inspirado en el siguiente resultado:

La función  $f(x) = x^n$  es par si  $n$  es par, y es impar si  $n$  es impar.

## FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

**DEFINICION.** Sea  $f$  una función definida en un intervalo  $I$ . Diremos que:

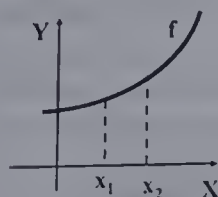
1.  $f$  es **creciente** en  $I$  si, para cualquier par de puntos,  $x_1$  y  $x_2$  en  $I$ , se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

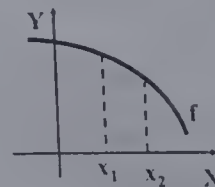
2.  $f$  es **decreciente** en  $I$  si, para cualquier par de puntos,  $x_1$  y  $x_2$  en  $I$ , se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3.  $f$  es **monótona** en  $I$  si  $f$  es o bien creciente o decreciente en  $I$ .



Creciente



Decreciente

La función  $f(x) = x^2$ , dada en el ejemplo anterior, es decreciente en el intervalo  $(-\infty, 0]$  y es creciente en el intervalo  $[0, +\infty)$ . En cambio, la otra función  $f(x) = x^3$ , es creciente en todo su dominio, que es  $\mathbb{R}$ .

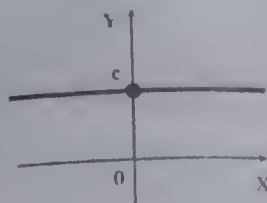
## BREVE CATALOGO DE FUNCIONES

### LAS FUNCIONES CONSTANTES

Sea  $c$  un número real fijo. La función



$f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$   
 es una función constante. Su dominio es todo  $\mathbb{R}$   
 y su rango es el conjunto unitario  $\{c\}$ .  
 Su gráfico es la recta horizontal con ordenada  
 en el origen  $c$ .

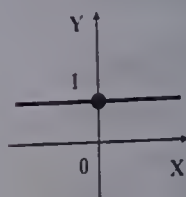


## FUNCION POTENCIA

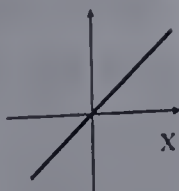
La función potencia es la función  $f(x) = x^\alpha$ , donde  $\alpha$  es una constante.

**EJEMPLO 8.** Si  $\alpha = 0$ , tenemos la función constante 1. Si  $\alpha = 1$ , tenemos la función identidad de  $\mathbb{R}$ . Si  $\alpha = 2$  ó  $\alpha = 3$  tenemos las funciones cuyas gráficas son una parábola o la parábola cúbica, respectivamente.

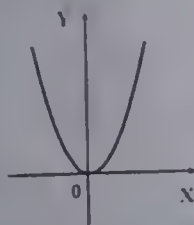
a.  $f(x) = x^0 = 1$



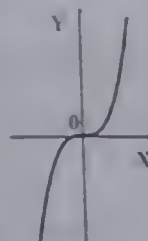
b.  $f(x) = x^1 = x$



c.  $f(x) = x^2$



d.  $f(x) = x^3$

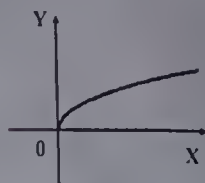


Observe la diferencia de las gráficas entre  $n$  par y  $n$  impar.

**EJEMPLO 9.** Si  $\alpha = \frac{1}{n}$ , donde  $n$  es un número natural no nulo, tenemos la función raíz  $n$ -ésima:  $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

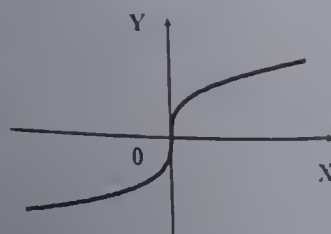
A continuación presentamos los casos  $n = 2$  y  $n = 3$

$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ ,



$\text{Dom}(f) = \text{Rang}(f) = [0, +\infty)$

$f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$

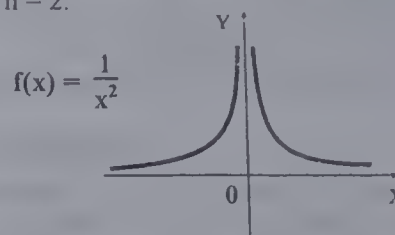
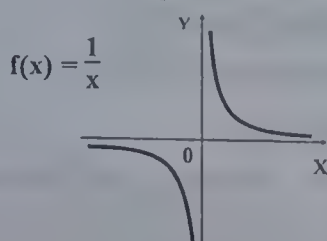


$\text{Dom}(f) = \text{Rang}(f) = \mathbb{R}$

**EJEMPLO 10.** Si  $\alpha = -n$ , donde  $n$  es un número natural no nulo, tenemos la función:

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{Dom}(f) = \text{Rang}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

A continuación presentamos los casos  $n = 1$  y  $n = 2$ .



La gráfica de  $f(x) = 1/x^n$  se parece a la de  $f(x) = 1/x$  si  $n$  es impar; y a la gráfica de  $f(x) = 1/x^2$  si  $n$  es par.

### FUNCION POLINOMICA

Una **función polinómica** o **función polinomial** de grado  $n$  o, simplemente, **polinomio de grado  $n$** , es una función de la forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde  $n$  es un número natural y  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son números reales siendo  $a_n \neq 0$ . Estos números son los coeficientes de la función polinómica.

A las funciones polinómicas de grado 1, 2, 3:

$$p(x) = ax + b, \quad p(x) = ax^2 + bx + c, \quad p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

se les conoce más usualmente con los nombres de **función lineal**, **función cuadrática** y **función cúbica**, respectivamente. Una función polinómica de grado 0 es una función constante. Y a sabemos que el gráfico de una función lineal es una recta no vertical y que el gráfico de una función cuadrática es una parábola con eje paralelo al eje  $Y$ .

### FUNCION RACIONAL

Una **función racional** es cociente de dos polinomios:  $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ .

Así,  $R(x) = \frac{2 - 3x + 8x^3}{4 - x^2}$  es una función racional.

El dominio de una función racional es  $\mathbb{R}$  menos el conjunto de puntos donde el denominador se anula. Así el dominio de la función racional anterior es  $\mathbb{R} - \{2, -2\}$

## FUNCIONES ALGEBRAICAS

Una función  $f$  es algebraica si esta puede construirse usando operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación, división, potencia) y extracción de raíces con respecto con polinomios. Los polinomios y las funciones racionales son automáticamente funciones algebraicas. Como ejemplos son los siguientes:

$$a) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$b) \quad f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$$

## FUNCIONES TRANSCENDENTES

Las funciones que no son algebraicas son llamadas funciones transcendentales. Entre estas tenemos a las funciones trigonométricas y sus inversas, las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas. A continuación hacemos un breve repaso de las funciones trigonométricas. En uno de los apéndices hacemos una presentación más detallada de estas. De las funciones trigonométricas inversas y de funciones exponenciales y logarítmicas nos ocuparemos un poco más adelante.

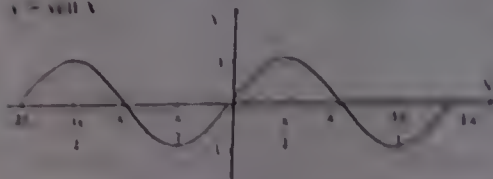
## FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

### LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

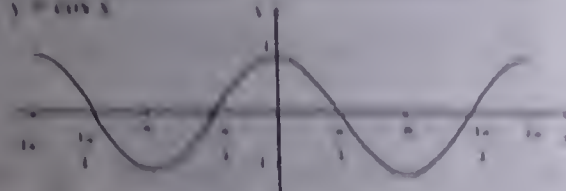
Entendemos la función  $y = \sin x$  como el seno del ángulo cuya medida es  $x$  radianes. La misma interpretación damos a  $y = \cos x$ .

El dominio de estas dos funciones es  $\mathbb{R}$  y su rango es  $[-1, 1]$ .

$y = \sin x$



$y = \cos x$



Estas dos funciones son periódicas de periodo  $2\pi$ . Esto es,

$$1. \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Además se cumple que

$$2. \quad \sin(-x) = -\sin x \quad (\text{seno es impar}), \quad \cos(-x) = \cos x \quad (\text{coseno es par})$$

$$3. \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$4. \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$5. \quad |\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1$$

$$6. \quad \sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$



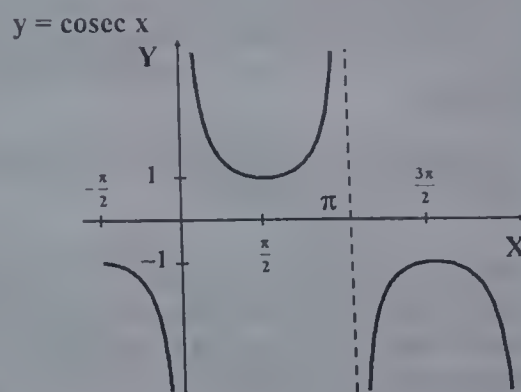
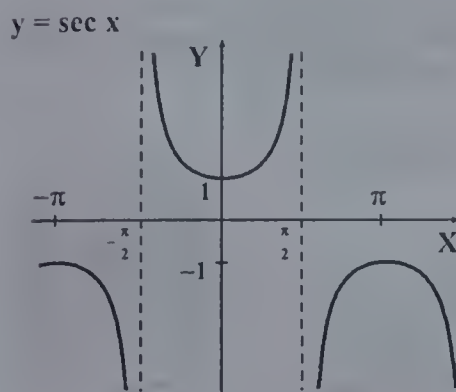
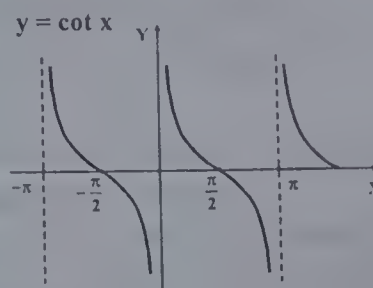
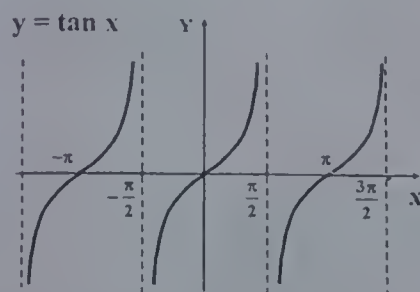
## LAS OTRAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

$$\text{a. } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{b. } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{c. } \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{d. } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

De acuerdo a las igualdades dadas en 6, tenemos que:

$$1. \operatorname{Dom}(\tan) = \operatorname{Dom}(\sec) = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$2. \operatorname{Dom}(\cot) = \operatorname{Dom}(\operatorname{cosec}) = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z} \right\}$$



## FUNCIONES COMO MODELOS MATEMATICOS

Muchas relaciones que aparecen en las distintas ciencias o en la vida cotidiana se expresan (son modeladas) mediante funciones. Veamos algunos ejemplos.

**EJEMPLO 11.** Una fábrica que produce cierto artículo obtiene una utilidad de 300 dólares por unidad cuando la producción no excede las 800 unidades. La utilidad decrece 2 dólares por cada unidad que sobrepasa los 800.

- Expresar la utilidad  $U(x)$  de la fábrica como función de los  $x$  artículos producidos.
- Hallar la utilidad si se producen 1200 unidades.

**Solución**

- a. Si  $0 \leq x \leq 800$ , la utilidad es  $U(x) = 300x$   
 Si  $x > 800$ , el exceso sobre 800 es  $x - 800$  y la utilidad por unidad ha decrecido en;  
 $2(x - 800) = 2x - 1.600$

Por lo tanto:

$$\text{Utilidad por unidad} = 300 - (2x - 1.600) = 1.900 - 2x \quad y$$

$$U(x) = (\text{utilidad por las primeras 800}) + (\text{utilidad por las que exceden 800})$$

$$= 300(800) + (1.900 - 2x)(x - 800) = -2x^2 + 3.500x - 1.280.000$$

En resumen, la utilidad al producir  $x$  artículos es:

$$U(x) = \begin{cases} 300x, & \text{si } 0 \leq x \leq 800 \\ -2x^2 + 3.500x - 1.280.000, & \text{si } x > 800 \end{cases}$$

b.  $U(1.200) = -2(1.200)^2 + 3.500(1.200) - 1.280.000$   
 $= -2.880.000 + 4.200.000 - 1.280.000 = 40.000$

**EJEMPLO 12.** De un tronco de madera, que tiene una sección circular de 3 dm. de radio, se quiere tener un tablón de sección rectangular. Expresar el área del rectángulo en términos de su base.

**Solución**

Sean  $x$ ,  $h$  y  $A$  la base, la altura y el área del rectángulo, respectivamente. Se tiene:

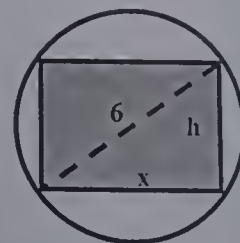
$$A = xh \quad (1)$$

Ahora, expresamos la altura  $h$  en términos de  $x$ , la longitud de la base. Para esto, observamos que el diámetro punteado del círculo divide al rectángulo en dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 6 dm. Usando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$h = \sqrt{6^2 - x^2} \quad (2)$$

Luego, si  $A(x)$  es el área del rectángulo, de (1) y (2) obtenemos:

$$A(x) = x\sqrt{36 - x^2}$$



**EJEMPLO 13.** Un fabricante de envases construye cajas sin tapa utilizando láminas cuadradas de 72 cm. de lado. A cada lámina se recorta un pequeño cuadrado en cada esquina y luego se doblan las aletas para formar los lados de la caja. Si  $x$  es la longitud del lado del pequeño cuadrado recortado, expresar:

- a. El volumen de la caja en términos de  $x$ .  
 b. El área de la caja (sin la tapa) en términos de  $x$ .

**Solución**

en:

a. Tenemos que:

Volumen = (área de la base)(altura)

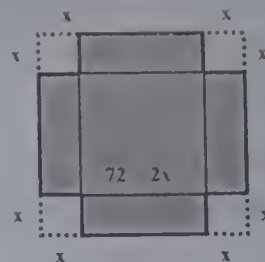
La base de la caja es un cuadrado de lado  $72 - 2x$ .

Luego, su área es  $(72 - 2x)^2$ .

La altura de la caja es  $x$ .

En consecuencia, el volumen de la caja es:

$$V = (72 - 2x)^2 (x) = x(72 - 2x)^2$$



b. El área de la caja es igual al área del cuadrado inicial menos el área de los 4 cuadrados recortados. Luego, si  $A(x)$  es el área de la caja, entonces

$$A(x) = (72)^2 - 4x^2 = 5.184 - 4x^2$$

**EJEMPLO 14.**

Se desea construir un estanque de  $16 \text{ m}^3$  de capacidad. La base debe ser un rectángulo cuyo largo es el doble de su ancho. Las paredes laterales deben ser perpendiculares a la base. El  $\text{m}^2$  de la base cuesta 80 mil bolívares y el  $\text{m}^2$  de las paredes laterales, 50 mil bolívares. Expresar el costo del tanque como función del ancho de la base.

**Solución**

Sea  $x$  la medida del ancho de la base,  $h$  la altura del tanque y  $C(x)$  su costo, en miles de bolívares.

La base tiene una longitud de  $2x$  y un área de  $2x(x) = 2x^2$ . Luego,

$$\text{Costo de la base} = 80(2x^2) = 160x^2. \quad (1)$$

El tanque debe tener  $16 \text{ m}^3$ . Luego,

$$16 = V = (\text{largo})(\text{ancho})(\text{altura}) = 2x(x)h = 2x^2h$$

Despejando  $h$ :

$$h = \frac{16}{2x^2} = \frac{8}{x^2}$$

El área de las 4 paredes laterales es:

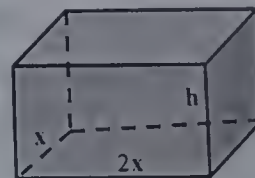
$$2xh + 2(2x)h = 6xh = 6x \left( \frac{8}{x^2} \right) = \frac{48}{x}$$

Luego,

$$\text{Costo de las paredes laterales} = 50 \left( \frac{48}{x} \right) = \frac{240}{x} \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) obtenemos el costo del tanque:

$$C(x) = 160x^2 + \frac{240}{x} \text{ miles de bolívares}$$





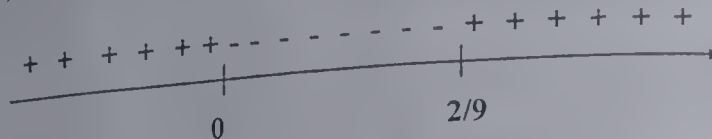
## PROBLEMAS RESUELTOS 1.1

**PROBLEMA 1.** Hallar el dominio y rango de la función  $f(x) = \sqrt{9 - 2/x}$

Solución

Dominio:

$$x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow 9 - \frac{2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9x - 2}{x} \geq 0$$



$$\text{Luego, } \text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup [2/9, +\infty).$$

Rango:

$$y \in \text{Rang}(f) \Leftrightarrow \exists x \in \text{Dom}(f) \text{ tal que } f(x) = y \Leftrightarrow \exists x \in \text{Dom}(f) \text{ tal que } \sqrt{9 - 2/x} = y$$

Despejamos  $x$  en términos de  $y$ :

$$\sqrt{9 - 2/x} = y \Leftrightarrow 9 - \frac{2}{x} = y^2 \wedge y \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = 9 - y^2 \wedge y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{9 - y^2} \wedge y \geq 0$$

Mirando la igualdad:  $x = \frac{2}{9 - y^2}$ , vemos que podemos encontrar  $x$  si el

denominador,  $9 - y^2$ , es distinto de 0, ó sea cuando  $y \neq 3$  ó  $y \neq -3$ .

$$\text{Luego, } y \in \text{Rang}(f) \Leftrightarrow (y \neq 3 \text{ ó } y \neq -3.) \wedge y \geq 0 \Leftrightarrow y \in [0, +\infty) - \{3\}.$$

$$\text{En consecuencia, } \text{Rang}(f) = [0, +\infty) - \{3\}.$$

**PROBLEMA 2.** Hallar el dominio, el rango y graficar la función sierra:

Solución

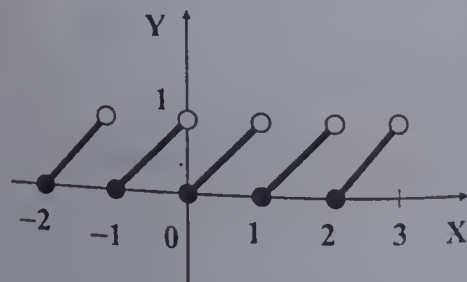
$$S(x) = x - [x]$$

Dominio:  $\mathbb{R}$

Analicemos a la función  $S$  en cada intervalo de la forma  $[n, n + 1)$ :

$$n \leq x < n + 1 \Rightarrow [x] = n \Rightarrow$$

$$S(x) = x - n \text{ y } S(n) = n - n = 0$$



Esto nos dice que en cada intervalo  $[n, n+1)$   $S$  es la recta  $y = x - n$  que tiene pendiente 1 y pasa por el punto  $(n, S(n)) = (n, 0)$ .

Luego el rango de  $S$  es el intervalo  $[0, 1)$ .

**PROBLEMA 3.** Hallar la función lineal  $f(x) = ax + b$  que cumple las condiciones:

$$1. f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad 2. f(-2) = -6$$

**Solución**

Usando la condición (1) obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x+y) = f(x) + f(y) &\Rightarrow a(x+y) + b = (ax+b) + (ay+b) \Rightarrow \\ ax + ay + b &= ax + b + ay + b \Rightarrow b = b + b \Rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

Luego,  $f(x) = ax$ .

Ahora, usamos la condición (2):

$$f(-2) = -6 \Rightarrow a(-2) = -6 \Rightarrow a = 3$$

En consecuencia, la función lineal buscada es:  $f(x) = 3x$

**PROBLEMA 4.** Una fábrica, para envasar alimentos, necesita potes de aluminio con tapa, que tengan la forma de un cilindro circular recto y un volumen de  $250\pi \text{ cm}^3$ . Expresar la cantidad (área) de aluminio que tiene cada pote como función del radio de la base.

**Solución**

Sean  $r$  el radio de la base,  $h$  la altura y  $A$  el área total de las paredes del pote. El área es la suma de las áreas de las dos bases, que es  $2\pi r^2$ , más el área de la superficie lateral, que es  $2\pi rh$ . Luego,

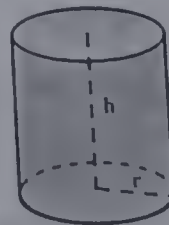
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad (1)$$

Por otro lado, el volumen del cilindro circular recto es  $V = \pi r^2 h$ . En nuestro caso, como  $V = 250\pi$ , tenemos que

$$\pi r^2 h = 250\pi \Rightarrow r^2 h = 250 \Rightarrow h = \frac{250}{r^2}$$

Reemplazando este valor de  $h$  en (1):

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{250}{r^2} = 2\pi \left( r^2 + \frac{250}{r} \right)$$



**PROBLEMA 5.** La figura adjunta está conformada por un triángulo isósceles y un semicírculo. Los lados congruentes del triángulo miden 10 cm. y forman el ángulo  $\theta$ . Hallar una función que exprese el área  $A$  de la figura en términos del ángulo  $\theta$ .

**Solución**

Si  $A_1$  es el área del semicírculo y  $A_2$  la del triángulo, entonces

$$A = A_1 + A_2$$

Hallemos  $A_1$ :

El radio del semicírculo es  $r = 10 \operatorname{sen}(\theta/2)$ . Luego,

$$A_1 = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi [10 \operatorname{sen}(\theta/2)]^2 = 50\pi \operatorname{sen}^2(\theta/2)$$

Hallemos  $A_2$ :

La base  $b$  y la altura  $h$  del triángulo están dadas por:

$$b = 2r = 2(10 \operatorname{sen}(\theta/2)) = 20 \operatorname{sen}(\theta/2), \quad h = 10 \cos(\theta/2).$$

Luego,

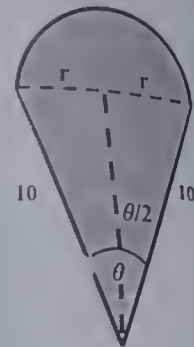
$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} [20 \operatorname{sen}(\theta/2)] [10 \cos(\theta/2)] \\ &= 50 [2 \operatorname{sen}(\theta/2) \cos(\theta/2)] = 50 \operatorname{sen} \theta \quad (\text{Ident. Trigo. 27}) \end{aligned}$$

Ahora hallamos  $A$ :

$$A = A_1 + A_2 = 50\pi \operatorname{sen}^2(\theta/2) + 50 \operatorname{sen} \theta = 50 [\pi \operatorname{sen}^2(\theta/2) + \operatorname{sen} \theta]$$

Luego,

$$A = 50 [\pi \operatorname{sen}^2(\theta/2) + \operatorname{sen} \theta]$$



## PROBLEMAS PROPUESTOS 1.1

1. Dada la función  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ , encontrar:

- a.  $f(3)$       b.  $f(1 + \sqrt{2})$       c.  $f(2+h) - f(2)$       d.  $f(a+h) - f(a)$

2. Dada la función  $g(x) = x + \frac{(x-2)^2}{4}$ , encontrar:

- a.  $g(2)$ ,      b.  $g(a+2)$ ,      c.  $g(a+h) - g(a)$

En los problemas del 3 al 8 hallar el dominio y el rango de la función dada.

3.  $f(x) = \sqrt{x-9}$

4.  $g(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{3}$

5.  $h(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$

6.  $u(x) = \sqrt[3]{x-2}$

7.  $f(x) = \frac{x^2-4}{x}$

8.  $y = \sqrt{x(x-2)}$

En los problemas del 9 al 14 hallar el dominio de la función dada.

9.  $g(x) = \frac{6}{\sqrt{9-x}-2}$

10.  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}-2}$

11.  $y = \sqrt{4 - \frac{1}{x}}$



$$12. y = \frac{1}{4 - \sqrt{1-x}}$$

$$13. y = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$$

$$14. y = \sqrt[4]{\frac{x+5}{x-3}}$$

En los problemas 15 y 16, hallar el dominio, el rango y graficar la función:

$$15. g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

$$16. f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

17. Probar que:

a. Si el gráfico de  $f$  es simétrico respecto al eje  $Y$ , entonces  $f$  es par.

b. Si el gráfico de  $f$  es simétrico respecto al origen, entonces  $f$  es impar.

18. Si  $f(x+1) = (x-3)^2$ , hallar  $f(x-1)$ .

19. Hallar la función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx$  tal que  $f(x) - f(x-1) = x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

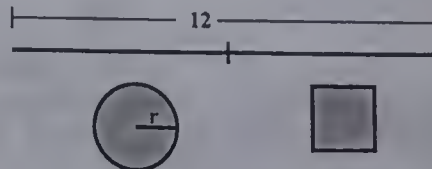
20. Un hotel tiene 40 habitaciones. El gerente sabe que cuando el precio por habitación es de Bs. 30.000 todas las habitaciones son alquiladas, pero por cada 5.000 bolívares de aumento una habitación se desocupa. Si el precio de mantenimiento de una habitación ocupada es de Bs. 4.000. Expresar la ganancia del hotel como función del número  $x$  de habitaciones alquiladas.

21. Cuando la producción diaria no sobrepasa de 1.000 unidades de cierto artículo, se tiene una utilidad de Bs. 4.000 por artículo; pero si el número de artículos producidos excede los 1.000, la utilidad, para los excedentes, disminuye en Bs. 10 por cada artículo que excede los 1.000. Expresar la utilidad diaria del productor como función del número  $x$  de artículos producidos.

22. Una finca está sembrada de mangos a razón de 80 plantas por hectárea. Cada planta produce un promedio de 960 mangos. Por cada planta adicional que se siembre, el promedio de producción por planta se reduce en 10 mangos. Expresar la producción  $p(x)$  de mangos por hectárea como función del número  $x$  de plantas de mango sembradas por hectárea.

23. Para enviar cierto tipo de cajas por correo la administración exige que éstas sean de base cuadrada y que la suma de sus dimensiones (largo + ancho + altura) no supere los 150 cm. Expresar el volumen de la caja, con máxima suma de sus lados, como función de la longitud del lado  $x$  de la base.

24. Un alambre de 12 m. de largo se corta en dos pedazos. Con uno de ellos se forma una circunferencia y con el otro un cuadrado. Expresar el área encerrada por estas dos figuras como función del radio  $r$  de la circunferencia.



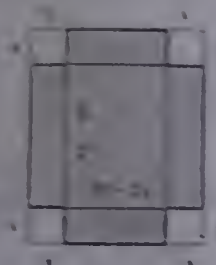
25. Un triángulo isósceles tiene 36 cm. de perímetro. Expresar el área del triángulo como función de la longitud  $x$  de uno de los lados iguales.



24. Una ventana de 1 m. de altura tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Expresar el área de la ventana como función del ancho.



27. Las dimensiones de un marco ornamental son las que aparecen. Se trata de un marco rectangular de 80 cm. de ancho por 36 cm. de ancho. Para formar la copa, de las cuatro esquinas de cada lámina se recorta un pequeño cuadrado y luego se doblan las alas, como indica la figura.



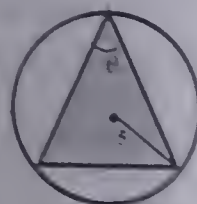
Expresar el volumen del envase como función de la longitud  $x$  del lado del cuadrado recortado.

28. Se quiere imprimir un libro, en el cual cada página tenga 2 cm. de margen superior, 3 cm. de margen inferior y 2 cm. de margen a cada lado. El texto mismo debe ocupar un área de  $252 \text{ cm}^2$ .

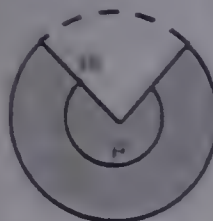


Expresar el área de cada página como función del ancho  $x$  del rectángulo impreso.

29. Un triángulo isósceles se inscribe en un círculo de radio 5 cm. Hallar una función que exprese el perímetro  $P$  del triángulo en términos del ángulo  $\theta$ .



30. De una lamina circular de radio 10 cm. se corta un sector para elaborar una copa cónica. Hallar una función que exprese el volumen de la copa en términos del ángulo central  $\theta$ . El volumen del cono es  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ .



31. El ángulo de inclinación de una recta que no intersecta el segundo eje positivo es de  $\frac{\pi}{4}$  rad. Hallar la ecuación sabiendo que su distancia al origen es de 4.

## SECCION 1.2

### NUEVAS FUNCIONES DE FUNCIONES CONOCIDAS

#### GRAFICAS NUEVAS DE GRAFICAS CONOCIDAS

Conociendo el gráfico de una función  $y = f(x)$  podremos obtener, mediante simples modificaciones geométricas, los gráficos de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{llll} y = f(x) + c, & y = f(x) - c, & y = f(x + c), & y = f(x - c), \\ y = -f(x), & y = f(-x), & y = cf(x), & y = f(cx), \end{array}$$

donde  $c$  es una constante positiva.

Las transformaciones sugeridas son de tres tipos:

1. Traslaciones verticales y horizontales.
2. Reflexiones.
3. Estiramiento y compresión.

### TRASLACIONES VERTICALES Y HORIZONTALES

Sea  $c > 0$ . Para obtener la gráfica de:

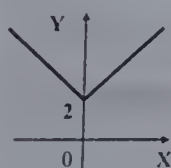
1.  $y = f(x) + c$ , trasladar la gráfica de  $y = f(x)$   $c$  unidades hacia arriba.
2.  $y = f(x) - c$ , trasladar la gráfica de  $y = f(x)$   $c$  unidades hacia abajo.
3.  $y = f(x + c)$ , trasladar la gráfica de  $y = f(x)$   $c$  unidades a la izquierda.
4.  $y = f(x - c)$ , trasladar la gráfica de  $y = f(x)$   $c$  unidades a la derecha.

**EJEMPLO 1.** Utilizando la gráfica de la función  $y = |x|$  (ejemplo 6), graficar las funciones:

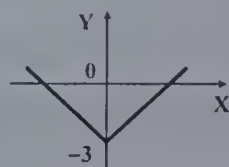
a.  $y = |x| + 2$     b.  $y = |x| - 3$     c.  $y = |x - 1|$     d.  $y = |x + 2|$

**Solución**

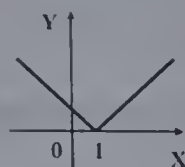
a.  $y = |x| + 2$



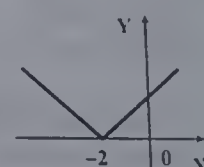
b.  $y = |x| - 3$



c.  $y = |x - 1|$



d.  $y = |x + 2|$



### REFLEXIONES

Para obtener la gráfica de:

1.  $y = -f(x)$ , reflejar la gráfica de  $y = f(x)$  en el eje X.
2.  $y = f(-x)$ , reflejar la gráfica de  $y = f(x)$  en el eje Y.

**EJEMPLO 2.**

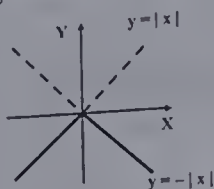
 Utilizando las gráficas de  $y = |x|$  y la de la  $y = \sqrt{x}$ , graficar las siguientes funciones:

a.  $y = -|x|$

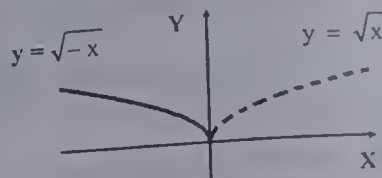
b.  $y = \sqrt{-x}$

**Solución**

 a. La gráfica de  $y = -|x|$  se obtiene reflejando en el eje X la gráfica de  $y = |x|$ 

 b. La gráfica de  $y = \sqrt{-x}$  se obtiene reflejando en el eje Y la gráfica de  $y = \sqrt{x}$ 


a.  $y = -|x|$



b.  $y = \sqrt{-x}$

**ESTIRAMIENTO Y COMPRESION**

 Sea  $c$  una constante positiva:  $c > 0$ .

 1. Para obtener la gráfica de  $y = cf(x)$ , modificar verticalmente (alargar o comprimir) con factor  $c$  la gráfica de  $y = f(x)$ . Esta modificación es un alargamiento si  $c > 1$  y es una compresión si  $0 < c < 1$ .

 2. Para obtener la gráfica de  $y = f(cx)$ , modificar horizontalmente (comprimir o alargar) con factor  $\frac{1}{c}$  la gráfica de  $y = f(x)$ . Esta modificación es una compresión si  $c > 1$  y es un alargamiento si  $0 < c < 1$ .

Una argumentación sobre la validez de estos criterios la presentamos en el problema resuelto 6.

**EJEMPLO 3.**

 Utilizando las gráficas de  $y = \sqrt{1-x^2}$  graficar las funciones

a.  $g(x) = 2\sqrt{1-x^2}$

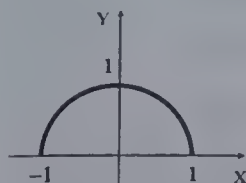
b.  $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

**Solución**

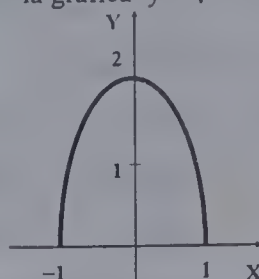
 La gráfica de  $y = \sqrt{1-x^2}$  es la parte superior de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ 

 a. En este caso  $c = 2 > 1$ . Luego, la gráfica de  $g(x) = 2\sqrt{1-x^2}$  se obtiene estirando verticalmente con factor  $c = 2$  la gráfica  $y = \sqrt{1-x^2}$

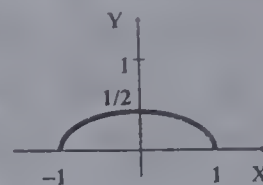
- b. En este caso  $c = \frac{1}{2} < 1$ . La gráfica de  $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$  se obtiene comprimiendo verticalmente con factor  $c = \frac{1}{2}$  la gráfica  $y = \sqrt{1-x^2}$



$$y = \sqrt{1-x^2}$$



$$a. g(x) = 2\sqrt{1-x^2}$$



$$b. h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$$

**EJEMPLO 4.** Utilizando las gráfica de  $y = \sqrt{1-x^2}$  graficar las funciones

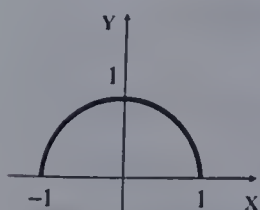
$$a. g(x) = \sqrt{1-4x^2}$$

$$b. h(x) = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

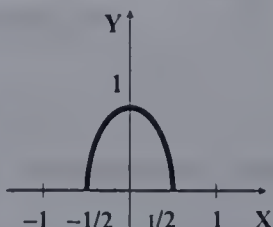
**Solución**

- a. Tenemos que  $g(x) = \sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-(2x)^2}$ . Luego, por la regla 2, para el caso  $c = 2$ , concluimos que la gráfica de  $g(x) = \sqrt{1-4x^2}$  se obtiene comprimiendo horizontalmente con factor  $c = 1/2$  la gráfica  $y = \sqrt{1-x^2}$

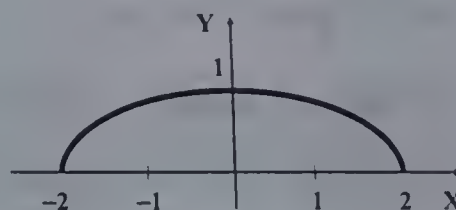
- b. Tenemos que  $h(x) = \sqrt{1-x^2/4} = \sqrt{1-(x/2)^2}$ . Luego, por la regla 2, para el caso  $c = 1/2$  la gráfica de  $h(x) = \sqrt{1-x^2/4}$  se obtiene estirando horizontalmente con factor  $\frac{1}{c} = \frac{1}{1/2} = 2$  la gráfica  $y = \sqrt{1-x^2}$



$$y = \sqrt{1-x^2}$$



$$a. g(x) = \sqrt{1-4x^2}$$



$$b. h(x) = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$



# ALGEBRA DE FUNCIONES

Dadas las funciones reales,  $f$  y  $g$ , la suma  $f + g$ , la diferencia  $f - g$ , el producto de un número  $r$  por una función  $rf$  y el cociente  $\frac{f}{g}$  se definen así:

DEFINICION

**DEFINICION.**

Sean  $f$  y  $g$  funciones reales y  $r$  un número real.

- a.  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ,  $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ .
- b.  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ ,  $\text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ .
- c.  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ ,  $\text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ .
- d.  $(rf)(x) = rf(x)$ ,  $\text{Dom}(rf) = \text{Dom}(f)$ .
- e.  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ,  $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x / g(x) = 0\}$ .

**EJEMPLO 5.**

Si  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$  y  $r = 5$ , hallar las funciones:

- a.  $f + g$
- b.  $f - g$
- c.  $fg$
- d.  $rf$
- e.  $\frac{f}{g}$

**Solución**

Halleemos los dominios de  $f$  y de  $g$ :

$$x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow x \geq 0. \text{ Luego, } \text{Dom}(f) = [0, +\infty).$$

$$x \in \text{Dom}(g) \Leftrightarrow 9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3.$$

$$\text{Luego, } \text{Dom}(g) = [-3, 3].$$

La intersección de estos dominios es:

$$\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = [0, +\infty) \cap [-3, 3] = [0, 3].$$

Ahora,

$$\text{a. } (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{9 - x^2}, \text{ con dominio } = [0, 3].$$

$$\text{b. } (f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{9 - x^2}, \text{ con dominio } = [0, 3].$$

$$\text{c. } (fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x}\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9x - x^3}, \text{ con dominio } = [0, 3].$$

$$\text{d. } (5f)(x) = 5f(x) = 5\sqrt{x}, \text{ con dominio } = \text{Dom}(f) = [0, +\infty)$$

$$\text{e. } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{9 - x^2}} = \sqrt{\frac{x}{9 - x^2}}, \text{ con dominio } = [0, 3] - \{3\} = [0, 3)$$

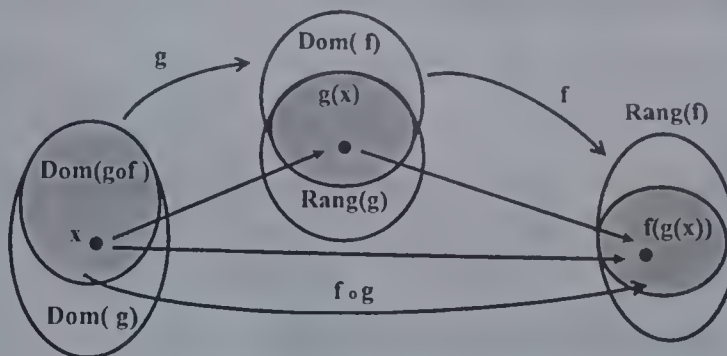
## COMPOSICION DE FUNCIONES

**DEFINICION.** Dadas dos funciones  $f$  y  $g$ , se llama **función compuesta** de  $f$  y  $g$  a la función  $f \circ g$  definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) / g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

Observar que para que se pueda tener la compuesta  $f \circ g$ , el rango de  $g$  debe intersectar al dominio de  $f$ .



**EJEMPLO 6.** Si  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  y  $g(x) = \frac{1}{x}$  hallar:

- a.  $f \circ g$       b.  $g \circ f$       c.  $g \circ g$       d.  $f \circ f$

**Solución**

a.  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1/x) = \sqrt{1-(1/x)^2} = \sqrt{1-1/x^2}$

b.  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

c.  $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(1/x) = \frac{1}{1/x} = x$

d.  $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2} = \sqrt{x^2} = |x|$   
 $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 7 \neq 16x^2 - 40x + 28 = (f \circ g)(x)$

Este ejemplo demuestra que la **composición de funciones no es conmutativa**. Esto es,  $(g \circ f) \neq (f \circ g)$ . En efecto:

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1-1/x^2} \neq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (f \circ g)(x)$$

**EJEMPLO 7.** Si  $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ,  $g(x) = x^3$  y  $h(x) = x - 2$ , hallar:

a.  $f \circ g \circ h$

b.  $f \circ h \circ g$

c.  $h \circ g \circ f$

**Solución**

$$a. (f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f(g(x-2)) = f((x-2)^3) = \frac{(x-2)^3}{1+(x-2)^3}$$

$$b. (f \circ h \circ g)(x) = (f \circ h)(g(x)) = f(h(g(x))) = f(h(x^3))$$

$$= f(x^3 - 2) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3 - 2} = \frac{x^3 - 2}{x^3 - 1}$$

$$c. (h \circ g \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h\left(g\left(\frac{x}{1+x}\right)\right) = h\left(\left(\frac{x}{1+x}\right)^3\right)$$

$$= \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - 2 = \frac{x^3}{(1+x)^3} - 2$$

**EJEMPLO 8.** Si  $F(x) = \frac{-5}{\sqrt{x^2 - 3}}$ , hallar tres funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$  tales que

$$F = f \circ g \circ h$$

**Solución**

Si  $f(x) = \frac{-5}{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$  y  $h(x) = x^2 - 3$ , se tiene:

$$(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f(g(x^2 - 3)) = f(\sqrt{x^2 - 3}) = \frac{-5}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

Estas funciones no son únicas. Las siguientes funciones también satisfacen el requerimiento:

$$f(x) = \frac{-5}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = x - 3 \quad y \quad h(x) = x^2$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 1.2

**PROBLEMA 1.** Usando la gráfica de  $y = [x]$ , ejemplo 5 sección 1.1, y usando las técnicas de la transformación, bosquejar la gráfica de

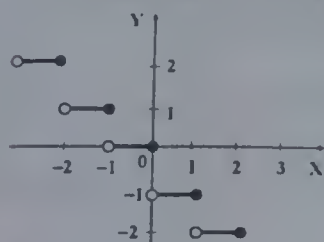
a.  $y = [-x]$

b.  $y = [x/2]$

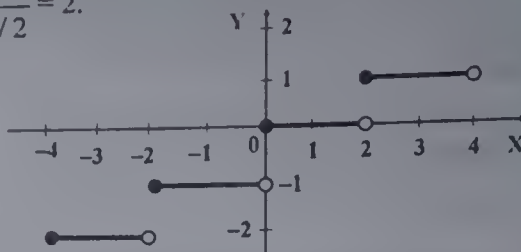
**Solución**

a. El gráfico de  $y = [-x]$  se obtiene reflejando en el eje Y el gráfico de  $y = [x]$ .

b. La gráfica de  $y = \lfloor x/2 \rfloor$  se obtiene de la gráfica de  $y = \lfloor x \rfloor$ , alargándola horizontalmente con factor  $\frac{1}{c} = \frac{1}{1/2} = 2$ .



a.  $y = \lfloor -x \rfloor$



b.  $y = \lfloor x/2 \rfloor$

**PROBLEMA 2.** Usando las técnicas de la transformación de gráficas, bosquejar

la gráfica de  $y = -\sqrt{\frac{1}{2}x} + 3$

**Solución**

**Paso 1.** Tomamos la gráfica de  $y = \sqrt{x}$ , que es ya conocida.

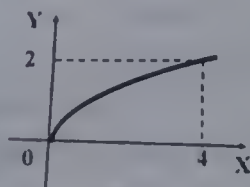
**Paso 2.** Construimos la gráfica de  $y = \sqrt{x/2}$ , la cual se obtiene de la gráfica de

$y = \sqrt{x}$  alargándola horizontalmente con factor  $\frac{1}{c} = \frac{1}{1/2} = 2$

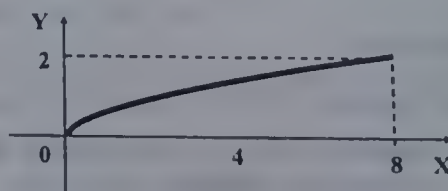
**Paso 3.** Construimos la gráfica de  $y = -\sqrt{x/2}$ , la cual se obtiene de la gráfica de  $y = \sqrt{x/2}$  reflejándola en el eje X.

**Paso 4.** Construimos la gráfica de  $y = -\sqrt{x/2} + 3$ , la cual se obtiene de la gráfica de  $y = -\sqrt{x/2}$ , trasladándola 3 unidades hacia arriba.

1.  $y = \sqrt{x}$



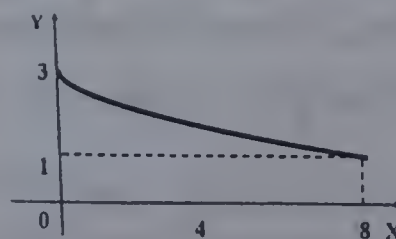
2.  $y = \sqrt{x/2}$



3.  $y = -\sqrt{x/2}$



4.  $y = -\sqrt{x/2} + 3$





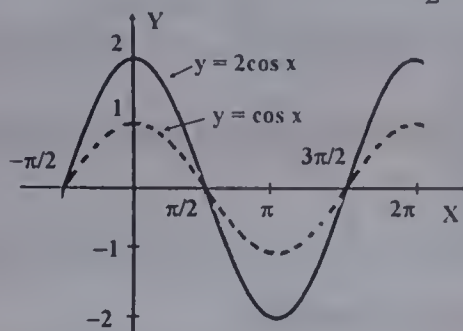
**PROBLEMA 3.** Teniendo en cuenta la gráfica de  $y = \cos x$  y usando las técnicas de la transformación de gráficas, bosquejar la gráfica de:

a.  $f(x) = 2\cos x$

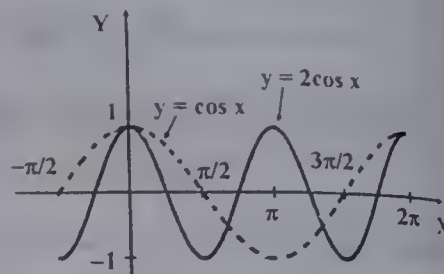
b.  $g(x) = \cos 2x$

**Solución**

- a. La gráfica de la función  $f(x) = 2\cos x$  se obtiene de la gráfica de  $y = \cos x$ , estirándola verticalmente, con un factor de 2.
- b. La gráfica de  $g(x) = \cos 2x$  se obtiene de la gráfica de  $y = \cos x$ , comprimiéndola horizontalmente, con un factor de  $\frac{1}{2}$ .



$f(x) = 2\cos x$



$g(x) = \cos 2x$

Observar que el periodo de  $g(x) = \cos 2x$  es  $\pi$ , que es la mitad del periodo de  $y = \cos x$ . En general, el periodo de  $y = \cos cx$  es  $\frac{2\pi}{c}$ .

**PROBLEMA 4.** Sea la función  $h(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{4-x^2}$

a. Hallar el dominio de  $h$ .

b. Hallar dos funciones  $f$  y  $g$  tales que  $h = g \circ f$

**Solución**

- a. Para que  $\sqrt{4-x^2}$  sea real debemos tener que  $4-x^2 \geq 0$ . Además, como  $4-x^2$  aparece como un denominador, debemos exigir que  $4-x^2 \neq 0$ . Uniendo las dos condiciones debemos tener que:

$$4-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Luego, el dominio de  $h$  es el intervalo  $(-2, 2)$ .

- b. Si  $f(x) = 4-x^2$  y  $g(y) = \sqrt{y} + \frac{1}{y}$ , tenemos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4-x^2) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{4-x^2} = h(x)$$

**PROBLEMA 5.**Sea  $g(x) = x - 1$  y  $h(x) = x^2$ .

- a. Hallar una función  $p$  tal que  $g \circ p = h$   
 b. Hallar una función  $f$  tal que  $f \circ g = h$

**Solución**

$$a. g \circ p = h \Rightarrow g(p(x)) = h(x) \Rightarrow p(x) - 1 = x^2 \Rightarrow p(x) = x^2 + 1$$

$$b. f \circ g = h \Rightarrow f(g(x)) = h(x) \Rightarrow f(x - 1) = x^2$$

$$\text{Luego, } f(x) = f(x + 1 - 1) = f((x + 1) - 1) = (x + 1)^2$$

**PROBLEMA 6.** Justificar el criterio de estiramiento y compresión de una gráfica.**Solución**

- Tomemos cualquier punto  $(x, f(x))$  del gráfico de  $y = f(x)$ . Si a la ordenada de este punto lo multiplicamos por  $c$ , obtenemos el punto  $(x, cf(x))$ , que está en la gráfica de  $y = cf(x)$ . Pero multiplicar sólo las ordenadas de los puntos  $(x, f(x))$  por  $c$  significa alargar (si  $c > 1$ ) o comprimir (si  $c < 1$ ) verticalmente con factor  $c$  la gráfica de  $y = f(x)$ .
- Tomemos cualquier punto  $(x, f(x))$  del gráfico de  $y = f(x)$ . Si a la abscisa de este punto lo multiplicamos por  $1/c$ , obtenemos el punto  $(x/c, f(x))$ . Si hacemos  $z = x/c$ , tenemos que  $x = cz$  y  $(x/c, f(x)) = (z, f(cz))$ , que está en la gráfica de  $y = f(cx)$ . Pero multiplicar las abscisas de los puntos  $(x, f(x))$  por  $1/c$  significa comprimir (si  $c > 1$ ) o alargar (si  $c < 1$ ) horizontalmente con factor  $1/c$  la gráfica de  $y = f(x)$ .

**PROBLEMAS PROPUESTOS 1.2**

1. Usando la gráfica de  $f(x) = x^3$ , bosquejar los gráficos de:

a.  $y = x^3 - 3$     b.  $y = (x - 1)^3$     c.  $y = -x^3 + 1$     d.  $y = -(x - 1)^3 + 1$

2. Usando la gráfica de  $f(x) = \frac{1}{x}$ , bosquejar los gráficos de:

a.  $y = \frac{1}{x} - 2$     b.  $y = \frac{1}{x - 2}$     c.  $y = -\frac{1}{x}$     d.  $y = \frac{1}{x - 2} + 5$

3. Usando la gráfica de  $y = [x]$ , bosquejar el gráfico de:

a.  $y = -[x]$     b.  $y = [2x]$     c.  $y = \frac{1}{2}[x]$

4. Utilizando la gráfica de la función  $y = \sin x$  y las técnicas de traslación y reflexión, graficar la función  $y = 1 - \sin(x - \frac{\pi}{2})$
5. a. Considerando la gráfica  $y = \cos x$  y usando las técnicas de la transformación de gráficas, bosquejar la gráfica de  $y = -3\cos 4x$ .  
b. ¿Cuál es el periodo de  $y = -3\cos 4x$ ?

En los problemas 6, 7 y 8 hallar  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  y  $\frac{f}{g}$  con sus respectivos dominios.

6.  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $g(x) = \sqrt{2-x}$

7.  $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ ,  $g(x) = \sqrt{x^2-4}$

8.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{x}$

9. Hallar el dominio de la función  $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-1}$

10. Hallar el dominio de la función  $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

11. Hallar el dominio de la función  $g(x) = \frac{\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2}}{x^2-9}$

En los problemas del 12 al 16 hallar  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f \circ f$  y  $g \circ g$ , con sus respectivos dominios.

12.  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$

13.  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \sqrt{x-4}$

14.  $f(x) = x^2 - x$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$

15.  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{x}$

16.  $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ ,  $g(x) = \sqrt{1-x}$

En los problemas 17 y 18 hallar  $f \circ g \circ h$ .

17.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $h(x) = x^2 - 1$

18.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $g(x) = \frac{x}{1+x}$ ,  $h(x) = x^2 - x$

19. Si  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , hallar, con su respectivo dominio,  $f \circ f \circ f$ .

En los problemas del 20 al 23 hallar dos funciones  $f$  y  $g$  tales que  $F = f \circ g$ .

20.  $F(x) = \frac{1}{1+x}$

21.  $F(x) = -3 + \sqrt{x}$

22.  $F(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$

23.  $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

En los problemas 24, 25 y 26 hallar  $f$ ,  $g$  y  $h$  tales que  $F = f \circ g \circ h$ .



$$24. F(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$25. F(x) = \sqrt[3]{x^2 + |x| + 1}$$

$$26. F(x) = \sqrt[4]{\sqrt{x} - 1}$$

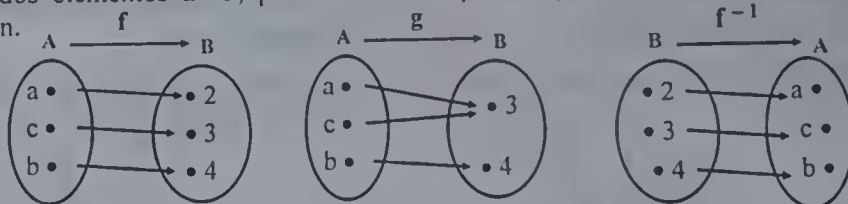
$$27. \text{ Si } f(x) = 2x + 3 \text{ y } h(x) = 2x^2 - 4x + 5, \text{ hallar una función } g \text{ tal que } f \circ g = h.$$

$$28. \text{ Si } f(x) = x - 3 \text{ y } h(x) = \frac{1}{x-2}, \text{ hallar una función } g \text{ tal que } g \circ f = h.$$

### SECCION 1.3 FUNCION INVERSA

Sea  $f: A \rightarrow B$  una función con dominio  $A$  y rango  $B$ .  $f$  asigna a cada elemento  $x$  de  $A$  un único elemento  $y$  de  $B$ . En caso de ser posible, queremos invertir a  $f$ ; es decir, a cada  $y$  de  $B$  regresarlo, sin ambigüedad, al elemento  $x$  de  $A$  de donde provino. A esta nueva función, con dominio  $B$  y rango  $A$ , se la llama función inversa de  $f$  y se denota por  $f^{-1}$ .

No todas las funciones tienen inversa. Así, de las dos funciones  $f$  y  $g$  dadas a continuación, sólo  $f$  tiene inversa. La función  $g$  no la tiene debido a que el elemento 3 proviene de dos elementos de  $A$ ,  $a$  y  $c$ . La función inversa de  $g$  tendría que asignar estos dos elementos a 3, pero esto no es posible porque viola la definición de función.



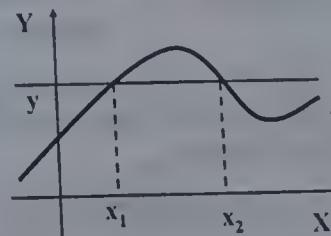
Las funciones, como  $f$ , que elementos distintos del dominio asignan valores distintos del rango, se llaman funciones inyectivas. Estas son las funciones que poseen inversa.

**DEFINICION.** Una función  $f: A \rightarrow B$  es inyectiva o función uno a uno si:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Es decir, si a elementos distintos del dominio, son asignados elementos distintos del rango.

Para determinar si una función real de variable real  $f$  es inyectiva contamos con el criterio de la recta horizontal, que es similar al criterio de la recta vertical usado para determinar si el gráfico de una ecuación corresponde al gráfico de una función.





Si una recta horizontal corta al gráfico de  $f$  en dos puntos, como indica la figura, entonces existen dos puntos  $x_1$  y  $x_2$  del dominio de  $f$  tales que  $y = f(x_1) = f(x_2)$ . Esto implica que  $f$  no es inyectiva. Esta deducción nos ilustra el criterio antes mencionado.

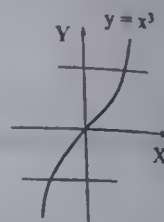
### CRITERIO DE LA RECTA HORIZONTAL.

Una función real de variable real  $f$  es inyectiva si y sólo si toda recta horizontal corta al gráfico de  $f$  a lo más en un punto.

**EJEMPLO 1.** Mostrar que la función  $f(x) = x^3$  es inyectiva.

**Solución**

Toda recta horizontal corta al gráfico de  $f(x) = x^3$  exactamente en un punto. Luego, el criterio de la recta horizontal nos dice que esta función es inyectiva.

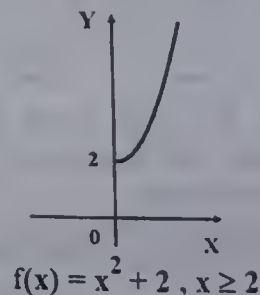
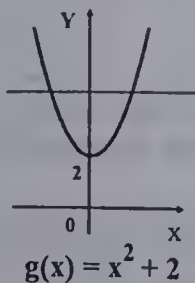


**EJEMPLO 2.** a. Mostrar que la función  $g(x) = x^2 + 2$  no es inyectiva.

b. Restringir el dominio de  $g$  para obtener una nueva función  $f$  que sea inyectiva.

**Solución**

- a. Aplicando el criterio de la recta horizontal vemos que existen rectas horizontales que cortan al gráfico de  $g(x) = x^2$  en más de un punto.
- b. Sea  $f$  la restricción de  $g$  a  $[0, +\infty)$ . Esto es,  $f(x) = x^2 + 2$ , con  $x \geq 0$ . es inyectiva



**EJEMPLO 3.** Si  $f$  es monótona (creciente o decreciente), entonces  $f$  es inyectiva.

En efecto, si  $f$  es creciente o decreciente, entonces toda recta horizontal cortará al gráfico de  $f$  a lo más una vez. Luego, el criterio de la recta horizontal nos asegura que  $f$  es inyectiva.

**DEFINICION.** Sea  $f: A \rightarrow B$  una función inyectiva de dominio  $A$  y rango  $B$ . Se llama **función inversa de  $f$**  a la función

$$f^{-1}: B \rightarrow A \text{ tal que}$$

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x) \quad (1)$$

La expresión (1) anterior es equivalente a

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A \quad y \quad f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in B \quad (2)$$

En efecto, si en  $x = f^{-1}(y)$  reemplazamos  $y = f(x)$ , obtenemos  $x = f^{-1}(f(x))$ . Similarmente, si en  $y = f(x)$ , reemplazamos  $x = f^{-1}(y)$ , obtenemos  $y = f(f^{-1}(y))$ .

**OBSERVACION.** No confundir  $f^{-1}(y)$ , con el cociente  $\frac{1}{f(x)}$ . Para evitar

ambigüedad, al cociente  $\frac{1}{f(x)}$  lo escribiremos así:  $[f(x)]^{-1}$

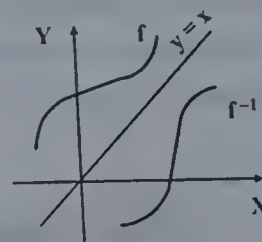
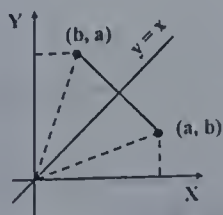
### ESTRATEGIA PARA HALLAR LA INVERSA DE UNA FUNCION

**Paso 1.** Resolver la ecuación  $y = f(x)$  para  $x$  en términos de  $y$ :  $x = f^{-1}(y)$ ,

**Paso 2.** En  $x = f^{-1}(y)$ , intercambiar  $x$  por  $y$  para obtener, finalmente,  $y = f^{-1}(x)$

### GRAFICA DE LA FUNCION INVERSA.

En vista del paso 2 donde se intercambia a  $x$  por  $y$ , la gráfica de la función inversa se obtiene reflejando la gráfica de  $y = f(x)$  en la diagonal  $y = x$ .



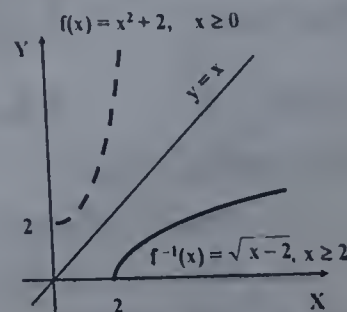
**EJEMPLO 4.** Hallar la función inversa de  $f(x) = x^2 + 2, x \geq 0$ . Graficarla.

**Solución**

$$\text{Paso 1. } y = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = y - 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y - 2}$$

$$\text{Como } x \geq 0, \text{ tenemos } x = \sqrt{y - 2}$$

$$\text{Paso 2. En } x = \sqrt{y - 2} \text{ intercambiamos } x \text{ por } y \\ \text{obtenemos: } f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2}, x \geq 2$$



**EJEMPLO 5.** Sea la función  $g(x) = \frac{4x+7}{2x+5}$ .

- Hallar el dominio de  $g$ .
- Hallar la función inversa  $g^{-1}$ .

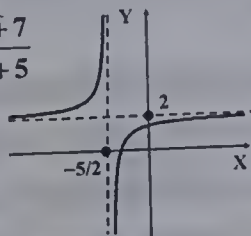
**Solución**

a. Debemos tener que  $2x+5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5/2$ . Luego,  $\text{Dom}(g) = \{x / x \neq -5/2\}$

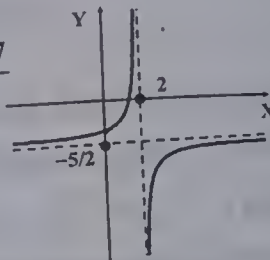
b. Paso 1.  $y = \frac{4x+7}{2x+5} \Rightarrow 2xy + 5y = 4x + 7 \Rightarrow 2xy - 4x = -5y + 7$   
 $\Rightarrow x(2y - 4) = -5y + 7 \Rightarrow x = \frac{-5y + 7}{2y - 4}$

Paso 2. Intercambiamos  $x$  por  $y$  obtenemos:  $g^{-1}(x) = \frac{-5x+7}{2x-4}$

$$g(x) = \frac{4x+7}{2x+5}$$



$$g^{-1}(x) = \frac{-5x+7}{2x-4}$$



Teniendo en cuenta que la gráfica de  $f^{-1}$  se obtiene reflejando en la diagonal principal la gráfica de  $f$ , se deduce los siguientes resultados:

- Si  $f$  es creciente, entonces  $f^{-1}$  es creciente.
- Si  $f$  es decreciente, entonces  $f^{-1}$  es decreciente

### PROBLEMAS PROPUESTOS 1.3

*Hallar la función inversa de cada una de las siguientes funciones. Graficarla.*

1.  $f(x) = 2x + 1$

2.  $g(x) = x^2 - 1, x \geq 0$

3.  $h(x) = x^3 + 2$

4.  $k(x) = \frac{1}{x} - 1$

5.  $f(x) = \sqrt{16 - 2x}$

6.  $g(x) = \frac{5x - 15}{3x + 7}$

7. Probar formalmente que:

- Si  $f$  es creciente, entonces  $f^{-1}$  es creciente.
- Si  $f$  es decreciente, entonces  $f^{-1}$  es decreciente



## SECCION 1.4

### FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

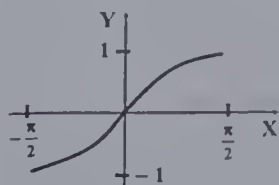
Las funciones trigonométricas no son inyectivas. Restringiremos el dominio de cada una de ellas para conseguir esta propiedad y, de este modo, lograr una función inversa. Estas funciones restringidas y sus respectivas inversas las presentamos a continuación.

#### FUNCION SENO INVERSA O ARCOSEN

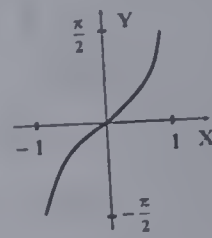
$$\text{sen} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\text{sen}^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = \text{sen}^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \text{sen } y \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$y = \text{sen } x$$



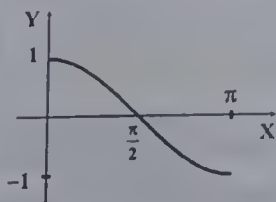
$$y = \text{sen}^{-1} x$$

#### FUNCION COSENO INVERSA O ARCCOS

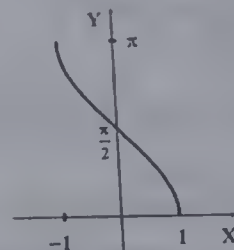
$$\text{cos} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\text{cos}^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$y = \text{cos}^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \text{cos } y, \quad 0 \leq y \leq \pi$$



$$y = \text{cos } x$$



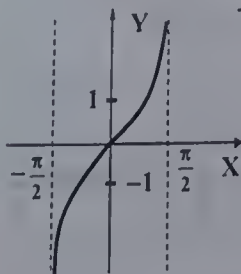
$$y = \text{cos}^{-1} x$$

#### FUNCION TANGENTE INVERSA O ARCTAN

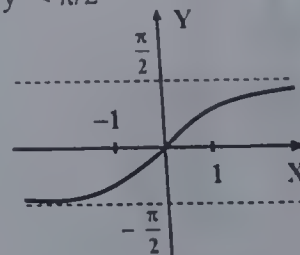
$$\text{tan} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{tan}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \text{tan}^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \text{tan } y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$



$$y = \text{tan } x$$



$$y = \text{tan}^{-1} x$$

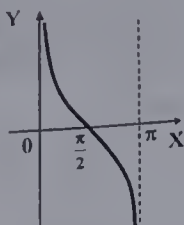


### FUNCION COTANGENTE INVERSA O ARCCOT

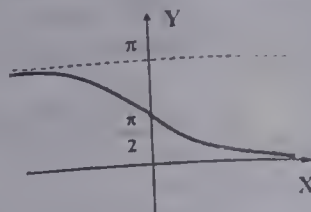
$$\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = \cot^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \cot y, \quad 0 < y < \pi$$

$$\cot^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$



$$y = \cot x$$

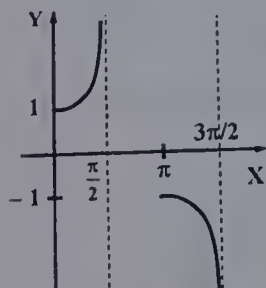


$$y = \cot^{-1} x$$

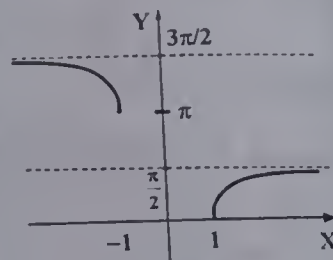
### FUNCION SECANTE INVERSA O ARCSEC

$$\sec: [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2) \rightarrow \mathbb{R} - (-1, 1). \quad \sec^{-1}: \mathbb{R} - (-1, 1) \rightarrow [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$$

$$y = \sec^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \sec y, \quad 0 \leq y < \pi/2 \quad \text{ó} \quad \pi \leq y < 3\pi/2$$



$$y = \sec x$$

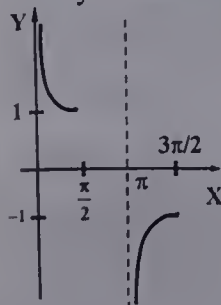


$$y = \sec^{-1} x$$

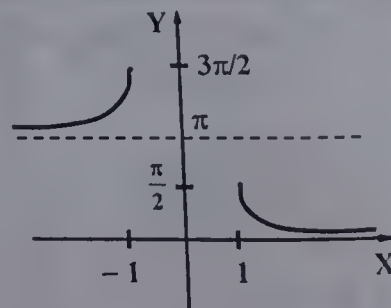
### LA FUNCION COSECANTE INVERSA O ARCCOSEC

$$\operatorname{cosec}: (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2] \rightarrow \mathbb{R} - (-1, 1). \quad \operatorname{cosec}^{-1}: \mathbb{R} - (-1, 1) \rightarrow (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$$

$$y = \operatorname{cosec}^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{cosec} y, \quad 0 < y \leq \pi/2 \quad \text{ó} \quad \pi < y \leq 3\pi/2$$



$$y = \operatorname{cosec} x$$



$$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$$

**OBSERVACION.** Algunos autores restringen la secante a  $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$  en lugar de  $[0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$ , como lo hemos hecho nosotros. La escogencia nuestra tiene la ventaja que simplifica la fórmula de la derivada de la función  $y = \sec^{-1} x$ , ya que evita la aparición de un valor absoluto. Sucede un caso similar para la cosecante.

**EJEMPLO 1.**

a.  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ , ya que  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  y  $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$

b.  $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ , ya que  $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  y  $0 \leq \frac{3\pi}{4} \leq \pi$

c.  $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ , ya que  $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$  y  $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

d.  $\cot^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$ , ya que  $\cot\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$  y  $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6} < \pi$

e.  $\operatorname{cosec}^{-1}(2) = \frac{\pi}{6}$ , ya que  $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$  y  $0 < \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$

**PROBLEMAS RESUELTOS 1.4**

**PROBLEMA 1.** Hallar a.  $\sin\left(\tan^{-1}(1/2)\right)$  b.  $\tan\left(\sec^{-1}(-5/3)\right)$

**Solución**

a. Sea  $\alpha = \tan^{-1}(1/2)$ . Luego,  $\tan \alpha = 1/2$ , y  $0 < \alpha < \pi/2$ .

Con estos valores, tomando en cuenta la definición de  $\tan \alpha$ , construimos el triángulo rectángulo adjunto.

Vemos que:

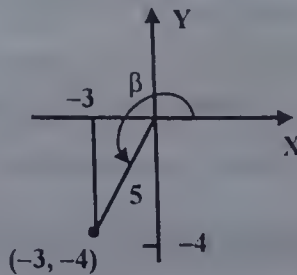
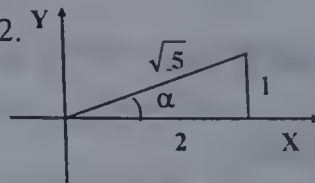
$$\sin\left(\tan^{-1}(1/2)\right) = \sin \alpha = 1/\sqrt{5}$$

b. Sea  $\beta = \sec^{-1}(-5/3)$ .

Luego,  $\sec \beta = -5/3$  y  $\pi \leq \beta < 3\pi/2$ .

Ahora,

$$\tan\left(\sec^{-1}(-5/3)\right) = \tan \beta = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$



**PROBLEMA 2.** Si  $-1 \leq x \leq 1$ , expresar en términos de  $x$ :

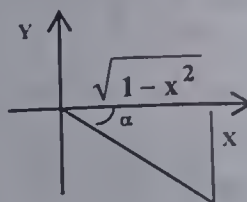
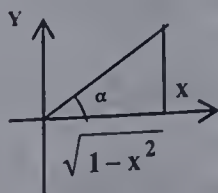
a.  $\cot(\sin^{-1}x)$

b.  $\sec(\sin^{-1}x)$

**Solución**

Sea  $\alpha = \sin^{-1}x$ . Luego,  $\sin \alpha = x$ , donde  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$

Observando que  $\sin \alpha = \frac{x}{1}$ , construimos el primer triángulo rectángulo si  $x > 0$  ó el segundo, si  $x < 0$ . Allí,  $x$  corresponde al cateto opuesto y 1 a la hipotenusa. El otro cateto, aplicando el teorema de Pitágoras, es  $\pm \sqrt{1-x^2}$ . De estos dos valores, tomamos el positivo:  $\sqrt{1-x^2}$ , porque esta raíz corresponde a  $\cos \alpha$  y  $\cos \alpha > 0$  cuando  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ .



Ahora,

a.  $\cot(\sin^{-1}x) = \cot \alpha = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ , si  $x \neq 0$  ó  $\cot(\sin^{-1}x) = 0$ , si  $x = 0$

b.  $\sec(\sin^{-1}x) = \sec \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**PROBLEMA 3.** Hallar, sin calculadora, el valor de

$$\sin[\cot^{-1}(-5/12) - \cos^{-1}(3/5)]$$

**Solución**

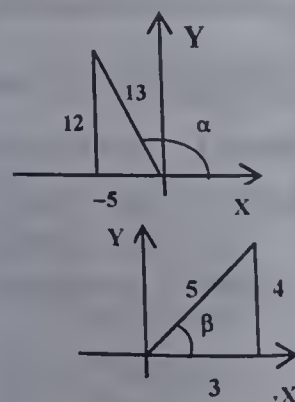
Sea  $\alpha = \cot^{-1}(-5/12)$ . Luego,  
 $\cot \alpha = -5/12$  y  $\pi/2 < \alpha < \pi$

Sea  $\beta = \cos^{-1}(3/5)$ . Luego,  
 $\cos \beta = 3/5$  y  $0 < \beta < \pi/2$

Ahora,

$$\sin[\cot^{-1}(-5/12) - \cos^{-1}(3/5)]$$

$$= \sin[\alpha - \beta] = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{-5}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{56}{65}$$



**PROBLEMA 4.** Resolver la ecuación  $\tan^{-1}(2x - 3) = 1$

**Solución**

$$\tan^{-1}(2x - 3) = 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = \tan(1)$$

Mediante una calculadora hallamos que  $\tan(1) = 1,5574077$ . Luego,

$$2x - 3 = 1,5574077 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(1,5574077 + 3) = 2,787038$$

### PROBLEMAS PROPUESTOS 1.4

En los problemas del 1 al 9 evaluar las expresiones indicadas sin usar calculadora.

1.  $\sin^{-1}(\sqrt{3}/2)$
2.  $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$
3.  $\cos^{-1}(-1)$
4.  $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$
5.  $\cot^{-1}(-1)$
6.  $\operatorname{cosec}^{-1}(-2)$
7. Dado  $y = \sin^{-1}(1/3)$  hallar el valor exacto de
  - a.  $\cos y$
  - b.  $\tan y$
  - c.  $\cot y$
  - d.  $\sec y$
  - e.  $\operatorname{cosec} y$
8. Dado  $y = \sec^{-1}(\sqrt{5}/2)$ , hallar el valor exacto de
  - a.  $\sin y$
  - b.  $\cos y$
  - c.  $\tan y$
  - d.  $\cot y$
  - e.  $\operatorname{cosec} y$
9. Dada  $y = \tan^{-1}(-3)$  hallar el valor exacto de
  - a.  $\sin y$
  - b.  $\cos y$
  - c.  $\cot y$
  - d.  $\sec y$
  - e.  $\operatorname{cosec} y$

En los problemas del 10 al 13 hallar el valor exacto de la expresión indicada.

10.  $\sin(\cos^{-1}(\sqrt{3}/2))$
11.  $\operatorname{cosec}(\tan^{-1}(-2))$
12.  $\sin(\tan^{-1}(-3/4))$
13.  $\tan(\sin^{-1}(-3/4))$

En los problemas 14 y 15 hallar el valor exacto de la expresión indicada

14.  $\sin^{-1}(\cos(-\pi/6))$
15.  $\tan^{-1}(\tan(4\pi/3))$

En los problemas del 16 al 19 hallar el valor exacto de la expresión indicada.

16.  $\cos(\sin^{-1}(1/3) + \tan^{-1}(1/3))$
17.  $\sin(2\cos(1/3))$
18.  $\tan(2\sin^{-1}(-\sqrt{3}/2))$
19.  $\cos((1/2)\sin^{-1}(5/13))$

En los problemas del 20 al 23 hallar las expresiones algebraicas correspondientes

20.  $\sin(\tan^{-1}(x))$
21.  $\tan(\sin^{-1}(x))$
22.  $\sin(\cos^{-1}(x/2))$
23.  $\cos((1/2)\cos^{-1}(x))$

Resolver las siguientes ecuaciones:



$$24. \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$25. \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{2x} = \cos^{-1} x$$

$$26. \tan^2 x + 9 \tan x - 12 = 0 \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

## SECCION 1.5

### FUNCIONES EXPONENCIALES

#### LEYES DE LOS EXPONENTES

Recordemos que el conjunto de los números reales está conformado por la unión de dos conjuntos disjuntos: El conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales. Un número real es racional si y sólo si éste tiene una expresión decimal periódica. En cambio, un número real es irracional si y sólo si éste tiene una expresión decimal infinita no periódica.

Queremos definir  $a^x$ , donde  $a$  es un número real positivo y  $x$  es cualquier número real. Para  $x$  racional, la situación no es complicada. La dificultad aparece cuando  $x$  es irracional. Aquí tenemos que recurrir al concepto de límite, pero este es un concepto que todavía no se ha estudiado. Sin embargo, trataremos de presentar una presentación intuitiva. Veamos, en primer lugar, el caso de  $a^x$ , cuando  $x$  es un racional.

Sea  $a$  un número real positivo y  $x$  un número irracional.

1. Si  $x = n$ , donde  $n$  es un entero positivo, entonces

$$a^x = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

2. Si  $x = 0$ ,  $a^0 = 1$

3. Si  $x = -n$ ,  $n$  es un entero positivo, entonces  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

4. Si  $x = m/n$ , donde  $m$  y  $n$  son enteros positivos, entonces

$$a^x = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

#### EJEMPLO 1.

a.  $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

b.  $4^0 = 1$

c.  $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

d.  $4^{5/2} = \left(4^{1/2}\right)^5 = \left(\sqrt{4}\right)^5 = (2)^5 = 32$

Ahora veamos el significado de  $a^x$  cuando  $x$  es irracional. Lo hacemos mediante el caso particular de  $2^\pi$ . El número  $\pi$  es uno de los números irracionales más conocidos, que apareció en la Geometría, en el estudio de la circunferencia.

El número  $\pi$  tiene un desarrollo decimal infinito no periódico. Sus 30 primeras cifras son:

$$\pi = 3,141596253589793238462643383279 \dots$$

Considerando esta expansión decimal de  $\pi$  construimos las dos siguientes sucesiones de números racionales:

$$1) 3,1 \quad 3,14 \quad 3,141 \quad 3,1415 \quad \dots \quad y \quad 2) \quad 3,2, \quad 3,15 \quad 3,142 \quad 3,1416 \dots$$

Los términos de la primera sucesión se aproximan a  $\pi$  por la izquierda (menores que  $\pi$ ). Los términos de la segunda sucesión se aproximan a  $\pi$  por la derecha (mayores que  $\pi$ ).

Ahora, las sucesiones anteriores, permiten aproximarnos a  $2^\pi$  por la izquierda y por la derecha, con las siguientes potencias racionales:

$$\begin{aligned} 3,1 < \pi < 3,2 &\Rightarrow 2^{3,1} < 2^\pi < 2^{3,2} \\ 3,14 < \pi < 3,15 &\Rightarrow 2^{3,14} < 2^\pi < 2^{3,15} \\ 3,141 < \pi < 3,142 &\Rightarrow 2^{3,141} < 2^\pi < 2^{3,142} \\ 3,1415 < \pi < 3,1416 &\Rightarrow 2^{3,1415} < 2^\pi < 2^{3,1416} \end{aligned}$$

Se prueba, haciendo uso de las propiedades básicas de los números reales, que existe un único número real que es mayor que todos los números:

$$2^{3,1} < 2^{3,14} < 2^{3,141} < 2^{3,1415} \dots$$

y menor que los números:

$$2^{3,2} < 2^{3,15} < 2^{3,142} < 2^{3,1416} \dots$$

A este único real se lo denota por  $2^\pi$ .

Algunas calculadoras nos dicen que

$$2^\pi = 8,824977827$$

Este proceso anterior que nos permitió definir a  $2^\pi$  podemos repetirlo para definir  $a^x$ , donde  $a$  es cualquier número real positivo y  $x$  cualquier número irracional.

El siguiente teorema resume las propiedades de los exponentes. La demostración de estas propiedades, para el caso de exponente racional, no es de gran dificultad. Sin embargo, para el caso de exponentes irracionales, la situación no es simple. Por esta razón, al teorema sólo lo enunciamos, omitiendo la demostración.

### TEOREMA 1.1

#### Leyes de los Exponentes

Sean  $a$  y  $b$  números reales positivos, y sean  $x$  e  $y$  números reales cualesquiera. Se cumple que:

1.  $a^0 = 1$

2.  $a^1 = a$

3.  $a^x a^y = a^{x+y}$

4.  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

5.  $(a^x)^y = a^{xy}$

6.  $(ab)^x = a^x b^x$

7.  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

8.  $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

**EJEMPLO 2.**

a.  $\frac{3^{3/2}}{\sqrt{3}} = \frac{3^{3/2}}{3^{1/2}} = 3^{(3/2) - (1/2)} = 3^{2/2} = 3$

b.  $(3^{2/3} \cdot 3^{1/6})^6 = 3^{(2/3)6} \cdot 3^{(1/6)6} = 3^4 \cdot 3^1 = 3^{4+1} = 3^5 = 243$

**LAS FUNCIONES EXPONENCIALES**

**DEFINICION.**

Sea  $a$  un número real tal que  $a > 0$  y  $a \neq 1$ . La función exponencial con base  $a$  es la función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

$$f(x) = a^x$$

**EJEMPLO 3.**

A continuación mostramos los gráficos de:

1.  $y = 2^x$

2.  $y = 5^x$

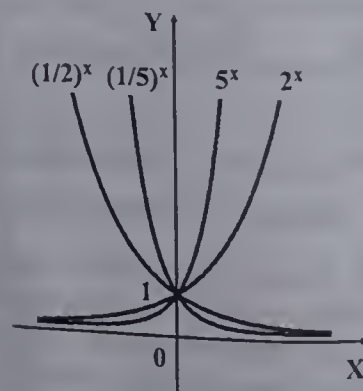
3.  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$

4.  $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x = 5^{-x}$

Todas las gráficas pasan por el punto  $(0, 1)$ , debido a que  $a^0 = 1$ .

Si  $a > 1$ , a medida que la  $a$  aumenta, la función  $f(x) = a^x$  crece más rápidamente.

En la definición de la función exponencial, se ha eliminado la base  $a = 1$ , ya que en este caso,  $f(x) = 1^x = 1$ , es la recta horizontal  $y = 1$ , la cual tiene un comportamiento muy simple y muy distinto a los casos cuando  $a \neq 1$ .

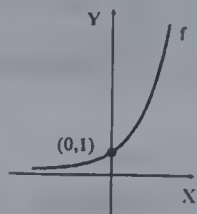




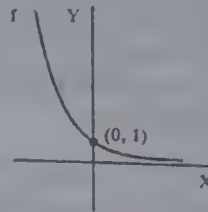
### PROPIEDADES DE LA FUNCION EXPONENCIAL

La función exponencial  $f(x) = a^x$  tiene las siguientes propiedades:

1. Es creciente si  $a > 1$  y es decreciente si  $0 < a < 1$ .



$f(x) = a^x$ , donde  $a > 1$



$f(x) = a^x$ , donde  $a < 1$

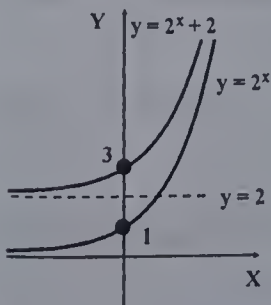
2. Dominio:  $\mathbb{R}$ , rango:  $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ .
3. Es inyectiva
4. La gráfica de  $f$  corta al eje  $Y$  en  $(0, 1)$ , ya que  $a^0 = 1$ .

**EJEMPLO 4.** Mediante la técnica de traslación y reflexión, y teniendo en cuenta el gráfico  $f(x) = 2^x$ , dada en el ejemplo 3, esbozar el gráfico de:

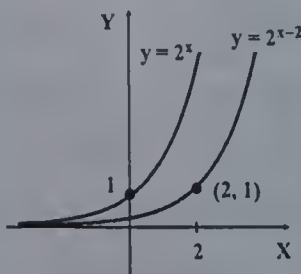
1.  $g(x) = 2^x + 2$
2.  $h(x) = 2^{x-2}$
3.  $q(x) = -2^{-x}$

**Solución**

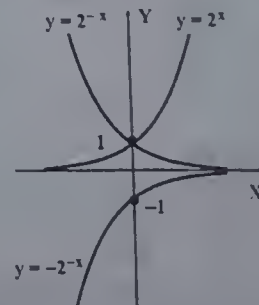
1. Vemos que  $g(x) = 2^x + 2 = f(x) + 2$ . Luego, el gráfico de  $g(x) = 2^x + 2$  se obtiene trasladando verticalmente el gráfico de  $f(x) = 2^x$  dos unidades hacia arriba.
2. Vemos que  $h(x) = 2^{x-2} = f(x-2)$ . Luego, el gráfico de  $h(x) = 2^{x-2}$  se obtiene trasladando horizontalmente 2 unidades hacia la derecha el gráfico de  $f(x) = 2^x$ .
3. Vemos que  $q(x) = -2^{-x} = -f(-x)$ . Luego, el gráfico de  $q(x)$  se obtiene en dos pasos. Se refleja la gráfica de  $f$  en el eje  $Y$ . Luego, este se refleja en el eje  $X$ .



$g(x) = 2^x + 2$



$h(x) = 2^{x-2}$



$q(x) = -2^{-x}$



EL NUMERO  $e$ 

Se demuestra que los números irracionales son más abundantes que los racionales. Sin duda, este es un resultado que choca con nuestra intuición. Esto se debe a que los irracionales son poco conocidos. Existen dos números irracionales famosos: El número  $\pi$  y el número  $e$ . El primero juega un papel fundamental en la Geometría y en la Trigonometría y el segundo, en el Cálculo. A esta altura, sin contar en nuestro haber con el concepto límite, no podemos dar una formulación precisa del número  $e$ . Por ahora sólo diremos que un número irracional cuyas 21 primeras cifras de su expresión decimal, son

$$e \approx 2,71828182845904523536 \dots$$

Este número, de complicada definición, simplifica muchas fórmulas del Cálculo. El nombre de  $e$  para este número fue dado por Leonardo Euler, probablemente por ser la primera letra de la palabra exponencial.

## LA FUNCION EXPONENCIAL NATURAL

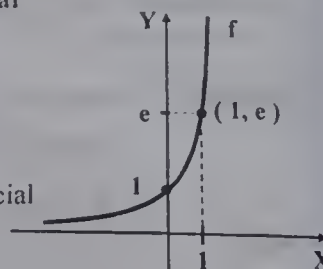
**DEFINICION.**

Se llama función exponencial natural a la función exponencial con base el número  $e$ . Esto es, a la función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = e^x$$

Como  $e > 1$ , la función exponencial natural es creciente.



## PROBLEMAS RESUELTOS 1.5

**PROBLEMA 1.**

Simplificar las siguientes expresiones:

a.  $\frac{e^{3/2}}{\sqrt{e}}$

b.  $\left[ \frac{1}{8} (8^{2/3}) \right]^3$

c.  $\frac{(9^{4/5})^{5/8}}{\left( \frac{8}{27} \right)^{2/3}}$

**Solución**

a.  $\frac{e^{3/2}}{\sqrt{e}} = \frac{e^{3/2}}{e^{1/2}} = e^{3/2 - 1/2} = e^{2/2} = e$

b.  $\left[ \frac{1}{8} (8^{2/3}) \right]^3 = \left( \frac{1}{8} \right)^3 (8^{2/3})^3 = \left( \frac{1^3}{8^3} \right) (8^2) = \frac{8^2}{8^3} = \frac{1}{8}$

$$c. \frac{(9^{4/5})^{5/8}}{(\frac{8}{27})^{2/3}} = \frac{9^{20/40}}{(\frac{2^3}{3^3})^{2/3}} = \frac{9^{1/2}}{\frac{2^{(3)(2/3)}}{3^{(3)(2/3)}}} = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{3(3^2)}{2^2} = \frac{27}{4}$$

**PROBLEMA 2.** Si  $h(x) = 3^{5x}$ , hallar  $x$  tal que  $h(x) = 81$

**Solución**

Como  $81 = 3^4$ , debemos hallar el  $x$  tal que  $3^{5x} = 3^4$ . Igualando los exponentes tenemos:

$$5x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

**PROBLEMA 3.** Si  $f(x) = e^{kx}$  y  $f(1) = 3$ , hallar  $f(5)$

**Solución**

Si  $f(1) = 3$ , entonces  $e^k = 3$ . Luego  $f(5) = e^{k(5)} = (e^k)^5 = 3^5 = 243$

**PROBLEMA 4.** Te ofrecen un trabajo que dura exactamente un mes (30 días).

Te dan a elegir entre dos formas de pago:

- 10.000.000 de Bs. al final del mes.
- 1 céntimo de bolívar por el primer día, 2 céntimos por el segundo, 4 céntimos por el tercero y, en general,  $2^{n-1}$  céntimos por el día  $n$ .

¿Cuál de las dos formas de pago te beneficia más?

**Solución**

Te sorprenderá saber que la segunda forma conviene más. En efecto:

El primer día recibe 1 céntimo y el último día ( $n = 30$ ) se recibe  $2^{30-1} = 2^{29}$  céntimos. Si  $S$  la suma total de todas los céntimos que se reciben, se tiene:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{29} \quad (1)$$

Para hallar esta suma  $S$ , multiplicamos la igualdad anterior por la razón 2:

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{30} \quad (2)$$

Restando la igualdad (1) de la (2) obtenemos:

$$S = 2^{30} - 2 = 1.073.741.823 \text{ céntimos} = 10.737.418,22 \text{ Bs.}$$

En consecuencia, conviene más la segunda forma de pago.

## PROBLEMAS PROPUESTOS 1.5

En los ejercicios del 1 al 7 calcular el valor de las expresiones dadas:

20.

26.

27.

1.  $(81)^{1/4}$       2.  $8^{4/3}$       3.  $(25)^{3/2}$       4.  $(25)^{-3}$   
 5.  $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2/3}$       6.  $\left(\frac{27}{16}\right)^{-1/2}$       7.  $(0,01)^{-1}$

En los ejercicios del 8 al 13 simplificar las expresiones dadas:

28.

8.  $\left(\frac{e^7}{e^3}\right)^{-1}$       9.  $\frac{3^3 3^5}{(3^4)^3}$       10.  $\frac{5^{1/2} (5^{1/2})^5}{5^4}$   
 11.  $\frac{2^{-3} 2^5}{(2^4)^{-3}}$       12.  $\frac{(2^4)^{1/3}}{16 (2^{7/3})}$       13.  $\frac{(2^{1/3} 3^{2/3})^3}{3^{5/2} 3^{-1/2}}$

En los ejercicios del 14 al 19 resolver las ecuaciones dadas.

29.

30.

14.  $2^{2x-1} = 8$       15.  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 27$       16.  $8\sqrt[3]{2} = 4^x$   
 17.  $(3^{2x} 3^2)^4 = 3$       18.  $e^{-6x+1} = e^3$       19.  $e^{x^2-2x} = e^3$

En los ejercicios del 20 al 28 esbozar los gráficos de las funciones dadas, todos ellos, excepto el 25 y 27, use las técnicas de traslación y reflexión.

31.

20.  $y = e^{x+2}$       21.  $y = -2e^x + 1$       22.  $y = e^{-x}$   
 23.  $y = e^{-x} + 2$       24.  $y = 2 - e^{-x}$       25.  $y = 3^x$   
 26.  $y = 3^{-x+2}$       27.  $y = 4^x$       28.  $y = -4^{-x-1}$

29. Si  $g(x) = Ae^{-kx}$ ,  $g(0) = 9$  y  $g(2) = 5$ , hallar  $g(6)$ .

30. Si  $h(x) = 30 - Pe^{-kx}$ ,  $h(0) = 10$  y  $h(3) = -30$ , hallar  $h(12)$ .

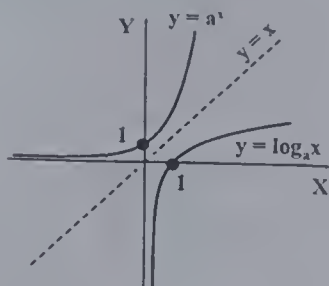
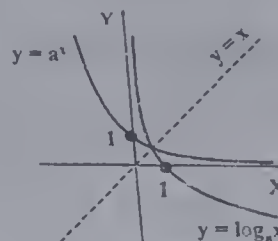
## SECCION 1.6

## FUNCIONES LOGARITMICAS

**DEFINICION.** Sea  $a > 0$  y  $a \neq 1$ . Se llama función logaritmo de base  $a$ , y se denota por  $\log_a$ , a la función inversa de la función exponencial

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = a^x,$$

$$\text{Esto es, } \log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \log_a = f^{-1}$$


 $a > 1$ 

 $0 < a < 1$ 

Por ser  $y = \log_a(x)$  la función inversa de  $y = a^x$  se tiene que:

$$(1) \quad a^{\log_a(x)} = x \quad \text{y} \quad (2) \quad \log_a(a^x) = x$$

Las propiedades (1) y (2) equivalen a la siguiente proposición:

$$(3) \quad \log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Esta última equivalencia nos dice que  $\log_a(x)$  es el exponente  $y$  al cual debe elevar la base  $a$  para obtener el número  $x$ .

Como  $a^1 = a$  y  $a^0 = 1$ , se tiene que:

$$(4) \quad \log_a(a) = 1 \quad \text{y} \quad (5) \quad \log_a(1) = 0$$

Muchas veces, cuando no hay confusión, escribiremos  $y = \log_a x$  (sin los paréntesis) en lugar de  $\log_a(x)$ .

**EJEMPLO 1**

$$a. \quad \log_4 64 = \log_4(4^3) = 3$$

$$b. \quad \log_7 \sqrt{7} = \log_7(7^{1/2}) = \frac{1}{2}$$

$$c. \quad \log_5\left(\frac{1}{5}\right) = \log_5(5^{-1}) = -1$$

$$d. \quad \log_{10} 0,001 = \log_{10} \frac{1}{1.000} = \log_{10} 10^{-3} = -3$$



**EJEMPLO 2** Resolver las siguientes ecuaciones:

a.  $2^{8x-1} = 64$

b.  $2 \log_9(4x) = 1$

**Solución**a. Aplicamos  $\log_2$  a ambos miembros:

$$\log_2(2^{8x-1}) = \log_2 64 \Rightarrow \log_2(2^{8x-1}) = \log_2(2^6) \Rightarrow$$

$$(8x-1)\log_2 2 = 6\log_2 2 \Rightarrow 8x-1=6 \Rightarrow x = \frac{7}{8}$$

$$\text{b. } 2 \log_9(4x) = 1 \Rightarrow \log_9(4x) = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x = 9^{1/2} \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

**PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARITMO**La función logaritmo  $y = \log_a x$  tiene las siguientes propiedades:

1. Es creciente si  $a > 1$  y decreciente si  $a < 1$ .
2. Dominio =  $\mathbb{R}^+$ , rango =  $\mathbb{R}$ .
3. Es biyectiva.
4. La gráfica de  $y = \log_a x$  corta al eje X en (1, 0). No corta al eje Y.

**TEOREMA 1.2** Leyes de los LogaritmosSi  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $u > 0$ ,  $v > 0$  y  $n$  es un real, entonces

1.  $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$  (Logaritmo de un producto)

2.  $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$  (Logaritmo de un cociente)

3.  $\log_a u^n = n \log_a u$  (Logaritmo de una potencia)

**Demostración**1. Si  $x = \log_a u$  e  $y = \log_a v$ , entonces

$$u = a^x, v = a^y \quad y \quad uv = a^x a^y = a^{x+y}$$

Aplicando  $\log_a$  a la última igualdad y usando la propiedad (2) de la definición de la función logaritmo:

$$\log_a(uv) = \log_a(a^{x+y}) = x+y = \log_a u + \log_a v$$

Las pruebas de 2 y 3 son similares a la dada para 1, y se dejan como ejercicios.

**EJEMPLO 3.**

Sean  $x, y, z$  números reales positivos. Expresar en términos de los logaritmos de  $x, y, z$  las siguientes expresiones:

$$\text{i. } \log_a \left( \frac{x^4 \sqrt{z}}{y^3} \right)$$

$$\text{ii. } \log_a \sqrt[7]{\frac{x^2}{y^3 z^4}}$$

**Solución**

$$\begin{aligned} \text{i. } \log_a \left( \frac{x^4 \sqrt{z}}{y^3} \right) &= \log_a \left( \frac{x^4 z^{1/2}}{y^3} \right) \\ &= \log_a (x^4 z^{1/2}) - \log_a y^3 && (\text{por 2}) \\ &= \log_a x^4 + \log_a z^{1/2} - \log_a y^3 && (\text{por 1}) \\ &= 4 \log_a x + \frac{1}{2} \log_a z - 3 \log_a y && (\text{por 3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \log_a \sqrt[7]{\frac{x^2}{y^3 z^4}} &= \log_a \left( \frac{x^2}{y^3 z^4} \right)^{1/7} \\ &= \frac{1}{7} \log_a \left( \frac{x^2}{y^3 z^4} \right) && (\text{por 3}) \\ &= \frac{1}{7} \left[ \log_a x^2 - \log_a (y^3 z^4) \right] && (\text{por 2}) \\ &= \frac{1}{7} \left[ \log_a x^2 - (\log_a y^3 + \log_a z^4) \right] && (\text{por 1}) \\ &= \frac{2}{7} \log_a x - \frac{3}{7} \log_a y - \frac{4}{7} \log_a z && (\text{por 3}) \end{aligned}$$

### LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

La función logaritmo natural es la función logaritmo con base  $e$ . A esta función se lo denota por  $y = \ln x$ . O sea,

$$\ln x = \log_e x$$

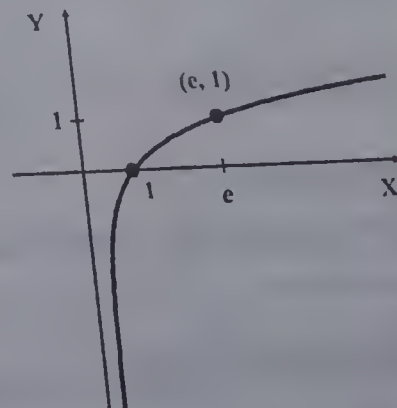
La función  $y = \ln x$  es la inversa de la función exponencial  $y = e^x$ . Por lo tanto:

$$(1) \quad e^{\ln x} = x \quad y \quad (2) \quad \ln e^x = x$$

o, equivalentemente,

$$(3) \quad y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$$

Como  $e^1 = e$ , tenemos que  $\ln e = 1$



**EJEMPLO 4.**

Resolver la ecuación  $3^{2x+1} = 5^{3x-1}$

**Solución**

A ambos miembros de la ecuación aplicamos  $\ln$ :

$$\begin{aligned} \ln 3^{2x+1} &= \ln 5^{3x-1} \Rightarrow (2x+1) \ln 3 = (3x-1) \ln 5 \Rightarrow \\ 2x \ln 3 + \ln 3 &= 3x \ln 5 - \ln 5 \Rightarrow 2x \ln 3 - 3x \ln 5 = -\ln 5 - \ln 3 \\ &\Rightarrow x(2 \ln 3 - 3 \ln 5) = -(\ln 5 + \ln 3) \\ &\Rightarrow x = -\frac{\ln 5 + \ln 3}{2 \ln 3 - 3 \ln 5} \approx 1,03 \end{aligned}$$

**OBSERVACION.**

Los logaritmos más usuales son los naturales (base  $e$ ) y los decimales (base 10). Tratándose de los logaritmos decimales, es común omitir la base y escribir, simplemente,  $\log x$  en lugar de  $\log_{10} x$ .

### CAMBIO DE BASE LOGARITMICA Y EXPONENCIAL

La siguiente igualdad nos permite expresar una función logarítmica de cualquier base en términos de la función logaritmo natural.

**TEOREMA 1.3**

**Cambio de Base Logarítmica.**

Si  $x > 0$  entonces

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} y = \log_a x &\Rightarrow a^y = x \Rightarrow \ln a^y = \ln x \Rightarrow y \ln a = \ln x \\ &\Rightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \end{aligned}$$

**COROLARIO.**

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

**Demostración**

En la fórmula del teorema tomar  $x = e$ . Considerar que  $\ln e = 1$ .

**EJEMPLO 5.**

Hallar: a.  $\log_5 e$

b.  $\log_4 19$

**Solución**

$$\Rightarrow$$

$$-\ln 5 - \ln 3$$

$$-(\ln 5 + \ln 3)$$

$$1,03$$

naturales (base e) y los  
los logaritmos decimales,  
simplemente,  $\log x$  en

NENCIAL

garítmica de cualquier

a. De acuerdo al corolario:

$$\log_5 e = \frac{1}{\ln 5} = \frac{1}{1,6094379} = 0,6213349$$

b. De acuerdo al teorema anterior:

$$\log_4 19 = \frac{\ln 19}{\ln 4} = \frac{1,2788}{0,6021} = 2,124$$

**TEOREMA 1.4** Cambio de base Exponencial.

Si  $a > 0$  y  $a \neq 1$ , entonces

$$a^x = e^{x \ln a}$$

**Demostración**

Sabemos que  $a = e^{\ln a}$ . Luego,  $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$

**PROBLEMAS RESUELTOS 1.6**

**PROBLEMA 1.** Resolver las siguientes ecuaciones:

a.  $\log_{27} 4x = 2/3$

b.  $3^{2x-1} = 81$

**Solución**

a.  $\log_{27} 4x = 2/3 \Rightarrow 4x = 27^{2/3} \Rightarrow 4x = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9 \Rightarrow x = 9/4$

b. Tomando  $\log_3$  a ambos lados de la ecuación:

$$\log_3 3^{2x-1} = \log_3 81 \Rightarrow 2x - 1 = \log_3 (3^4) \Rightarrow 2x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5/2$$

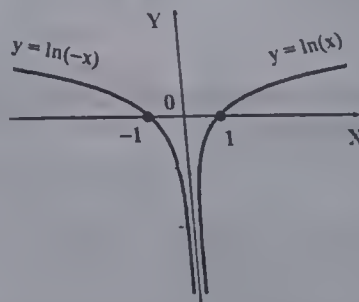
**PROBLEMA 2.** Graficar la función  $y = \ln |x|$ .

**Solución**

De la definición de  $|x|$  tenemos que:

$$y = \ln |x| = \begin{cases} \ln x, & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En consecuencia, el gráfico de  $y = \ln |x|$



se compone de dos gráficos: El de  $y = \ln x$ ,  $x > 0$  y el de  $y = \ln(-x)$ ,  $x < 0$ . Al primero lo conocemos y el segundo se obtiene del primero reflejándolo en el eje Y.



## PROBLEMAS PROPUESTOS 1.6

En los ejercicios del 1 al 8 calcular el valor de la expresión, sin usar tablas ni calculadora.

1.  $\log_2 \left( \frac{1}{64} \right)$

2.  $\log_{1/2} \left( \frac{1}{16} \right)$

3.  $\log_{1/3} (81)$

4.  $\log_{100} (0,1)$

5.  $e^{\ln 3}$

6.  $e^{2 \ln 3}$

7.  $e^{(\ln 3)/2}$

8.  $e^{3 \ln 2 - 2 \ln 3}$

En los ejercicios del 9 al 19, resolver la ecuación dada.

9.  $\log_x (25) = \frac{1}{2}$

10.  $\log_4 (x^2 - 6x) = 2$

11.  $\log x + \log (2x - 8) = 1$

12.  $-3 \ln x = a$

13.  $\frac{k}{20} - \ln x = 1$

14.  $4 \ln x = \frac{1}{2} \ln x + 7$

15.  $3 \ln (\ln x) = -12$

16.  $3e^{-1,2x} = 14$

17.  $3^{x-1} = e^3$

18.  $3^x 2^{3x} = 64$

19.  $(3^x)^2 = 16 \sqrt{2^x}$

En los problemas del 20 al 27 usar las técnicas de graficación (traslaciones y reflexiones) para bosquejar la gráfica de las funciones indicadas.

20.  $y = \ln (x - 2)$

21.  $y = \ln (-x)$

22.  $y = \ln (x + 3)$

23.  $y = 4 - \ln x$

24.  $y = 4 - \ln (x + 3)$

25.  $y = 2 - \ln |x|$

26.  $y = 3 + \log x$

27.  $y = 3 + \log (x + 3)$

En los problemas del 28 al 31 escribir la expresión indicada en términos de los logaritmos de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

28.  $\log \frac{a^2 b}{c}$

29.  $\log \frac{\sqrt{b}}{a^2 c^3}$

30.  $\ln \left( \frac{1}{a} \sqrt{\frac{c^3}{b}} \right)$

31.  $\ln \sqrt[5]{\frac{a^2}{bc^4}}$

En los problemas del 32 al 34 escribir la expresión dada como un solo logaritmo de coeficiente 1.

32.  $3 \ln x + \ln y - 2 \ln z$

33.  $2 \log a + \log b - 3 (\log z + \log x)$

34.  $\frac{3}{4} \ln a + 3 \ln b - \frac{3}{2} \ln c$

35. Expresar cada una de las siguientes funciones en la forma  $y = Ae^{kt}$ :

a.  $y = (5)^{3^{0,5t}}$

b.  $y = 6(1,04)^t$

presión, sin usar tablas ni

$$\log_{1/3} (81)$$

$$e^{2 \ln 3}$$

$$x + \log (2x - 8) = 1$$

$$\ln x = \frac{1}{2} \ln x + 7/$$

$$-1 = e^3$$

ción (traslaciones y

$$= \ln (x + 3)$$

$$= 2 - \ln |x|$$

n términos de los

$$\ln 5 \sqrt{\frac{a^2}{bc^4}}$$

solo logaritmo

$$+ \log x)$$

## SECCION 1.7

### APLICACIONES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Algunos fenómenos de las ciencias naturales, ciencias sociales y ciencias económicas son modelados mediante las funciones exponenciales o logarítmicas. Veamos algunos casos simples, como el crecimiento de poblaciones y decaimiento radioactivo. Más adelante, cuando tratemos el tema de ecuaciones diferenciales, se verán casos más complejos.

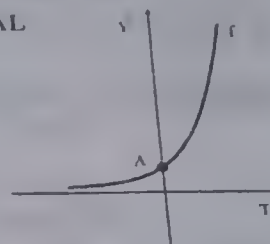
#### CRECIMIENTO ESPONENCIAL

Sea  $f(t)$  una función donde la variable independiente  $t$  representa al tiempo. Se dice que  $f(t)$  crece exponencialmente, si se cumple que:

$$f(t) = A a^{kt},$$

donde  $a > 1$  y  $A$  y  $k$  son constantes positivas.

Observar que  $f$  es creciente y que  $f(0) = A$ .



#### EJEMPLO 1.

Se sabe que una población de bacterias se triplica cada minuto. Se

inicia un cultivo con una población de 50 bacterias

a. Hallar la ecuación de crecimiento de la población

b. ¿Cuántas bacterias se tiene después de un cuarto de hora?

#### Solución

a. Se  $t$  el número de minutos transcurridos desde el inicio del cultivo.

Al inicio, cuando  $t = 0$ , se tiene:  $f(0) = 50$

Después de un minuto, se tiene:  $f(1) = f(1) = 50(3)$

Después de dos minutos, se tiene:  $f(2) = 50(3)(3) = 50(3^2)$

Después de tres minutos, se tiene:  $f(3) = 50(3^2)(3) = 50(3^3)$

En general, después de  $t$  minutos, se tiene:

$$f(t) = 50(3^t)$$

b. Después de un cuarto hora, o sea cuando  $t = 15$ , se tiene:

$$f(15) = 50(3^{15}) \approx 717.445.350 \text{ bacterias.}$$

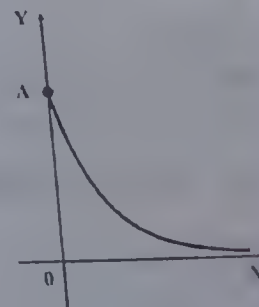
#### DECAIMIENTO EXPONENCIAL

Una cantidad  $f(t)$  decae exponencialmente si se cumple que:

$$f(t) = A a^{-kt}$$

donde  $a > 1$  y  $A$  y  $k$  son constantes positivas.

Se tiene que  $f(0) = A$  y  $f$  es decreciente.



Un fenómeno muy importante que cumple esta condición es la desintegración de un material radioactivo.

Los materiales radioactivos se caracterizan porque se desintegran (decaen) de manera espontánea para transformarse en otro elemento. Experimentalmente se ha comprobado que el decaimiento sigue un modelo exponencial. Si  $N(t)$  es el número de átomos de cierto isótopo radioactivo en un instante  $t$ , entonces

$$N(t) = N_0 e^{-kt}, \quad (1)$$

donde  $N_0 = N(0)$  es el número de átomos en el instante  $t = 0$  y  $k$  es una constante positiva, que depende únicamente del elemento radioactivo. Si  $k$  es grande, el material decae rápidamente. Si  $k$  es pequeño (cercana a 0), el material decae lentamente.

### EJEMPLO 2.

La cantidad  $Q(t)$  de un material radioactivo después de  $t$  años está dada por

$$Q(t) = A e^{-0,0004t}$$

Después de 2.000 años quedan 300 grs. ¿Cuántos gramos había inicialmente?

### Solución

Tenemos que:  $300 = Q(2.000) = A e^{-0,0004(2.000)} = A e^{-0,8} \Rightarrow$

$$A = \frac{300}{e^{-0,8}} = 300 e^{0,8} \approx 667,66 \text{ gramos.}$$

## DECAIMIENDO RADIOACTIVO Y VIDA MEDIA

La vida media de material radioactivo es el tiempo que tarda cualquier muestra del material en desintegrarse la mitad de ella. Así, se sabe que la vida media del Polonio 210, (un isótopo del Polonio) es de 140 días. Esto significa que, dada cualquier cantidad de esta sustancia, después de 140 días sólo se tiene la mitad de la cantidad inicial.

Aquí tenemos la vida media de algunos elementos radioactivos:

Uranio ( $U^{238}$ )	4.510.000.000 años
Plutonio ( $Pu^{230}$ )	24.360 años
Carbono 14 ( $C^{14}$ )	5.730 años
Radio ( $Ra^{226}$ )	1.620 años
Polonio ( $Po^{210}$ )	140 días.

Veamos cual es la relación entre la vida media y la constante  $k$  que aparece en la función de decaimiento de cierto material radioactivo,

Si  $\lambda$  la vida media del material radioactivo, transcurrido este tiempo  $\lambda$  debemos tener solamente la mitad de átomos iniciales, es decir,  $N(\lambda) = \frac{1}{2} N_0$ . En consecuencia:



$$N_0 e^{-k\lambda} = \frac{1}{2} N_0 \Rightarrow e^{-k\lambda} = 1/2 \Rightarrow -k\lambda = \ln(1/2) \Rightarrow -k\lambda = \ln 1 - \ln 2$$

$$\Rightarrow -k\lambda = -\ln 2 \Rightarrow k\lambda = \ln 2 \Rightarrow \lambda = (\ln 2)/k$$

Esto es,

$$(2) \quad \lambda = \frac{\ln 2}{k} \quad \text{ó} \quad (3) \quad k = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Si reemplazamos (3) en (1), tenemos la igualdad:

$$N(t) = N_0 e^{-(\ln 2/\lambda)t} \quad (4)$$

**EJEMPLO 3.**

Hallar la vida media del potasio  $^{42}\text{K}$  si este se desintegra de acuerdo a la fórmula

$$Q(t) = Q_0 e^{-0,0555t}, \text{ donde } t \text{ representa horas.}$$

**Solución**

Tenemos que  $k = 0,0555$ . Luego, la vida media es

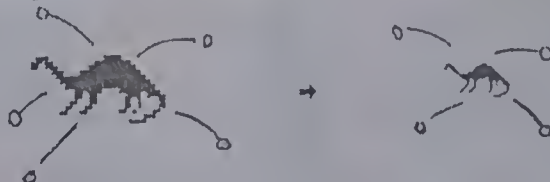
$$\lambda = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0,693147}{0,0555} \approx 12,489 \text{ horas}$$

**FECHADO CON CARBONO 14**

El carbono 14 ( $^{14}\text{C}$ ) es un isótopo radioactivo del carbono 12 ( $^{12}\text{C}$ ). Este último no es radioactivo. Los arqueólogos usan  $^{14}\text{C}$  para fechar la antigüedad de restos de materiales orgánicos, como huesos, madera, etc. La vida media del  $^{14}\text{C}$  es de 5.730 años. De acuerdo a (4) su ecuación de desintegración es:

$$N(t) = N_0 e^{-(\ln 2/5,730)t} \quad (5)$$

Por otro lado, el  $^{14}\text{C}$  se encuentra en la atmósfera en un porcentaje que ha permanecido esencialmente constante desde los inicios del planeta. Los seres vivos, al respirar, ingieren  $^{14}\text{C}$  en el mismo porcentaje que está en la atmósfera. Al morir un organismo, éste deja de ingerir este carbono y el que se encuentra ya metabolizado comienza a desintegrarse. La fecha de la muerte del organismo se determina midiendo la proporción de carbono remanente en los restos.



**EJEMPLO 4.**

Las pinturas rupestres de la Cueva de Altamira, España, es uno de los monumentos más famosos que ha dejado el hombre prehistórico europeo. Un estudio de cierto material orgánico utilizado en estas pinturas reveló que éste posee solamente el 29 % de  $^{14}\text{C}$  con respecto de una muestra del material actual. Calcular la edad de las pinturas.

**Solución**



Sea  $t$  la edad de las pinturas. Para resultados prácticos,  $t$  es también tiempo transcurrido desde que murió el organismo dueño del material orgánico. De acuerdo a la ecuación (4),

$$N(t) = N_0 e^{-(\ln 2 / 5.730) t}$$

Por otro lado,  $N_0$ , la cantidad de  $^{14}\text{C}$  que tubo el material orgánico cuando murió, es la misma que tiene la muestra actual. Luego,

$$\begin{aligned} N(t) = 0,29 N_0 &\Rightarrow N_0 e^{-(\ln 2 / 5.730) t} = 0,29 N_0 \Rightarrow e^{-(\ln 2 / 5.730) t} = 0,29 \\ &\Rightarrow \frac{\ln 2}{5.730} t = \ln 0,29 \Rightarrow t = 5.730 \frac{\ln 0,29}{\ln 2} \Rightarrow t \approx 10.233 \text{ años} \end{aligned}$$

### EDAD DEL UNIVERSO

De acuerdo a una teoría cosmológica, cuando el universo nació, en el momento de la "gran explosión" ("Big Bang"), existió la misma cantidad de los isótopos de uranio  $^{235}\text{U}$  y  $^{238}\text{U}$ . A partir de ese entonces la correlación entre estos elementos está cambiando, decayendo más rápidamente el  $^{235}\text{U}$ , ya que la vida media del  $^{235}\text{U}$  es más corta que la del  $^{238}\text{U}$ .

#### EJEMPLO 5.

Se ha determinado que en la actualidad existen 137,7 átomos de uranio  $^{238}\text{U}$  por cada átomo de uranio  $^{235}\text{U}$ . Se sabe que la vida media del  $^{238}\text{U}$  es 4,51 millardos de años y la del  $^{235}\text{U}$  es de 0,71 millardos de años. Calcular la edad del universo tomando en cuenta que al inicio de éste había igual cantidad de estos elementos.

#### Solución

Sea  $N_8(t)$  y  $N_5(t)$  el número de átomos de  $^{238}\text{U}$  y de  $^{235}\text{U}$  que existen  $t$  millardos de años después de la gran explosión. De acuerdo a (3), tenemos:

$$N_8(t) = N_0 e^{-k t} \quad \text{y} \quad N_5(t) = N_0 e^{-r t}, \quad (4)$$

donde  $N_0$  es el número de átomos, tanto de  $^{238}\text{U}$  como de  $^{235}\text{U}$ , que hubo inicialmente, y

$$k = (\ln 2) / 4,51 \quad \text{y} \quad r = (\ln 2) / 0,71$$

Como actualmente hay 137,7 átomos de  $^{238}\text{U}$  por cada átomo de  $^{235}\text{U}$ , tenemos:

$$137,7 = \frac{N_8(t)}{N_5(t)} = \frac{N_0 e^{-k t}}{N_0 e^{-r t}} = \frac{e^{-k t}}{e^{-r t}} = e^{(r - k) t} \Rightarrow$$

$$e^{(r - k) t} = 137,7 \Rightarrow (k - r) t = \ln 137,7 \Rightarrow t = \frac{\ln 137,7}{k - r} \Rightarrow$$

$$t = \frac{\ln 137,7}{\frac{\ln 2}{4,51} - \frac{\ln 2}{0,71}} \approx 5,987 \text{ millardos de años.}$$

Luego, la edad del universo es, redondeando, 6 mil millones de años.

Cálculos más recientes de dan al universo una edad de 15 mil millones de años.

### INTERES SIMPLE

Un capital colocado a **interés simple** permanece constante durante toda la operación. El interés ganado no genera interés. Es fácil deducir que: Un capital  $P$  colocado durante  $t$  años a **interés simple** y a una **tasa anual** de  $100r$  % produce un monto de:

$$M(t) = P(1 + rt) \quad (1)$$

### INTERES COMPUESTO

En un capital a **interés compuesto**, el interés ganado en cada periodo es agregado al capital, para ganar interés en el próximo periodo; o sea, el interés se capitaliza o se **compone** después de cada periodo. Este periodo puede ser de 1 año (anual), 6 meses (semestral: 2 periodos al año), 3 meses (trimestral: 4 periodos al año), 1 mes (mensual: 12 periodos al año), etc.

Además de la **tasa anual**, se tiene la **tasa periódica**, que es el tanto por ciento por periodo de capitalización. Si el año está dividido en  $n$  periodos iguales, entonces

$$\text{Tasa periódica} = \frac{\text{Tasa anual}}{n}$$

Así, si la tasa anual es de 24 % y el periodo de capitalización es de 3 meses (4 periodos al año) entonces la tasa periódica es de  $\frac{24}{4} \% = 6 \%$ .

Un capital  $P$  que se coloca durante  $t$  años a una tasa de  $100r$  % anual que se capitaliza (se compone)  $n$  veces al año produce un monto:

$$M(t) = P \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} \quad (2)$$

### INTERES COMPUESTO CONTINUO

Cuando el número  $n$  de periodos de capitalización crece ilimitadamente; es decir, cuando  $n \rightarrow +\infty$ , se obtiene el **interés compuesto continuo**. Aquí, la capitalización es instantánea y se la denomina **capitalización continua**.

Un capital  $P$  colocado durante  $t$  años a un interés anual de  $100r$  % que se capitaliza continuamente, produce un monto de:

$$M(t) = Pe^{rt} \quad (3)$$

Esta fórmula se obtiene de la anterior tomando límite. Esto lo veremos más adelante.

**EJEMPLO 6.**

Se deposita un capital de 1.000.000 Bs. en un banco que ofrece una tasa de 25 % anual. Calcular el monto después de 2 años si:

- El interés es simple.
- El interés es compuesto y se capitaliza mensualmente.
- El interés es compuesto y se capitaliza continuamente.

**Solución**

a. Se tiene:  $P = 1.000.000$ ,  $r = 0,25$  y  $t = 2$ . Reemplazando estos valores en la fórmula (1):

$$M(2) = 1.000.000(1 + 0,25(2)) = 1.500.000 \text{ Bs.}$$

b. Se tiene:  $P = 1.000.000$ ,  $r = 0,25$ ,  $n = 12$ ,  $t = 2$ . Reemplazando estos valores en la fórmula (2):

$$M(2) = 1.000.000\left(1 + \frac{0,25}{12}\right)^{24} = 1.640.273,33 \text{ Bs.}$$

c. Se tiene:  $P = 1.000.000$ ,  $r = 0,25$  y  $t = 2$ . Reemplazando estos valores en la fórmula (3):

$$M(2) = 1.000.000 e^{0,25(2)} = 1.648.721,27 \text{ Bs.}$$

**EJEMPLO 7.**

Se invierte cierta cantidad de dinero a una tasa anual de 20 %.

¿En qué tiempo se duplicará este dinero si el interés se compone:

- Trimestralmente?
- Continuamente?

**Solución**

Sea  $P$  el dinero invertido y  $\lambda$  el tiempo que se necesita para duplicar a  $P$ , o sea el tiempo necesario para obtener un monto de  $2P$ .

a. La fórmula (2) del monto del interés compuesto con  $n = 4$ ,  $r = 0,2$  y  $t = \lambda$  dice:

$$M(\lambda) = P\left(1 + \frac{0,2}{4}\right)^{4\lambda} = P(1,05)^{4\lambda}$$

Como este monto  $M(\lambda)$  debe ser  $2P$ , tenemos:

$$\begin{aligned} P(1,05)^{4\lambda} &= 2P \Rightarrow (1,05)^{4\lambda} = 2 \Rightarrow 4\lambda \ln(1,05) = \ln 2 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{\ln 2}{4 \ln(1,05)} \approx 3,552 \text{ años} \approx 3 \text{ años, 6 meses y 19 días} \end{aligned}$$

b. La fórmula (3) del monto del interés compuesto continuo con  $r = 0,2$  y  $t = \lambda$  dice:

$$Pe^{0,2\lambda} = 2P \Rightarrow e^{0,2\lambda} = 2 \Rightarrow 0,2\lambda = \ln 2 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{0,2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{0,2} \approx 3,466 \text{ años} \approx 3 \text{ años, 5 meses y 18 días.}$$



### PROBLEMAS PROPUESTOS 1.7

1. (Población). La población de una ciudad,  $t$  años después del año 2.000, es

$$P(t) = 60.000 e^{0,05t} \text{ habitantes}$$

- Calcular la población de la ciudad en el año 2.015.
- Hallar el porcentaje anual de crecimiento de la población.

2. (Depreciación). El valor de una maquinaria,  $t$  años después de comprada, es

$$V(t) = Ae^{-0,25t}$$

La máquina fue comprada hace 9 años por \$. 150.000

- ¿Cuál es su valor actual?
- ¿Cuál es el porcentaje anual de declinación de su valor?

3. (Población). Se sabe que dentro de  $t$  años la población de cierto país será de

$$P(t) = 18e^{0,02t} \text{ millones de habitantes.}$$

- ¿Cuál es la población actual del país?
- ¿Cuál será su población dentro de 15 años?
- ¿Cuál es el porcentaje anual de crecimiento de la población?

4. (Crecimiento de bacterias). Un experimento de crecimiento bacteriológico se inició con 4.000 bacterias. 10 minutos más tarde, se tenían 12.000. Si se supone que el crecimiento es exponencial:  $f(t) = Ae^{kt}$ . ¿Cuántas bacterias se tendrá a los 30 minutos?

5. (Utilidades). Las utilidades de una compañía crecen exponencialmente:  $f(t) = Ae^{kt}$ . En 1.995 éstas fueron de 3 millones de dólares y en el 2.000 fueron de 4,5 millones. ¿Cuáles son las utilidades en 2.005?

6. (Desintegración radioactiva). La cantidad que queda de una sustancia radioactiva después de  $t$  años de desintegración está dada por

$$Q(t) = Ae^{-0,00015t} \text{ gramos}$$

Si al final de 5.000 años quedan 3.000 gramos, ¿Cuántos gramos había inicialmente?

7. (Desintegración radioactiva). Una sustancia radioactiva se desintegra exponencialmente:  $f(t) = Ae^{-kt}$ . Inicialmente había 450 gramos y 60 años después había 400 gramos, ¿Cuántos gramos habrá después de 240 años?

8. (Producto Nacional Bruto). El producto nacional bruto (P.N.B.) de cierto país,  $t$  años después de 1.995, es de  $f(t)$  millones de dólares, donde

$$f(t) = P(10)^{kt}, P \text{ y } k \text{ son constantes}$$

Si en 1.995 el P.N.B. fue de 8.000 millones de dólares y en el 2.000 fue de 16.000 millones de dólares. ¿Cuál será el P.N.B. en el año 2.010?



9. (Presión atmosférica). Se ha determinado que, a la altura de  $h$  pies sobre el nivel del mar, la presión atmosférica es de  $P(h)$  libras por pie cuadrado, donde

$$P(h) = Me^{-0.00003h}, \quad M \text{ es constante}$$

Si la presión atmosférica al nivel del mar es de 2.116 libras por pie cuadrado hallar la presión atmosférica fuera de un avión que vuela a 12.000 pies de altura

10. (Duración de bombillos). Un fabricante de bombillos encuentra que la fracción  $f(t)$  de bombillos que no se quemcn después de  $t$  meses de uso está dada por

$$f(t) = e^{-0.2t}$$

- ¿Qué porcentaje de los bombillos dura por lo menos un mes?
- ¿Qué porcentaje dura al menos 2 meses?
- ¿Qué porcentaje se quema durante el segundo mes?

11. (Venta de libros). Una editorial, estudiando el mercado, ha descubierto que si se distribuyen  $x$  miles de ejemplares gratuitos de un texto, la venta de dicho texto será, aproximadamente,

$$V(x) = 30 - 18e^{-0.3x} \text{ miles de ejemplares}$$

- ¿Cuántos textos se venderán si no se han distribuido ejemplares gratuitos?
- ¿Cuántos se venderán si se han regalado 800 ejemplares?

12. (Depreciación). El valor de reventa de una máquina, después de  $t$  años de uso, es:

$$V(t) = 520e^{-0.15t} + 460 \text{ miles de dólares}$$

- Bosquejar el gráfico de la función reventa.
- ¿Cuál fue el valor de la máquina cuando era nueva?
- ¿Cuál será el valor de la máquina cuando cumpla 20 años de uso?

13. (Desintegración radioactiva). Si  $Q_0$  es la cantidad inicial de una sustancia radioactiva se desintegra exponencialmente:  $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$ . La vida media de la sustancia es de  $\lambda$  unidades de tiempo (años, meses, horas, etc.). Probar que la cantidad remanente después de  $t$  unidades de tiempo es de

$$Q(t) = Q_0 e^{-(\ln 2/\lambda)t}$$

14. (Desintegración del radio). El radio se desintegra exponencialmente y su vida media es de 1.690 años. ¿Cuánto tiempo tardarán 200 gramos de este elemento para reducirse a 40 gramos?. Sugerencia: Ver el problema anterior.

15. (Nivel de alcohol en la sangre). Poco tiempo después de consumir una considerable cantidad de ron, el nivel de alcohol en la sangre de cierto conductor es de 0,4 miligramos por mililitro (mg/ml). De aquí en adelante, el nivel de alcohol decrece de acuerdo a la función

$$f(t) = (0,4)(1/2)^t,$$

donde  $t$  es el número de horas transcurridas después de haber alcanzado el nivel antes indicado. Si el límite legal para manejar un vehículo es de 0,08 mg/ml. ¿Cuánto tiempo debe esperar la persona para manejar legalmente?

16. (Cálculo del monto). Se deposita un capital de 12 millones de dólares en un banco que paga 14 % anual de interés compuesto continuo. ¿En cuántos años se tendrá un monto de 21 millones?
17. (Competencia de ventas). Dos periódicos compiten en ventas. Uno de ellos tiene una circulación de 500.000 ejemplares y crece 1,5 % mensualmente. El otro tiene una circulación de 900.000 ejemplares y decrece a razón de 0,5 % mensual. ¿Cuánto tiempo tomará para que ambos periódicos tengan igual circulación?
18. (Venta de un texto). Un nuevo texto de cálculo saldrá al mercado. Se estima que si se obsequian  $x$  miles de ejemplares a los profesores, en el primer año se venderán  $f(x) = 12 - 5e^{-0,2x}$  miles de ejemplares. ¿Cuántos textos deben obsequiarse si se quiere una venta en el primer año de 9.000 ejemplares?
19. (Producto Nacional Bruto). El producto nacional bruto (P.N.B.) de cierto país esta creciendo exponencialmente. En 1.995 fue 60.000 millones y en 2.000 fue de 70.000 millones. ¿Cuál es el PNB en el 2.005?
20. (Población de la Tierra). La población de la tierra en 1.986 fue de 4.917 millones de habitantes, y crecía a razón de 1,65 % anual. Si esta razón continua, ¿en cuántos años la población alcanzará 8.000 millones?
21. (Edad de un fósil). Un arqueólogo calculó que la cantidad de  $^{14}\text{C}$  en un tronco de árbol fosilizado es la cuarta parte de la cantidad de  $^{14}\text{C}$  que contienen los árboles actuales. ¿Qué edad tiene el tronco fosilizado?
22. (Cálculo del monto). Se pide prestado a un banco Bs. 7.500.000 para ser pagado en dos años, ganando interés de 28% anual. Hallar la cantidad de dinero que deberá devolverse al banco si
- El interés es simple.
  - El interés se compone anualmente.
  - El interés se compone trimestralmente.
  - El interés se compone mensualmente.
  - El interés se compone continuamente.
23. (Cálculo del principal). ¿Qué capital produce un monto de \$. 2.500.000 al final de 5 años si la tasa es de 16 % anual que se compone:
- Trimestralmente?
  - Continuamente?
24. (Cálculo del monto). En el año 1.626 el holandés Piter Minuit compró a los nativos la "isla" de Manhattan (Nueva York), por 24 dólares. Suponga que los nativos depositaron estos 24 dólares en un banco, ganando una tasa anual de 5 % que se compone continuamente. ¿Cuál es monto en el año 2.000?
25. (Tiempo de duplicación de capital). ¿Con qué rapidez se duplica un dinero si se invierte a una tasa anual de 15% que se compone:
- Semestralmente?
  - Continuamente?
26. (Tiempo de triplicación de capital). ¿Con qué rapidez se triplicará un dinero invertido a una tasa anual de 15 % que se compone:
- Semestralmente?
  - Continuamente?



## BREVE HISTORIA DE LAS ECUACIONES DE TERCER Y CUARTO GRADO

Los antiguos babilonios ya conocían la fórmula  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , que nos proporciona las raíces de la ecuación segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$ . Esta fórmula expresa las raíces en términos de radicales.

Alrededor de 1535, Nicolo Fontana o Nicolo de Brescia (1500-1557), más conocido con el sobrenombre de Tartaglia (tartamudo), hizo correr la noticia que él había descubierto la fórmula para resolver la ecuación de tercer grado:  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . En Bologna, levantó la voz Antonio del Fiore, un discípulo del profesor de Matemáticas de la Universidad de Bologna, Scipione del Ferro (1465-1526). Del Fiore acusa a Tartaglia de impostor y sostiene que fue su maestro quien ya había descubierto la fórmula en 1515. Para dilucidar esta situación, Fiore desafió a Tartaglia a un concurso público. Tartaglia aceptó y ganó el desafío.

La fama de Tartaglia se extendió en toda Italia. En 1539, otro matemático de Milán, Girolamo Cardano (1501-1526), le solicita conocer la fórmula. En un principio, Tartaglia rehusó, pero más tarde acepta después de hacer jurar a Cardano que éste no la revelaría.

En 1545, Girolamo Cardano publicó su famoso libro *Ars Magna* (Arte Mayor) en el cual aparece la fórmula, sin dar el completo crédito de autoría a Tartaglia. Este, eufórico, desafió a Cardano a un concurso público, que no fue aceptado. El desafío fue respondido por Ludovico Ferrari (1522-1526), discípulo de Cardano. Este concurso fue muy escabroso y de un final no muy claro.

En el libro *Ars Magna* también aparece la fórmula para resolver la ecuación de cuarto grado, que fue hallada por Ludovico Ferrari, siguiendo los pasos de la solución de la ecuación de tercer grado.

Veamos la fórmula, para resolver la ecuación de tercer grado:  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ .

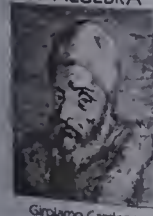
En primer lugar, el cambio de variable  $x = z - b/3a$ , transforma esta ecuación en una de la forma  $z^3 + pz + q = 0$ , la cual tiene por solución:

$$x = \left[ -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \right]^{1/3} + \left[ -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \right]^{1/3}$$



Tartaglia

ARS MAGNA  
OR THE RULES  
OF ALGEBRA



Girolamo Cardano

*Ars Magna*  
(traducción al inglés)



# 2

## LIMITES Y CONTINUIDAD

LEONARDO EULER  
(1.707–1.783)

- 2.1 INTRODUCCION INTUITIVA A LOS LIMITES
- 2.2 TRATAMIENTO RIGUROSO DE LOS LIMITES
- 2.3 LIMITES TRIGONOMETRICOS
- 2.4 CONTINUIDAD
- 2.5 LIMITES INFINITOS Y ASINTOTAS VERTICALLS
- 2.6 LIMITES EN EL INFINITO Y ASINTOTAS  
HORIZONTALES
- 2.7 LOS LIMITES Y EL NUMERO  $e$
- 2.8 ASINTOTAS OBLICUAS

## Leonardo Euler

(1707 – 1783)



Leonardo Euler nació en Basilea, Suiza. A temprana edad recibió lecciones del distinguido matemático Johann Bernoulli, quien juntó a Leonardo con sus dos brillantes hijos, Nicolás y Daniel. Más tarde, estos dos jovencitos alcanzaron renombre en la matemática por sus propios méritos. Leonardo, a pesar de ser 12 y 7 años menor que ellos, respectivamente, logró seguirles el ritmo.

Fue invitado a Rusia por la reina Catalina, en donde se incorporó a la Academia de Ciencias de San Petersburgo. El rey Federico el Grande lo invitó a Berlín a trabajar en la Academia de Ciencias de esa ciudad. En ambas sitios produjo abundantes trabajos de investigación.

Euler es considerado como el matemático más prolífico de la historia. Tiene contribuciones notables al cálculo de variaciones, la teoría de números, ecuaciones diferenciales. Introdujo al número  $e$  como base de los logaritmos naturales. Su producción total consiste en alrededor de 886 trabajos, que recopilados constituirían 80 libros de buen volumen. Se dice que al morir, dejó a la Academia de San Petersburgo trabajos para publicar por 20 años más, a pesar de que sus últimos 17 años los pasó casi ciego.

### ACONTECIMIENTOS IMPORTANTES

Durante la vida de Euler, en América y en el mundo hispano, sucedieron los siguientes hechos notables: En 1.780 el cacique peruano José Gabriel Condorcanqui, quien adoptó el nombre del inca Tupac Amaru, se levantó en armas contra la autoridad colonial. Fue vencido y ejecutado delante de su familia. En 1.750 nace en Caracas el prócer de la independencia venezolana Francisco de Miranda y en 1.783 nace el Libertador Simón Bolívar. El 4 de julio de 1.776, las 13 colonias inglesas de norteamérica declaran su independencia. Ese mismo año, Jorge Washington, con las fuerzas patriotas, cruza el río Delaware, cae por sorpresa sobre los ingleses y los derrota en Trenton.

Sobre el concepto de límite descansan los fundamentos del Cálculo. Sin duda que éste es uno de los conceptos más importantes y más delicados de la Matemática. Hizo su aparición hace muchos años atrás, en la Grecia Antigua. Sin embargo, su formulación rigurosa recién se logró en el siglo XIX, en los trabajos de investigación del matemático francés Agustín Cauchy (1789-1857). El largo lapso entre su aparición y su formulación rigurosa nos da una idea sobre lo delicado de este concepto.

Intimamente ligado al concepto de límite está el concepto de continuidad. De estos dos conceptos nos ocuparemos en este capítulo.

## SECCION 2.1

### INTRODUCCION INTUITIVA A LOS LIMITES

En esta sección presentamos un enfoque intuitivo del concepto de límite. También presentamos, sin demostración, las principales leyes que gobiernan a este concepto. Estas leyes nos permitirán introducirnos rápidamente al cálculo de los límites. La siguiente sección se ocupará de justificar rigurosamente muchos de estos aspectos.

Consideremos la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

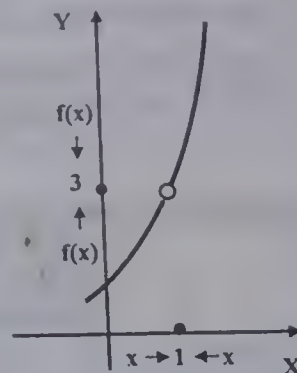
Esta función está definida para todo real  $x$ , excepto para  $x = 1$ . Factorizando el numerador tenemos que:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1}$$

Además, para  $x \neq 1$ , podemos simplificar y obtener:

$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad x \neq 1.$$

Aunque la función  $f$  no está definida en 1 nos interesamos por los valores que toma  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a 1, sin llegar a ser 1. En primer lugar, nos acercamos a 1 por la izquierda tomando para  $x$  valores menores que 1. Así, por ejemplo,  $x = 0,8$ ;  $0,9$ ;  $0,99$ ;  $0,999$ . En segundo lugar, nos acercamos a 1 por la derecha tomando para  $x$  valores mayores que 1. Así, por ejemplo,  $x = 1,2$ ;  $1,1$ ;  $1,01$ ;  $1,001$ . Los valores correspondientes para  $f(x)$  los tenemos en la tabla siguiente.



$x$	0,8	0,9	0,99	0,999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,001	1,01	1,1	1,2
$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$	2,44	2,71	2,9701	2,997001	$\rightarrow 3 \leftarrow$	3,003001	3,0301	3,31	3,64

Mirando la tabla o mirando el gráfico de la función, observamos que cuando  $x$  se aproxima a 1 por la izquierda y por la derecha, pero sin llegar a ser 1, el valor  $f(x)$  de



la función se aproxima a 3. Este resultado se expresa diciendo que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a 1 es 3, lo cual se abrevia así:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \quad \text{ó bien} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Durante toda la discusión anterior hemos puesto énfasis en que al aproximar  $x$  a 1 no dejamos que  $x$  tome el valor 1. Por tanto, el valor del límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a 1 depende únicamente de los valores que toma  $f(x)$  en los puntos  $x$  que están cercanos a 1, siendo irrelevante el hecho de que  $f$  esté o no definida en el punto 1. Así, si consideramos esta otra función  $g(x) = x^2 + x + 1$ , la cual está definida en todos los  $x$  incluyendo  $x = 1$ , tenemos que las dos funciones,

$$1. f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1, \quad x \neq 1 \quad \text{y} \quad 2. g(x) = x^2 + x + 1,$$

son iguales en todo  $x$  excepto en  $x = 1$  ( $f$  no está definida en 1). La tabla que hemos construido para  $f(x)$  también sirve para  $g(x)$ , ya que en ella no hemos considerado el valor  $x = 1$ . Por tanto, también concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

Es decir, ambas funciones tienen el mismo límite cuando  $x$  tiende a 1.

Guiados por la discusión anterior presentamos una definición intuitiva de límite. Al lector amante del rigor matemático le pedimos esperar un poco.

**DEFINICIÓN.** (No rigurosa de límite). Sea  $f$  una función que está definida en un intervalo abierto que contiene al punto  $a$ , excepto posiblemente en el mismo punto  $a$ . Diremos que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  es el número  $L$ , y escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

si cuando  $x$  está cerca de  $a$ , pero sin llegar a ser  $a$ ,  $f(x)$  está cerca de  $L$ .

Este número  $L$  puede o no existir, pero si existe, éste es único; es decir, toda función tiene, en un punto dado, a lo más un límite.

**EJEMPLO 1.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow -1} (x+3)$

**Solución**

Cuando  $x$  está cerca de  $-1$ ,  $x+3$  está cerca de  $-1+3=2$ . Luego,

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+3) = 2$$

**EJEMPLO 2.**

**Solución**

La función

$$g(x) = \frac{x}{2}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$$

**EJEMPLO 3.**

**Solución**

Como  $f(x)$

**EJEMPLO 4.**

**Solución**

Si  $x$

**EJEMPLO 2.**

Hallar  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ , donde  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1, & \text{si } x \neq 4 \\ 5, & \text{si } x = 4 \end{cases}$

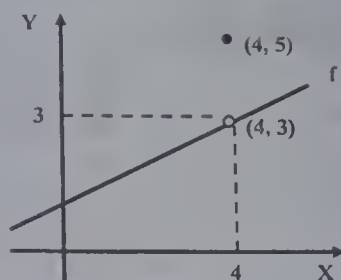
**Solución**

La función  $f$  coincide con la función lineal

$$g(x) = \frac{x}{2} + 1 \text{ en todo } \mathbb{R}, \text{ excepto en } x = 4.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{x}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{4}{2} + 1 = 2 + 1 \end{aligned}$$



**EJEMPLO 3.**

**Límite de una función constante**

Sea la función constante  $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ . Probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

Es decir, el límite de una función constante, cuando  $x$  tiende a cualquier valor  $a$ , es la misma constante.

**Solución**

Como  $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ , en particular, para los  $x$  próximos a  $a$  también tendremos que  $f(x) = c$ . Luego,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

**EJEMPLO 4.**

**Límite de la función Identidad**

Sea la función identidad:  $I(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} I(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

Es decir, el límite de la función identidad  $I(x) = x$ , cuando  $x$  tiende a  $a$ , es la misma  $a$ .

**Solución**

Si  $x$  se aproxima a  $a$ , obviamente  $I(x) = x$  también se aproxima a  $a$ . Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} I(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (x) \\ &= a \end{aligned}$$

## LÍMITES UNILATERALES

Para hallar el límite de una función en un punto  $a$  nos aproximamos a  $a$  por ambos lados, por la izquierda y por la derecha. Si sólo nos aproximamos a  $a$  por un sólo lado, bien sea por la izquierda o por la derecha, tenemos los límites unilaterales.

### DEFINICIÓN.

- a. Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto de la forma  $(b, a)$ . Diremos que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  por la izquierda es  $L$ , y escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

si cuando  $x$  está cerca de  $a$ , pero a la izquierda de  $a$ ,  $f(x)$  está cerca de  $L$ .

- b. Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto de la forma  $(a, b)$ . Diremos que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  por la derecha es  $L$ , y escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

si cuando  $x$  está cerca de  $a$ , pero a la derecha de  $a$ ,  $f(x)$  está cerca de  $L$ .

Observar que en ambos límites unilaterales no se asume que la función  $f$  está definida en  $a$ . El hecho de que  $f$  esté o no definida en  $a$  no afecta el límite.

**EJEMPLO 5.** Si  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ , hallar

a.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$

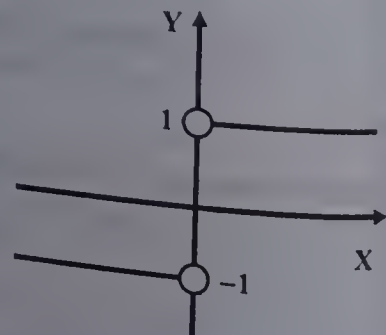
**Solución**

- a. Cuando  $x$  está a la izquierda de 0, es decir cuando  $x < 0$ , se tiene

$$|x| = -x \text{ y } f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1.$$

En particular, para los  $x$  cercanos a 0 y a su izquierda, tenemos que  $f(x) = -1$ . Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$





b. Cuando  $x$  está a la derecha de 0, es decir cuando  $x > 0$ , se tiene

$$|x| = x \text{ y } f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1.$$

En particular, para los  $x$  cercanos a 0 y a su derecha, tenemos que  $f(x) = 1$ .  
Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

Es evidente que si el límite de una función es el número  $L$ , entonces ambos límites unilaterales también serán iguales a  $L$ . Recíprocamente, si ambos límites son iguales a un mismo número  $L$ , entonces el límite de la función también es  $L$ . Este resultado es muy importante y lo resumimos en el siguiente teorema.

**TEOREMA 2.1**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Este teorema y los resultados del ejemplo anterior nos dicen que la función  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  no tiene límite en 0.

Nos preguntamos si existen funciones que en un punto dado no tengan alguno o los dos límites unilaterales. La respuesta es afirmativa. El siguiente ejemplo nos muestra una función que no tiene ninguno de los dos límites unilaterales en 0 y por tanto, tampoco tiene límite en 0.

**EJEMPLO 6.** Probar que no existen:

a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{\pi}{x}$

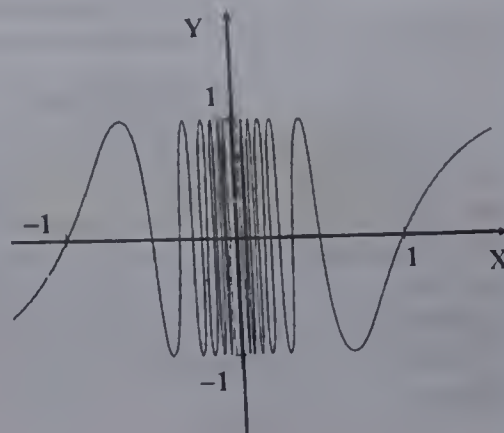
b.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{\pi}{x}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$

**Solución**

Tenemos la gráfica de  $y = \sin \frac{\pi}{x}$

Nuestra táctica es mostrar una sucesión infinita de valores de  $x$  que se aproximan a 0, tanto por la derecha como por la izquierda, pero los valores correspondientes de  $\sin \frac{\pi}{x}$  oscilan entre -1 y 1. Esto probaría que ninguno de los tres límites existe.



Sea  $x_n = \frac{2}{2n+1}$ , donde  $n$  es un entero. Se tiene:

$$\frac{\pi}{x_n} = \frac{\pi}{2/(2n+1)} = (2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

a. Tomamos  $x_n = \frac{2}{2n+1}$  con  $n \geq 0$ .

En este caso se tiene que a medida que  $n$  crece,  $x_n = \frac{2}{2n+1}$  se aproxima cada vez más a 0 por la derecha; sin embargo los valores correspondientes de  $\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}$  son

$$\sin \left[ (2n+1)\frac{\pi}{2} \right] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por lo tanto, no existe  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{\pi}{x}$ .

b. Tomamos  $x_n = \frac{2}{2n+1}$  con  $n < 0$ .

Como en el caso anterior, a medida que  $|n|$  crece,  $x_n = \frac{2}{2n+1}$  se aproxima cada vez más a 0 por la izquierda; pero aquí también se cumple que

$$\sin \left[ (2n+1)\frac{\pi}{2} \right] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por lo tanto, no existe  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{\pi}{x}$ .

c. Como no existen los límites unilaterales, tampoco existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$ .

## LEYES DE LOS LÍMITES

Un resultado fundamental en la teoría de los límites nos dice que el proceso de tomar límites respeta las operaciones elementales del álgebra. Es decir, el límite de una suma, diferencia, producto, cociente o raíz de funciones es igual a la suma, diferencia, producto, cociente o raíz de los límites. Estos resultados son conocidos con los nombres de ley de la suma, ley de la diferencia, ley del producto, ley del cociente y ley de la raíz, respectivamente. Debido a su importancia, los enunciamos en forma precisa en el siguiente teorema, cuya demostración parcial la haremos más adelante.

### TEOREMA

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

4.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Esta

EJEN

Sol

**TEOREMA 2.2** Leyes de los límites.

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ , entonces

$$1. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \pm \left[ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right] = L \pm G$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right] = LG$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{G}, \text{ si } G \neq 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, \text{ donde } L > 0 \text{ si } n \text{ es par}$$

Estas leyes también son válidas para los límites unilaterales.

**EJEMPLO 7.** Ley del producto de una constante por una función

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $c$  es una constante, probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] = cL$$

**Solución**

$$\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} c \right] \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] = cL$$

**EJEMPLO 8.** Ley de la potencia.

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $n$  es un número natural, probar:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n$$

En particular,

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

**Solución**

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{[f(x)f(x) \cdots f(x)]}_n$$



$$= \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \cdots \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \quad (\text{Ley del producto})$$

$$= \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n$$

Por otro lado, por ejemplo 4 sabemos que  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ . Luego, aplicando la parte anterior,

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} x \right]^n = [a]^n = a^n$$

**EJEMPLO 9.**

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5x^3}$

Solución

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5x^3} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} 5x^3} && (\text{Ley de la raíz}) \\ &= \sqrt{5 \left[ \lim_{x \rightarrow 2} x^3 \right]} && (\text{Ejemplo 7}) \\ &= \sqrt{5[2^3]} && (\text{Ley de la potencia}) \\ &= \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

El siguiente teorema nos da la manera de calcular el límite de una función racional y, en particular, el de un polinomio.

**TEOREMA 2.3** Si  $F(x)$  es una función racional y  $a$  es un punto de su dominio, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$$

Demostración

Caso 1.  $F$  es un polinomio:  $F(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} [b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0]$$

$$= \left[ \lim_{x \rightarrow a} b_n x^n \right] + \dots + \left[ \lim_{x \rightarrow a} b_1 x \right] + \left[ \lim_{x \rightarrow a} b_0 \right] \quad (\text{Ley de la suma})$$

$$= b_n \left[ \lim_{x \rightarrow a} x^n \right] + \dots + b_1 \left[ \lim_{x \rightarrow a} x \right] + b_0$$

(Ejemplo 7)

$$= b_n a^n + \dots + b_1 a + b_0$$

(Ley de la potencia)

$$= F(a)$$

**Caso 2.**  $F$  es una función racional:  $F(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , donde  $q(a) \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} p(x)}{\lim_{x \rightarrow a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = F(a).$$

**EJEMPLO 10.** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 2} [4x^3 - 7x^2 + 5x - 1]$

**Solución**

Aplicando el teorema anterior para el caso de un polinomio:

$$\lim_{x \rightarrow 2} [4x^3 - 7x^2 + 5x - 1] = 4(2)^3 - 7(2)^2 + 5(2) - 1 = 13$$

**EJEMPLO 11.** Calcular  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{8x^2 - 4x + 2}{x^3 + 5}$

**Solución**

Aplicando el teorema anterior para el caso de una función racional:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{8x^2 - 4x + 2}{x^3 + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (8x^2 - 4x + 2)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 5)} = \frac{8(-1)^2 - 4(-1) + 2}{(-1)^3 + 5} = \frac{7}{2}.$$

### FORMA INDETERMINADA $\frac{0}{0}$

Supongamos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , y busquemos  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

Aquí, la ley del cociente (teorema 2.2) no es aplicable. La sustitución directa nos lleva a la expresión  $0/0$ , la cual no da la información suficiente para encontrar tal límite. Por tal razón se dice que este límite es **indeterminado de la forma  $0/0$**  o **que el límite es de la forma indeterminada  $0/0$** . La indeterminación se salva recurriendo a métodos geométricos o algebraicos, como simplificación, racionalización o cambio de variable.

Veremos más adelante que la derivada, que es el concepto más importante del Cálculo Diferencial, es un límite del tipo  $0/0$ .

**EJEMPLO 12.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

**Solución**

Este es un límite indeterminado de la forma  $0/0$ . Observemos que al numerador lo podemos factorizar, lo que nos permitirá simplificar el cociente. En efecto:

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} = x + 4, \text{ para } x \neq 4$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 4 + 4 = 8$$

**EJEMPLO 13.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

**Solución**

Tenemos una indeterminación de la forma  $0/0$ , en la cual aparecen radicales. Aquí usamos la técnica de la racionalización. Multiplicamos numerador y denominador por la expresión  $\sqrt{x+1} + 1$ , que es la conjugada del numerador:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{(x+1) - 1^2}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{0+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

### PROBLEMAS RESUELTOS 3.1

**PROBLEMA 1.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

**Solución**

Este es un caso  $0/0$ . Para  $x \neq -2$  tenemos:

$$\frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{x^3 + 2^3}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} = x^2 - 2x + 4$$

Luego,



que al numerador lo  
En efecto:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) = (-2)^2 - 2(-2) + 4 = 12$$

4

**PROBLEMA 2.** Hallar  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

**Solución**

Es un caso  $\frac{0}{0}$ . Para  $h \neq 0$ , usando la conjugada, tenemos

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

Luego,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

radicales. Aquí  
denominador

**PROBLEMA 3.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^{-3} - 2^{-3}}{x}$

**Solución**

Es un caso  $0/0$ . Para  $x \neq 0$  tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)^{-3} - 2^{-3}}{x} &= \frac{\frac{1}{(x+2)^3} - \frac{1}{2^3}}{x} = \frac{2^3 - (x+2)^3}{2^3 x (x+2)^3} \\ &= \frac{2^3 - [x^3 + 6x^2 + 12x + 2^3]}{2^3 x (x+2)^3} = -\frac{x^3 + 6x^2 + 12x}{2^3 x (x+2)^3} \\ &= -\frac{x(x^2 + 6x + 12)}{2^3 x (x+2)^3} = -\frac{x^2 + 6x + 12}{2^3 (x+2)^3} \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^{-3} - 2^{-3}}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x + 12}{2^3 (x+2)^3} = -\frac{0^2 + 6(0) + 12}{2^2 (0+2)^3} = -\frac{3}{8}$$

**PROBLEMA 4.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$

**Solución**

Es un caso  $0/0$ .

De la identidad  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ , obtenemos

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

Si en la última igualdad hacemos  $a = \sqrt[3]{x+h}$  y  $b = \sqrt[3]{x}$  se tiene que:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x} &= \frac{(\sqrt[3]{x+h})^3 - (\sqrt[3]{x})^3}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2} \\ &= \frac{x+h-x}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2} \\ &= \frac{h}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2}\end{aligned}$$

Luego, para  $h \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} &= \frac{h}{h \left[ (\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2 \right]} \\ &= \frac{1}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2}\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2} \\ &= \frac{1}{(\sqrt[3]{x+0})^2 + (\sqrt[3]{x+0})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\end{aligned}$$

### PROBLEMA 5.

Hallar  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ , donde  $a > 0$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} + \sqrt{x-a} \\ &= \frac{(x-a) + \sqrt{x-a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{(x-a)(x+a)}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}\end{aligned}$$

2), obtenemos

y  $b = \sqrt[3]{x}$  se tiene que:

$$\frac{(\sqrt[3]{x})^3}{(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}} \right) = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{a}}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt[3]{a}}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt[3]{a}}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt[3]{a}}$$

si  $a > 0$

$$\frac{-a(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{a(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{\sqrt{x-a} \sqrt{x-a} + \sqrt{x-a} (\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x-a} \sqrt{x+a} (\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{\sqrt{x-a} [\sqrt{x-a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}]}{\sqrt{x-a} \sqrt{x+a} (\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x+a} (\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x+a} (\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x+a} (\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a}}{\sqrt{2a} (\sqrt{a} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

Observar que la factorización  $x-a = \sqrt{x-a} \sqrt{x-a}$  sólo es posible si  $x \geq a$ . Por esta razón sólo se pide el límite por la derecha.

**PROBLEMA 6.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

**Solución**

Mediante un cambio de variable transformamos esta función con radicales en una función racional. La justificación teórica del proceso de cambio de variable (Teorema de cambio de variable) la presentaremos en la próxima sección. Los radicales tienen índices 2 y 3, respectivamente (tienen índices distintos). Hallamos el mínimo común múltiplo de 2 y 3, que es 6, y hacemos el cambio de variable:

$$x+1 = y^6$$

Ahora tenemos que

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{y^6} = y^3, \quad \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{y^6} = y^2 \quad y$$

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \frac{y^3-1}{y^2-1} = \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)} = \frac{y^2+y+1}{y+1}, \quad y \neq 1$$

Como  $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow y \rightarrow 1$ , tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{1^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

**PROBLEMA 7.** Si  $n$  es un número natural, probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

**Solución**



Sabemos por el binomio de Newton que.

$$(x+h)^n = x^n + \frac{n}{1!} x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n$$

Luego, para  $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\ &= \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \frac{h[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}]}{h} \\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} [nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}] \\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}(0) + \dots + nx(0)^{n-2} + (0)^{n-1} \\ &= nx^{n-1} + 0 + \dots + 0 + 0 = nx^{n-1} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 8.** a. Hallar el número  $b$  tal que existe el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + bx + b - 7}{x^2 - x - 6}$$

b. Hallar el límite anterior.

**Demostración**

a. Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x - 6)$  y  $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ .

Para que el límite propuesto exista, el numerador debe tener un factor  $(x+2)$ , de modo que obtengamos una indeterminación del tipo  $0/0$  y que esta pueda eliminarse simplificando el factor común  $(x+2)$ . En consecuencia,  $x = -2$  debe ser una raíz del numerador. Luego,

$$3(-2)^2 + b(-2) + b - 7 = 0 \Rightarrow b = 5$$

Por lo tanto, para que el límite dado exista se debe cumplir que  $b = 5$  y el numerador debe ser

$$3x^2 + bx + b - 7 = 3x^2 + 5x + 5 - 7 = 3x^2 + 5x - 2 = (x + 2)(3x - 1)$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + bx + b - 7}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(3x - 1)}{(x + 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(3x - 1)}{(x - 1)} \\ &= \frac{(3(-2) - 1)}{(-2 - 1)} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

### PROBLEMAS PROPUESTOS 2.1

En los problemas del 1 al 35, hallar el límite indicado.

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6}{x^2 - 3}$

2.  $\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{y^2 - 2y + 2}{y - 4} + 1 \right]$

3.  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^4 + x + 1}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{2x^2 + 2}{8x^2 + 1}}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

6.  $\lim_{y \rightarrow -5} \frac{y^2 - 25}{y + 5}$

7.  $\lim_{h \rightarrow 2} \frac{h - 2}{h^2 - 4}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

9.  $\lim_{y \rightarrow -3} \frac{y^3 + 27}{y + 3}$

10.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 4x - 32}{x - 4}$

11.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3}{x + 1}$

12.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\frac{x + 1}{x + 2} + 1}$

13.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$

14.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

15.  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{16 - x^{4/3}}{4 - x^{2/3}}$

16.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x}$

17.  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$

18.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}$

19.  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{y + 3} - \sqrt{3}}{y}$

20.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$

21.  $\lim_{y \rightarrow 5} \frac{\sqrt{y - 1} - 2}{y - 5}$

22.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + h^2} - 1}{h}$

23.  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

24.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1} - 1}{x^2}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

$$32. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x}-1}{\sqrt{3-x}}$$

$$34. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - ax - x + a}$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{bx+a}}{\sqrt{cx+d} - \sqrt{dx+c}}$$

$$36. \text{ Si } f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0, \text{ probar que}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\frac{1}{x^2}$$

$$37. \text{ Si } f(x) = \sqrt{x}, x > 0, \text{ probar que}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

En los problemas del 38 al 54, hallar el límite indicado.

$$38. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{2x-1}$$

$$39. \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-16}}$$

$$40. \lim_{x \rightarrow 2^-} [x]$$

$$41. \lim_{x \rightarrow 2^+} [x]$$

$$42. \lim_{x \rightarrow -2^-} [x]$$

$$43. \lim_{x \rightarrow -2^+} [x]$$

$$44. \lim_{x \rightarrow 5/2} [x]$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - [x])$$

$$46. \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - [x])$$

$$47. \lim_{x \rightarrow 3^-} [x^2 + x + 1]$$

$$48. \lim_{x \rightarrow 3^+} [x^2 + x + 1]$$

$$49. \lim_{x \rightarrow 3^-} [[x] + [4-x]]$$

$$50. \lim_{x \rightarrow 3^+} [[x] + [4-x]]$$

$$51. \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{|x-4|}$$

$$52. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{4x+1}}{\sqrt{x}-1}$$

$$53. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2} + 2-x}{\sqrt{4-x^3/2} + \sqrt{2x-x^2}}$$

$$54. \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x\sqrt{x-a}\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$$

$$55. \text{ Si } h(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{hallar a. } \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow 2} h(x)$$



56. Si  $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$  hallar a.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  b.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  c.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

57. Si  $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x^3}{2} & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$  hallar a.  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  b.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

58. Hallar una función  $f$  tal que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$  y que no exista  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

59. Pruebe, con un contraejemplo, que las proposiciones siguientes son falsas:

a. Existe  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] \Rightarrow$  Existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y existe  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

b. Existe  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] \Rightarrow$  Existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y existe  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

60. Probar que: Existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

De esta proposición se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

## SECCION 2.2

### TRATAMIENTO RIGUROSO DE LOS LÍMITE

Con la "definición" informal de límite que se presentó en la sección anterior hemos logrado avanzar algunos pasos, pero no puede llevarnos muy lejos. Así, por ejemplo, con esa definición no podemos demostrar las leyes de los límites enunciados en el teorema 2.2. Otra versión un tanto mejorada, pero aún no rigurosa, es la siguiente:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  si podemos hacer que los valores de  $f(x)$  estén arbitrariamente cerca de  $L$  (tan cerca como queramos) con sólo tomar a  $x$  suficientemente cerca de  $a$ , pero no igual a  $a$ .

Ahora daremos una interpretación matemática a esta versión. En primer lugar, para hablar de cercanía necesitamos considerar números reales positivos pequeños.

Es tradicional usar las letras griegas  $\varepsilon$  (épsilon) y  $\delta$  (delta) para representar tales números.

Con la frase: "que  $f(x)$  esté arbitrariamente cerca de  $L$  (tan cerca como queramos)" queremos decir que si tomamos cualquier número positivo  $\varepsilon$ , por más pequeño que éste sea, la distancia entre  $f(x)$  y  $L$ , que es  $|f(x) - L|$ , es menor que  $\varepsilon$ . Esto es,

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ ó equivalentemente,}$$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Pero la última desigualdad significa que  $f(x)$  está en el intervalo

$$(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

Por otro lado, la frase "con sólo tomar a  $x$  suficientemente cerca de  $a$ , pero no igual a  $a$ " quiere decir que se puede encontrar otro número positivo  $\delta$  tal que la distancia entre  $x$  y  $a$  sea menor que  $\delta$ , siendo  $x \neq a$ . Esto es,

$$0 < |x - a| < \delta$$

Esta desigualdad es la conjunción de las dos siguientes:

$$0 < |x - a| \quad \text{y} \quad |x - a| < \delta.$$

La primera dice que  $x \neq a$  y la segunda, que la distancia entre  $x$  y  $a$  es menor que  $\delta$ .

**DEFINICION.** (Rigurosa de límite). Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto  $a$ , excepto posiblemente el punto  $a$ .  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Para los aficionados a las expresiones más formales, la definición anterior se escribe así:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

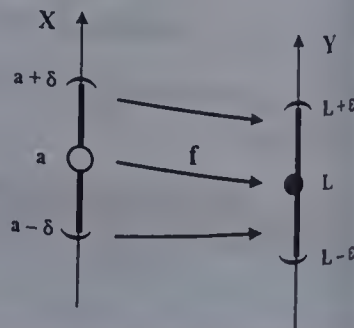
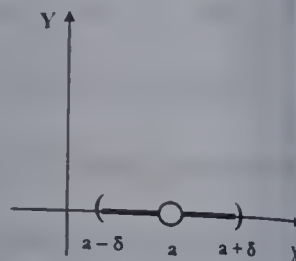
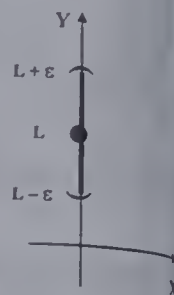
Algunas veces, la implicación

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

se escribe así:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

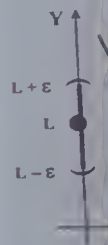
Una manera gráfica de ver esta definición es la



siguiente:

Para cualquier otro intervalo  $(a - \delta, a + \delta)$

Otra inter



En la última se encuentra

encuentra

Según

$\varepsilon > 0$  y

Poder

el profesor

producción

**EJEM**

Solución

Dado

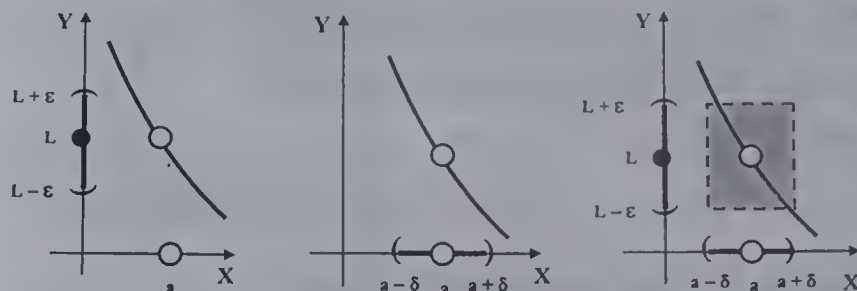
Cálculo

Busca

siguiente:

Para cualquier intervalo pequeño  $(L - \epsilon, L + \epsilon)$  alrededor de  $L$  podemos encontrar otro intervalo  $(a - \delta, a + \delta)$  alrededor de  $a$  tal que  $f$  lleva todos los puntos de  $(a - \delta, a + \delta)$ , excepto posiblemente  $a$ , en el intervalo  $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ .

Otra interpretación gráfica de la definición de límite es como sigue:



$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

En la última figura vemos que los puntos  $(x, f(x))$  de la gráfica de  $f$ , con  $x \neq a$ , que se encuentran entre las rectas verticales  $x = a - \delta$  y  $x = a + \delta$ , también se encuentran entre las rectas horizontales  $y = L - \epsilon$  e  $y = L + \epsilon$ .

Según esta definición, para probar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , primero se da el número

$\epsilon > 0$  y se debe elaborar para producir el número  $\delta > 0$  que cumpla con:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Podemos pensar este proceso como un juego (juego de la prueba del límite) entre el profesor y el estudiante. El profesor da el  $\epsilon$  y el estudiante, para ganar, debe producir el respectivo  $\delta$ . Empecemos el juego:

**EJEMPLO 1.** Usando la definición  $\epsilon$ - $\delta$ , probar que

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$$

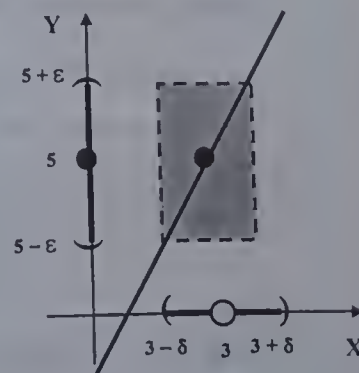
**Solución**

Dado un  $\epsilon > 0$ , debemos hallar un  $\delta > 0$  tal que:

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(2x - 1) - 5| < \epsilon$$

**Cálculos previos.** (Buscando un valor de  $\delta$ ).

Buscamos  $\delta$  manipulando la última expresión:





$$|(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = |2(x - 3)| = 2|x - 3|$$

Luego,

$$|(2x - 1) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$$

La última expresión nos sugiere que debemos tomar  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ .

**Prueba Formal.** (Comprobando que el  $\delta$  hallado funciona)

Si dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , entonces

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 2|x - 3| < \varepsilon \Rightarrow |(2x - 1) - 5| < \varepsilon$$

Vemos que con  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  logramos lo que queríamos, que es,

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(2x - 1) - 5| < \varepsilon.$$

Luego,  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$

### OBSERVACIONES

1. La segunda parte de la solución del ejemplo anterior, a la que llamamos prueba formal, consiste en recorrer al revés los pasos dados en la primera parte. Eso significa que el verdadero trabajo de la prueba está en los cálculos previos, siendo la segunda parte una simple comprobación. Por esta razón, más adelante, en la prueba de un límite la concluiremos al encontrar el  $\delta$  en la parte de cálculos previos.
2. En el ejemplo anterior hemos encontrado que tomando  $\delta = \varepsilon/2$  llegamos a la conclusión que queríamos:  $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(2x - 1) - 5| < \varepsilon$ . Se puede tomar también para  $\delta$  cualquier número positivo menor que  $\varepsilon/2$ . En efecto, si tomamos  $\delta_1 < \delta = \varepsilon/2$  se tiene, por transitividad, que

$$0 < |x - 3| < \delta_1 \Rightarrow 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(2x - 1) - 5| < \varepsilon.$$

**EJEMPLO 2.** Si  $a > 0$ , usando la definición  $\varepsilon$ - $\delta$ , probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

**Solución**

Para un  $\varepsilon > 0$  cualquiera, debemos hallar un  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$$

Cálculos previos. (Buscando un valor de  $\delta$ ).  $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$

Tenemos que:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| = \left| \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| |x - a|$$

Pero,  $\left| \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$

De esta desigualdad y la igualdad anterior, obtenemos

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} |x - a|$$

En consecuencia,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon \quad \text{si} \quad \frac{1}{\sqrt{a}} |x - a| < \varepsilon, \text{ o sea si } |x - a| < \varepsilon \sqrt{a}$$

Por tanto, tomamos  $\delta = \varepsilon \sqrt{a}$ .

**Prueba Formal.** (Comprobando que el  $\delta$  encontrado funciona).

Si dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \varepsilon \sqrt{a}$ , entonces

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| < \varepsilon \sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$$

Luego,  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

**EJEMPLO 3.** Usando la definición  $\varepsilon$ - $\delta$ , probar que

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x + 1) = 3$$

**Solución**

Para un  $\varepsilon > 0$  cualquiera, debemos hallar un  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - (-2)| = |x + 2| < \delta \Rightarrow |(x^2 + x + 1) - 3| < \varepsilon$$

Cálculos previos. (Buscando un valor de  $\delta$ ).

Tenemos que:

$$|(x^2 + x + 1) - 3| = |x^2 + x - 2| = |(x-1)(x+2)| = |x-1| |x+2|$$

Observar que en la última expresión, el factor  $|x+2|$  es el que debemos tomar menor que  $\delta$ . Para hallar a  $\delta$ , al factor acompañante  $|x-1|$  debemos acotarlo por una constante. Es decir, debemos encontrar una constante  $M > 0$  tal que

$$|x-1| \leq M.$$

En los ejemplos anteriores esta  $M$  la hemos encontrado con relativa facilidad. En el ejemplo anterior,  $M = 1/\sqrt{a}$ . En el presente caso, no existe un  $M$  que acote  $|x-1|$  en todo  $\mathbb{R}$ , que es el dominio del polinomio  $x^2 + x + 1$ . Sin embargo, como sólo estamos interesados en los puntos cercanos a  $-2$ , conseguimos tal  $M$  si restringimos a un intervalo centrado en  $-2$ . Así, si sólo consideramos los  $x$  que están a una distancia de 1 de  $-2$ , esto es  $|x+2| < 1$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} |x+2| < 1 &\Rightarrow -1 < x+2 < 1 \Rightarrow -3 < x < -1 \Rightarrow -4 < x-1 < -2 \\ &\Rightarrow 2 < -(x-1) < 4 \Rightarrow 2 < |x-1| < 4 \end{aligned}$$

O sea que hemos conseguido  $M = 4$  tal que

$$|x+2| < 1 \Rightarrow |x-1| < M = 4 \quad (1)$$

De (1) y (2) obtenemos:

$$|x+2| < 1 \Rightarrow |(x^2 + x + 1) - 3| < 4|x+2|$$

Por tanto,

$$|x+2| < 1 \text{ y } 4|x+2| < \varepsilon \Rightarrow |(x^2 + x + 1) - 3| < \varepsilon$$

Luego,

$$|x+2| < 1 \text{ y } |x+2| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |(x^2 + x + 1) - 3| < \varepsilon \quad (3)$$

Ahora tenemos dos restricciones sobre  $|x+2|$ , que son:

$$|x+2| < 1 \text{ y } |x+2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Para asegurarnos que ambas desigualdades se cumplan, escogemos como  $\delta$  menor (mínimo) de los números 1 y  $\varepsilon/4$ . Esta escogencia la abreviamos así:

$$\delta = \text{Mínimo}\{1, \varepsilon/4\}.$$

**Prueba Formal. (Comprobando que el  $\delta$  encontrado funciona).**

Si dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \text{Mínimo}\{1, \varepsilon/4\}$ , entonces, por (3),

$$0 < |x+2| < \delta \Rightarrow |x+2| < 1 \text{ y } |x+2| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |(x^2 + x + 1) - 3| < \varepsilon$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x + 1) = 3$$

## ESTRATEGIA

Observando

se siguen 3 pas

Paso 1. (Sacar  
Esto e

Paso 2. (Acota  
 $\beta =$

Paso 3. (Esco  
1 y 2

$$0 < |x -$$

O sea,

## EJEMPLO

Solución

Para un

Cálculos pr

Paso 1. (Sa

Paso 2. (A  
Bu



### ESTRATEGIA PARA GANAR EL JUEGO DE LA PRUEBA DEL LIMITE

Observando los ejemplos anteriores vemos que para probar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , se siguen 3 pasos:

**Paso 1. (Sacar el factor  $|x - a|$ ).** De  $|f(x) - L|$  sacar como factor a  $|x - a|$ . Esto es, conseguir una función  $g(x)$  tal que

$$|f(x) - L| = |g(x)| |x - a|$$

**Paso 2. (Acotar  $|g(x)|$ ).** Encontrar un número  $\beta > 0$  (en la mayoría de los casos,  $\beta = 1$ ) y un número  $M > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \beta \Rightarrow |g(x)| \leq M$$

**Paso 3. (Escoger  $\delta$ ).** Dado  $\varepsilon > 0$ , tomar  $\delta = \text{Mínimo } \{\beta, \varepsilon/M\}$  ya que, por los pasos 1 y 2,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| = |g(x)| |x - a| \leq M |x - a| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

O sea,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

**EJEMPLO 4.** Usando la definición  $\varepsilon$ - $\delta$ , probar que

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{1}{x} = 2$$

**Solución**

Para un  $\varepsilon > 0$  cualquiera, debemos hallar un  $\delta > 0$  tal que

$$0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < \varepsilon$$

**Cálculos previos. (Buscando un valor de  $\delta$ ).**

**Paso 1. (Sacar el factor  $|x - 1/2|$ ).**

$$\left| \frac{1}{x} - 2 \right| = \left| \frac{1 - 2x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \right| |2x - 1| = \left| \frac{2}{x} \right| \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

Esto es,

$$\left| \frac{1}{x} - 2 \right| = |g(x)| \left| x - \frac{1}{2} \right|, \text{ donde } |g(x)| = \left| \frac{2}{x} \right|$$

**Paso 2. (Acotar  $|g(x)|$ ).**

Buscamos un  $\beta > 0$  y un  $M > 0$  tales que:

La expresión  $|g(x)| = \left| \frac{2}{x} \right|$  crece ilimitadamente si  $x$  se acerca a 0. Por tanto, para acotarla, debemos alejar a  $x$  de 0. Esto lo logramos tomando:

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \beta = \frac{1}{4}.$$

En efecto:

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} < x - \frac{1}{2} < \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} < x < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{3} < \frac{1}{x} < 4 \Rightarrow \frac{8}{3} < \frac{2}{x} < 8 \Rightarrow \frac{8}{3} < \left| \frac{2}{x} \right| < 8$$

O sea, si  $\beta = \frac{1}{4}$ , conseguimos  $M = 8$ , tales que

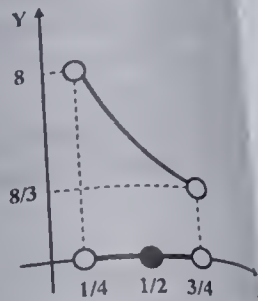
$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \left| \frac{2}{x} \right| < M = 8$$

Paso 3. (Escoger  $\delta$ ). Tomamos

$$\delta = \text{Mínimo} \left\{ \beta, \frac{\varepsilon}{M} \right\} = \text{Mínimo} \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{8} \right\}$$

Prueba Formal. (Comprobando que el  $\delta$  encontrado funciona).

$$0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 2 \right| = \left| \frac{2}{x} \right| \left| x - \frac{1}{2} \right| < 8 \left( \frac{\varepsilon}{8} \right) = \varepsilon$$



### ALGUNOS TEOREMAS SOBRE LÍMITES

Lo que resta de esta sección será dedicada a presentar algunos teoremas de importancia para el desarrollo posterior del curso. También pagaremos las deudas contraídas en la sección anterior, como son las leyes de los límites (Teorema 2.2). Comenzamos, parcialmente, con esto último.

**EJEMPLO 5.** (Ley de la suma). Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ , probar que

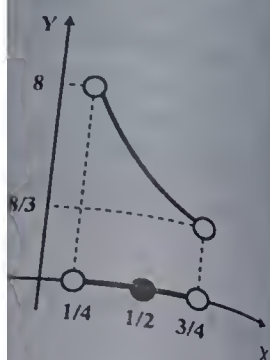
$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \pm \left[ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right] = L \pm G$$

Solución

Debemos probar que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f(x) \pm g(x)) - (L \pm G)| < \varepsilon$$

se acerca a 0. Por tanto, tomando:



Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , dado  $\varepsilon/2$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ , dado  $\varepsilon/2$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Tomando  $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , usando (1) y (2) se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta &\Rightarrow |(f(x) \pm g(x)) - (L \pm G)| \\ &= |(f(x) - L) \pm (g(x) - G)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

**TEOREMA 2.4** Si  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x$  en un intervalo abierto que contiene a  $a$ , excepto posiblemente en  $a$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 12.

**TEOREMA 2.5** (Ley del emparedado o ley de la arepa rellena) Si

1.  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ,  $\forall x$  en un intervalo abierto que contiene a  $a$ , excepto posiblemente en  $a$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

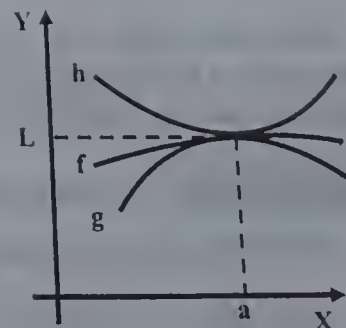
**Demostración**

Aplicando el teorema anterior se tiene que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x) \Rightarrow$$

$$L \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$





**EJEMPLO 6.** Probar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1+x^4} = 0$

**Solución**

Tenemos que  $0 \leq \frac{x^2}{1+x^4} \leq x^2$

Si  $f(x) = 0$ ,  $g(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$  y  $h(x) = x^2$ , entonces  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ .

Además,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ . Luego, por el teorema anterior,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1+x^4} = 0$$

**TEOREMA 2.6** Teorema del cambio de variable

Si  $x = g(t)$  tal que  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = a$  y  $g(t) \neq a$  para todo  $t \neq b$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{t \rightarrow b} f(g(t))$$

El cambio de variable es  $x = g(t)$ .

**Demostración**

Ver el problema resuelto 13.

## LÍMITES UNILATERALES

Terminamos la teoría de esta sección presentando las definiciones rigurosas de los límites unilaterales. Para esto, observemos que

$$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta \quad \text{y} \quad 0 < x - a < \delta$$

$$\Leftrightarrow 0 < a - x < \delta \quad \text{y} \quad 0 < x - a < \delta$$

Los  $x$  que cumplen con  $0 < a - x < \delta$  son los  $x$  en el intervalo  $(a - \delta, a)$  y, por tanto, están a la izquierda de  $a$ . En cambio, los  $x$  que cumplen con  $0 < x - a < \delta$  son los  $x$  que están en el intervalo  $(a, a + \delta)$ , y por tanto, están a la derecha de  $a$ .

**DEFINICIÓN.** Límites unilaterales

1. Sea  $f$  definida en un intervalo abierto de la forma  $(b, a)$ .

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

2. Sea  $f$  definida en un intervalo abierto de la forma  $(a, b)$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 2.2

**PROBLEMA 1.** Probar que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$

**Solución**

En primer lugar observar que no se puede aplicar la ley de producto debido a que, como lo muestra el ejemplo 6 de la sección anterior, no existe el  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ .

Resolvemos el problema recurriendo a la definición  $\varepsilon$ - $\delta$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , debemos hallar  $\delta > 0$  tal que

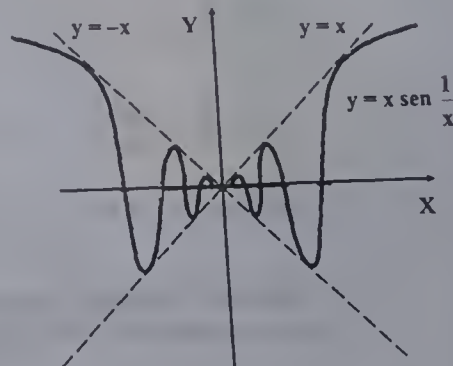
$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\text{o sea, } 0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Como  $\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq 1$ , se tiene

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

Luego, para el  $\varepsilon$  dado, tomamos  $\delta = \varepsilon$ .



**PROBLEMA 2.** Mediante la definición  $\varepsilon$ - $\delta$ , probar que  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{x-2} = 5$

**Solución**

Debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{5}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon$$

**Cálculos previos.** (Buscando un valor de  $\delta$ ).

**Paso 1.** (Sacar como factor a  $|x - 3|$ ).

$$\begin{aligned} \left| \frac{5}{x-2} - 5 \right| &= \left| \frac{5 - 5(x-2)}{x-2} \right| = \left| \frac{5 - 5x + 10}{x-2} \right| = \left| \frac{-5x + 15}{x-2} \right| \\ &= \left| \frac{-5(x-3)}{x-2} \right| = \left| \frac{-5}{x-2} \right| |x-3| = \frac{5}{|x-2|} |x-3| \end{aligned}$$

Esto es,

$$\left| \frac{5}{x-2} - 5 \right| = \frac{5}{|x-2|} |x-3|$$

Paso 2. (Acotamos  $\frac{5}{|x-2|}$ ). Hallamos  $\beta > 0$  y  $K > 0$  tales que

$$|x-3| < \beta \Rightarrow \frac{5}{|x-2|} \leq K$$

Sea  $\beta = \frac{1}{2}$ . Tenemos que

$$|x-3| < \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + 1 < x-2 < \frac{1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < x-2 < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < |x-2| < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{|x-2|} < 2 \Rightarrow \frac{10}{3} < \frac{5}{|x-2|} < 10$$

Esto es,  $|x-3| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{|x-2|} < 10$

Antes de continuar observemos que en este caso no podemos tomar  $\beta = 1$  ya que de haberlo hecho tendríamos que

$$|x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow 0 < x-2 < 2$$

Pero esta última desigualdad no puede invertirse debido al 0 que aparece a la izquierda.

Paso 3. (Escogemos  $\delta$ ). Tomamos  $\delta = \text{Mínimo} \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{10} \right\}$ .

Prueba Formal. (Comprobando que el  $\delta$  escogido funciona).

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < \frac{1}{2} \text{ y } |x-3| < \frac{\varepsilon}{10}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{5}{x-2} - 5 \right| = \frac{5}{|x-2|} |x-3| < 10 \frac{\varepsilon}{10} = \varepsilon$$

PROBLEMA

Solución  
Proceder

Suponga  
por hipótesis

Esta es

PROBLEMA

Solución

De a

ya que

Pr

C



**PROBLEMA 3.** Sea  $c$  una constante. Probar:

$$|c| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow c = 0$$

**Solución**

Procedemos por reducción al absurdo.

Supongamos que  $c \neq 0$ . En este caso se tiene que  $|c| > 0$ . Tomando  $\varepsilon = \frac{1}{2}|c|$ , por hipótesis, se tiene que

$$|c| < \varepsilon \Rightarrow |c| < \frac{1}{2}|c| \Rightarrow 2|c| < |c| \Rightarrow 2 < 1$$

Esta contradicción pueda la tesis.

**PROBLEMA 4.** (Unicidad del límite). Probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$$

**Solución**

De acuerdo al problema anterior, basta probar que

$$|L_1 - L_2| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0, \quad (1)$$

ya que tendríamos:

$$L_1 - L_2 = 0 \Rightarrow L_1 = L_2$$

Probemos (1):

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ , dado  $\varepsilon/2$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ , dado  $\varepsilon/2$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

Por otro lado, sumando y restando  $f(x)$  y usando la desigualdad triangular:

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \quad (4)$$

Ahora, tomando  $\delta = \text{Mínimo} \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , por (2), (3) y (4), se tiene:

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta &\Rightarrow 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_2 \\ &\Rightarrow |L_1 - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

**PROBLEMA 5.** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , probar que existen  $\delta > 0$  y  $K > 0$  tales que  
 $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < K$

**Solución**

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , dado  $\varepsilon = 1$ , existe  $\delta > 0$  tal que  
 $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1$  (1)

Pero, por la desigualdad triangular,

$$|f(x)| = |(f(x) - L) + L| \leq |f(x) - L| + |L| \quad (2)$$

Luego, haciendo  $K = 1 + |L|$ , se tiene de (1) y (2)

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < 1 + |L| = K$$

**PROBLEMA 6.** (Ley del producto). Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ , probar

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right]$$

**Solución**

Debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - LG| < \varepsilon$$

Por el problema anterior, existen  $\delta' > 0$  y  $K > 0$  tales que

$$0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < K \quad (1)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , dado  $\varepsilon_1 = \varepsilon/2(|G| + 1)$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(|G| + 1)} \quad (2)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ , dado  $\varepsilon_2 = \varepsilon/2K$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - G| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2K}$$

Por otro lado, restando y sumando  $f(x)G$  y usando la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LG| &= |[f(x)g(x) - f(x)G] + [f(x)G - LG]| \\ &= |f(x)[g(x) - G] + [f(x) - L]G| \leq |f(x)[g(x) - G]| + |[f(x) - L]G| \\ &= |f(x)| |g(x) - G| + |f(x) - L| |G| \end{aligned} \quad (4)$$

Ahora, tomando  $\delta = \text{Min} \{ \delta', \delta_1, \delta_2 \}$  se tiene que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x)g(x) - LG| \leq |f(x)| |g(x) - G| + |f(x) - L| |G| \quad (\text{por 4})$$

$$\leq K |g(x) - G| + |f(x) - L| |G| \quad (\text{por 1})$$

$$< K \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2(|G| + 1)} |G| \quad (\text{por 2 y 3})$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

**PROBLEMA 7.** Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$  y  $G \neq 0$ , probar que  $\exists \delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x)| > \frac{1}{2} |G|$$

**Solución**

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$  y  $G \neq 0$ , dado  $\varepsilon = (1/2)|G|$ , existe un  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - G| < \varepsilon = \frac{1}{2} |G| \quad (1)$$

Pero,

$$|G| = |G - g(x) + g(x)| \leq |G - g(x)| + |g(x)| \Rightarrow$$

$$|g(x)| \geq |G| - |G - g(x)| \quad (2)$$

De (1) y (2),

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x)| > |G| - \frac{1}{2} |G| = \frac{1}{2} |G|$$

**PROBLEMA 8.** Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$  y  $G \neq 0$ , probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{G}$$

**Solución**

Debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| < \varepsilon$$

Bien, tenemos que

(4)



$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| &= \left| \frac{G - g(x)}{g(x)G} \right| = \left| \frac{1}{g(x)G} \right| |g(x) - G| \\ &= \frac{1}{|g(x)| |G|} |g(x) - G| \end{aligned} \quad (1)$$

Por el problema anterior, existe un  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| > \frac{1}{2} |G| \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|G|} \quad (2)$$

De (1) y (2):

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| &< \frac{2}{|G|} \frac{1}{|G|} |g(x) - G| \\ &= \frac{2}{G^2} |g(x) - G| \end{aligned} \quad (3)$$

Por otro lado, como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ , dado  $\varepsilon' = \varepsilon G^2 / 2$  existe un  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - G| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon G^2}{2} \quad (4)$$

Luego, tomando  $\delta = \text{Mínimo} \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , por (3) y (4) tenemos que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| < \frac{2}{G^2} |g(x) - G| < \frac{2}{G^2} \frac{\varepsilon G^2}{2} = \varepsilon$$

**PROBLEMA 9.** (Ley del cociente). Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G \neq 0$ , probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{G}$$

**Solución**

Esta prueba será corta, debido a que la parte laboriosa del trabajo ya fue hecha. Por la ley del producto y por el problema anterior

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left[ f(x) \frac{1}{g(x)} \right] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \right] \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[ \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \right] = L \frac{1}{G} = \frac{L}{G} \end{aligned}$$

(1) **PROBLEMA 10.** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $A < L < B$ , probar que  $\exists \delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow A < f(x) < B$$

Solución

(2)  $A < L < B \Rightarrow B - L > 0$  y  $L - A > 0$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , dado  $\varepsilon = \text{Mínimo} \{B - L, L - A\}$ , existe un  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\varepsilon + L < f(x) < \varepsilon + L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(L - A) + L < f(x) < (B - L) + L \quad (-(L - A) \leq -\varepsilon, \varepsilon \leq B - L)$$

$$\Rightarrow A < f(x) < B$$

(4) **PROBLEMA 11.** Probar la ley de la raíz: Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, \text{ donde } L > 0 \text{ si } n \text{ es par.}$$

Solución

Caso 1.  $L = 0$  y  $n$  es impar.

Como  $\sqrt[n]{L} = \sqrt[n]{0} = 0$ , debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \sqrt[n]{f(x)} \right| < \varepsilon$$

Bien, como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , para  $\varepsilon_1 = \varepsilon^n > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon_1 = \varepsilon^n \Rightarrow \left| \sqrt[n]{f(x)} \right| < \varepsilon$$

Caso 2.  $L > 0$  y  $n$  cualquiera (par o impar).

Debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L} \right| < \varepsilon$$

Bien, por el problema anterior, con  $A = \frac{1}{2}L$  y  $B = \frac{3}{2}L$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow \frac{1}{2}L < f(x) < \frac{3}{2}L$$

y, por lo tanto,

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > 0$$

Por otro lado, usando la identidad:

$$p - q = \frac{p^n - q^n}{p^{n-1} + p^{n-2}q + \dots + pq^{n-2} + q^{n-1}}$$

con  $p = \sqrt[n]{f(x)}$  y  $q = \sqrt[n]{L}$ , se tiene

$$\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L} = \frac{f(x) - L}{\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}} + \sqrt[n]{(f(x))^{n-2}L} + \dots + \sqrt[n]{f(x)L^{n-2}} + \sqrt[n]{L^{n-1}}}$$

Cuando  $0 < |x - a| < \delta_1$ , por (1),  $f(x) > 0$ . Además  $L > 0$ . Luego, todas las raíces del denominador de la expresión (2) anterior son positivas en consecuencia

$$\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}} + \sqrt[n]{(f(x))^{n-2}L} + \dots + \sqrt[n]{f(x)L^{n-2}} + \sqrt[n]{L^{n-1}} \geq \sqrt[n]{L^{n-1}}$$

Luego, cuando  $0 < |x - a| < \delta_1$ ,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}} + \sqrt[n]{(f(x))^{n-2}L} + \dots + \sqrt[n]{f(x)L^{n-2}} + \sqrt[n]{L^{n-1}}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}}$$

De (2) y (3) obtenemos

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow \left| \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L} \right| \leq \frac{|f(x) - L|}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} |f(x) - L|$$

Ahora, como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , dado  $\varepsilon_1 = \varepsilon \sqrt[n]{L^{n-1}}$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \sqrt[n]{L^{n-1}}$$

En consecuencia, tomando  $\delta = \text{Mínimo} \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , de (4) y (5) se tiene que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$$

$$\left| \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} |f(x) - L| < \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} \varepsilon \sqrt[n]{L^{n-1}} = \varepsilon$$

Caso 3.  $L < 0$  y  $n$  es impar.

Sea  $g(x) = -f(x)$ . Se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = -\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -L > 0$$



(1)

Luego, por el caso 2 y considerando que  $n$  es impar, se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{g(x)} &= \sqrt[n]{-L} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{-f(x)} = \sqrt[n]{-L} \Rightarrow -\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{-L} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}\end{aligned}$$

**PROBLEMA 12.** Probar el teorema 2.4. (b)

1. Existan  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ .
  2.  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x$  en un intervalo abierto que contiene a  $a$ , excepto posiblemente en  $a$ .
- entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Solución

Paso 1. Probamos que  $0 \leq h(x) \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x)$

Sea  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ . Queremos probar que  $0 \leq L$ .

Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que  $L < 0$ . Luego,  $-L > 0$ .

Ahora, dado  $\epsilon = \frac{1}{2}(-L)$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned}0 < |x - a| < \delta &\Rightarrow |h(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{2}(-L) \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2}(-L) < h(x) - L < \frac{1}{2}(-L) \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2}(-L) + L < h(x) < \frac{1}{2}(-L) + L \\ &\Rightarrow \frac{3}{2}L < h(x) < \frac{1}{2}L \Rightarrow h(x) < 0 \quad \left(\frac{1}{2}L < 0\right)\end{aligned}$$

Este último resultado contradice la hipótesis:  $0 \leq h(x)$

Paso 2. Probamos que  $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow 0 \leq g(x) - f(x) \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow a} [g(x) - f(x)] \quad (\text{paso 1})$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

**PROBLEMA 13.** Probar el teorema del cambio de variable:

Si  $x = g(t)$  es tal que  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = a$  y  $g(t) \neq a$  para todo  $t \neq b$ ,

$$\text{entonces } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{t \rightarrow b} f(g(t))$$

## Solución

Sea  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . Debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |f(g(t)) - L| < \varepsilon$$

Bien, como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (1)$$

Por otro lado, como  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = a$ , dado  $\varepsilon_1 = \delta_1 > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |g(t) - a| < \varepsilon_1 = \delta_1 \quad (2)$$

Además, como  $g(t) \neq a$  para todo  $t \neq b$ , a la expresión (2) la podemos escribir así

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow 0 < |g(t) - a| < \varepsilon_1 = \delta_1 \quad (3)$$

Luego, de (3) y (1) por transitividad y considerando que  $x = g(t)$ , se tiene

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |f(g(t)) - L| < \varepsilon$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 2.2

En los problemas del 1 al 14 probar, mediante  $\varepsilon$ - $\delta$ , el límite indicado.

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 3) = 5$

2.  $\lim_{t \rightarrow 4} (9 - 3t) = -3$

3.  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x}{5} + 1 \right) = \frac{3}{5}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

5.  $\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = -8$

6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

7.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 6) = -3$

8.  $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + 3x - 4) = -5$

9.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{x - 1} = 2$

10.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{6}{4 - x} = -6$

11.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{5 - 2x} = \frac{2}{3}$

12.  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x + 5} = 3$

13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x| + 1} = 1$

14.  $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{1 + x}{x} = 4$

En los problemas del 15 al 19 probar, mediante  $\varepsilon$ - $\delta$ , el límite indicado.

15.  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ ,  $c$  es una constante.

16.  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

> 0 tal que

(1)

> 0 tal que

(2)

demostramos así:

(3)

), se tiene

dicado.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x}{5} + 1 \right) = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x + 5} = 3$$

ndicado.

a

$$17. \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n.$$

Sugerencia:  $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})$

$$18. \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}. \text{ Sugerencia: seguir el esquema del ejemplo 4 tomando } \beta = |a|/2$$

$$19. \text{ Probar: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|.$$

$$\text{Sugerencia: } ||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$$

En los problemas del 20 al 23, mediante teorema del emparedado, probar que:

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x| + 1} = 1$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} x \left[ 2 - \sqrt{2} \cos \left( \frac{1}{x^2} \right) \right] = 0$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+1| - |x-1|}{\sqrt{3x^2 + 1}} = 0$$

## SECCION 2.3

### LIMITES TRIGONOMETRICOS

**TEOREMA 2.7.**  $\forall a \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$\lim_{\theta \rightarrow a} \sin \theta = \sin a$$

$$\lim_{\theta \rightarrow a} \cos \theta = \cos a$$

#### Demostración

Debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que:

$$(1) \quad 0 < |\theta - a| < \delta \Rightarrow \left| \sin \theta - \sin a \right| < \varepsilon$$

$$(2) \quad 0 < |\theta - a| < \delta \Rightarrow \left| \cos \theta - \cos a \right| < \varepsilon$$

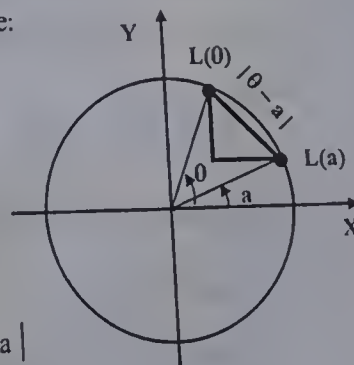
Observemos el triángulo rectángulo de la figura. Los extremos de la hipotenusa son los puntos:

$$L(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \text{ y } L(a) = (\cos a, \sin a).$$

La longitud del cateto vertical es  $|\sin \theta - \sin a|$

La longitud del cateto horizontal es  $|\cos \theta - \cos a|$

La longitud de la hipotenusa es  $d(L(\theta), L(a))$ , la distancia de  $L(\theta)$  a  $L(a)$ .





- 20 La longitud del arco entre  $L(a)$  y  $L(0)$  es  $|0 - a|$ .
26. Es claro que la longitud de la hipotenusa es menor que el arco entre  $L(a)$  y  $L(0)$ .
- Esto es,  $d(L(0), L(a)) < |0 - a|$ .
- 27 Como la longitud de cada cateto es menor que longitud de la hipotenusa, por transitividad se tiene que
- $|\sin 0 - \sin a| < |0 - a|$  y  $|\cos 0 - \cos a| < |0 - a|$ .
- Luego, si para el  $\epsilon > 0$  dado, tomamos  $\delta = \epsilon$ , entonces (1) y (2) quedan satisfechas.

**TEOREMA 2.8**

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

**Demostración**

Paso 1.  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

Sea  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  y, por tanto,  $\sin \theta > 0$

Observando la figura se ve que

Área del  $\triangle OQB$  < Área del sector circular  $OQB$  < Área del  $\triangle OQT$

Pero

$$\text{Área del } \triangle OQB = \frac{(1) \sin \theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2}$$

$$\text{Área del sector circular } OQB = \frac{1}{2}(\theta)(1)^2 = \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Área del } \triangle OQT = \frac{1}{2}(1) \tan \theta = \frac{\tan \theta}{2}$$

Luego,

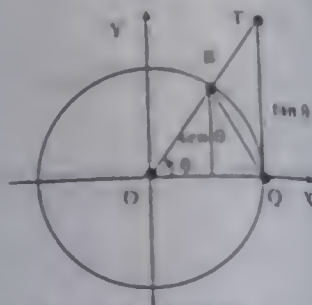
$$\frac{\sin \theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\tan \theta}{2}, \Rightarrow \sin \theta < \theta < \tan \theta$$

Dividimos entre  $\sin \theta$ . (recordar que  $\sin \theta > 0$ ).

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1 \quad (\text{invirtiendo fracciones})$$

Pero  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} 1 = 1$  y  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos \theta = \cos 0 = 1$  (Teo. 2.7)

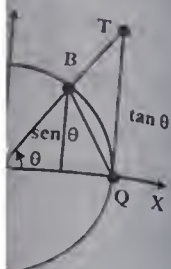
Luego, por el teorema del emparejado,  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$



entre  $L(a)$  y  $L(\theta)$ .

la hipotenusa, por

quedan satisfechas.



OQT.

Sea  $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ , y por tanto,  $\text{sen } \theta < 0$ .

Si  $\alpha = -\theta$ , entonces  $\alpha > 0$  y  $\alpha \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \theta \rightarrow 0^-$ . Luego,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{-\text{sen } \theta}{-\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(-\theta)}{-\theta} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} = 1$$

**EJEMPLO 1.** Probar que:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = a$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot ax = \frac{1}{a}, a \neq 0$

**Solución**

Si  $\theta = ax$ , entonces  $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \theta \rightarrow 0$ . Luego,

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} a \frac{\tan ax}{ax} = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } ax}{ax} \frac{1}{\cos ax} = a \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \frac{1}{\cos \theta} \\ &= a \left[ \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \right] \left[ \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta} \right] = a[1][1/1] = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 0} x \cot ax &= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos ax}{\text{sen } ax} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\text{sen } ax} \cos ax \\ &= \frac{1}{a} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\text{sen } \theta} \cos \theta = \frac{1}{a} \left[ \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\text{sen } \theta} \right] \left[ \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta \right] \\ &= \frac{1}{a} [1][1] = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

**TEOREMA 2.9**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$

**Demostración**

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x} &= \frac{1 - \cos x}{x} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \frac{\text{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\text{sen } x}{x} \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \right] \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} \right] = [1][0/2] = 0.$$

**EJEMPLO 2.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin(x - \pi/6)}{\cos x - \sqrt{3}/2}$

**Solución**

Sea  $y = x - \frac{\pi}{6}$ . Se tiene que:  $x = y + \frac{\pi}{6}$ ,  $x \rightarrow \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow y \rightarrow 0$  y

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin(x - \pi/6)}{\cos x - \sqrt{3}/2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\cos(y + \pi/6) - \sqrt{3}/2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{(\sqrt{3}/2)\cos y - (1/2)\sin y - \sqrt{3}/2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{(\sqrt{3}/2)[\cos y - 1] - (1/2)\sin y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin y}{y}}{(\sqrt{3}/2)\frac{\cos y - 1}{y} - (1/2)\frac{\sin y}{y}} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{3}/2)(0) - (1/2)(1)} = -2 \end{aligned}$$

### PROBLEMAS RESUELTOS 2.3

**PROBLEMA 1.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi}{2} x$

**Solución**

Si  $t = x - 1$ , entonces  $x = t + 1$  y  $t \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow 1$ . Luego,

$$(1-x) \tan \frac{\pi}{2} x = -t \tan \frac{\pi}{2} (t+1) = -t \tan \left( \frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= t \cot \left( \frac{\pi}{2} t \right)$$

$$= 1/(\pi/2) = 2/\pi$$

(Id. trig. 19)

(ejemplo 1, parte 2)



**PROBLEMA 2.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

**Solución**

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} &= \frac{(\cos mx - \cos nx)(\cos mx + \cos nx)}{x^2 (\cos mx + \cos nx)} \\ &= \frac{\cos^2 mx - \cos^2 nx}{x^2 (\cos mx + \cos nx)} = \frac{[1 - \sin^2 mx] - [1 - \sin^2 nx]}{x^2 (\cos mx + \cos nx)} \\ &= \frac{\sin^2 nx - \sin^2 mx}{x^2 (\cos mx + \cos nx)} = \left[ \frac{\sin^2 nx}{x^2} - \frac{\sin^2 mx}{x^2} \right] \frac{1}{\cos mx + \cos nx} \\ &= \left[ n^2 \left( \frac{\sin nx}{nx} \right)^2 - m^2 \left( \frac{\sin mx}{mx} \right)^2 \right] \frac{1}{\cos mx + \cos nx} \end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ n^2 \left( \frac{\sin nx}{nx} \right)^2 - m^2 \left( \frac{\sin mx}{mx} \right)^2 \right] &= [n^2 (1)^2 - m^2 (1)^2] = n^2 - m^2 \quad y \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos mx + \cos nx} &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} = \frac{n^2 - m^2}{2}$$

**PROBLEMA 3.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a \sin x - x \sin a}{a \cos x - x \cos a}$

**Solución**

Si  $x = y + a$ , entonces  $y = x - a$  y  $x \rightarrow a \Leftrightarrow y \rightarrow 0$ . Luego,

$$\begin{aligned} \frac{a \sin x - x \sin a}{a \cos x - x \cos a} &= \frac{a \sin (y+a) - (y+a) \sin a}{a \cos (y+a) - (y+a) \cos a} \\ &= \frac{(a \sin y \cos a + a \cos y \sin a) - (y \sin a + a \sin a)}{(a \cos y \cos a - a \sin y \sin a) - (y \cos a + a \cos a)} \\ &= \frac{(a \sin y \cos a - y \sin a) + (a \cos y \sin a - a \sin a)}{(a \cos y \cos a - a \cos a) - (a \sin y \sin a + y \cos a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(a \operatorname{sen} y \cos a - y \operatorname{sen} a) + (a \operatorname{sen} a)(\cos y - 1)}{(a \cos a)(\cos y - 1) - (a \operatorname{sen} y \operatorname{sen} a + y \cos a)} \\
 &= \frac{\frac{(a \operatorname{sen} y \cos a - y \operatorname{sen} a)}{y} + \frac{(a \operatorname{sen} a)(\cos y - 1)}{y}}{\frac{(a \cos a)(\cos y - 1)}{y} - \frac{(a \operatorname{sen} y \operatorname{sen} a + y \cos a)}{y}} \\
 &= \frac{(a \frac{\operatorname{sen} y}{y} \cos a - \operatorname{sen} a) + (a \operatorname{sen} a) \frac{(\cos y - 1)}{y}}{(a \cos a) \frac{(\cos y - 1)}{y} - (a \frac{\operatorname{sen} y}{y} \operatorname{sen} a + \cos a)}
 \end{aligned}$$

En esta última expresión, tomando el límite cuando  $y$  tiende a 0, se tiene

$$\frac{(a(1) \cos a - \operatorname{sen} a) + (a \operatorname{sen} a)(0)}{(a \cos a)(0) - (a(1) \operatorname{sen} a + \cos a)} = \frac{a \cos a - \operatorname{sen} a}{-a \operatorname{sen} a - \cos a} = \frac{\operatorname{sen} a - a \cos a}{\cos a + a \operatorname{sen} a}$$

Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} a}{a \cos x - x \cos a} = \frac{\operatorname{sen} a - a \cos a}{\cos a + a \operatorname{sen} a}$$

**PROBLEMA 4.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2}$

**Solución**

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2} &= \frac{[\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} a][\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a]}{[x - a][x + a]} \\
 &= \frac{[2 \operatorname{sen}(\frac{x+a}{2}) \cos(\frac{x-a}{2})][2 \cos(\frac{x+a}{2}) \operatorname{sen}(\frac{x-a}{2})]}{[x - a][x + a]} \quad (\text{Ident. 40 y 41})
 \end{aligned}$$

Si  $y = \frac{x-a}{2}$ , entonces  $x-a=2y$ ,  $x+a=2(y+a)$ ,  $\frac{x+a}{2} = y+a$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2} &= \frac{[2 \operatorname{sen}(y+a) \cos(y)][2 \cos(y+a) \operatorname{sen}(y)]}{[2y][2(y+a)]} \\
 &= \left[ \frac{\operatorname{sen}(y+a) \cos y}{y+a} \right] \left[ \cos(y+a) \frac{\operatorname{sen} y}{y} \right]
 \end{aligned}$$

Pero,  $x \rightarrow a \Leftrightarrow y \rightarrow 0$ . Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin(y+a) \cos y}{y+a} \right] \left[ \cos(y+a) \frac{\sin y}{y} \right] \\ &= \frac{\sin a \cos a}{a} = \frac{\sin 2a}{2a}\end{aligned}$$

**PROBLEMA 5.**

Hallar  $\lim_{\theta \rightarrow \pi/3} \frac{2 \cos^2 \theta - 5 \cos \theta + 2}{2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2}$ .

**Solución**

Si  $y = \cos \theta$ , entonces  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow y \rightarrow \frac{1}{2}$ . Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow \pi/3} \frac{2 \cos^2 \theta - 5 \cos \theta + 2}{2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2} &= \lim_{y \rightarrow 1/2} \frac{2y^2 - 5y + 2}{2y^2 + 3y - 2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1/2} \frac{(2y-1)(y-2)}{(2y-1)(y+2)} = \lim_{y \rightarrow 1/2} \frac{y-2}{y+2} = \frac{1/2-2}{1/2+2} = -\frac{3}{5}\end{aligned}$$

**PROBLEMAS PROPUESTOS 2.3**

En los problemas del 1 al 23 hallar el límite indicado.

1.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2}$

4.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} [\tan 2x - \sec 2x]$

5.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{\sin t}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/2)}{\sin x}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{x^2 - 2x + 1}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x - \sin 3x}$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

10.  $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$

11.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$

13.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - \sqrt{x}}$



$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$16. \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\tan^5 \theta - \tan^3 \theta}$$

$$18. \lim_{\theta \rightarrow a} \frac{\sin \theta - \sin a}{\sin(\theta/2) - \sin(a/2)}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{\tan(a+x) - \tan(a-x)}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \tan^2 x - \tan x - 1}{2 \tan^2 x - 3 \tan x + 1}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{(x - \pi/2)^2}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}{2 \sin^2 x + \sin x - 1}$$

## SECCION 2.4 CONTINUIDAD

Geoméricamente, la continuidad es fácil de explicar. Una función es continua si su gráfico no tiene saltos o interrupciones. En otras palabras, si su gráfico puede ser trazado sin levantar el lápiz del papel.

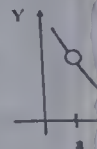
**DEFINICION.** Una función  $f$  es continua en un punto  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Esta definición es equivalente al cumplimiento de las tres condiciones siguientes:

1.  $f$  está definida en  $a$  ( $\exists f(a)$ )
2.  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

La definición de continuidad en  $a$ , al hablarnos de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , implícitamente exige que  $f$  debe estar definida en un intervalo abierto que contenga a  $a$ .

**DEFINICION:** Diremos que  $f$  es discontinua en el punto  $a$  o que  $a$  es un punto de discontinuidad de  $f$  si  $f$  no es continua en  $a$ . Esto equivale a decir que al menos una de estas tres condiciones exigidas en la definición no se cumple. Esto es:

1.  $f$  no está definida



Si  $f$  es discontinua en  $a$ , se llama discontinuidad removible. Se llama discontinuidad esencial si

La discontinuidad en  $a$  puede ser eliminada de salvar la discontinuidad.

La continuidad en  $a$  es un problema resuelto.

$f$  es continua en  $a$ .

### EJEMPLO 1.

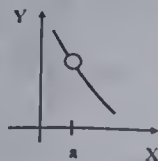
### EJEMPLO 2

Solución

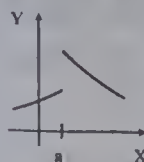
1. La primera condición no se cumple:  $f(4)$  no está definida.

La segunda condición se cumple.

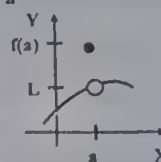
1.  $f$  no está definida en  $a$



2. No existe límite en  $a$



3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$



Si  $f$  es discontinua en  $a$  y existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , diremos que la discontinuidad en  $a$  es **removible**. Se llama así debido a que se puede redefinir a  $f$  en  $a$  de modo que la discontinuidad es eliminada. Es claro que la redefinición debe ser del modo siguiente:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

La discontinuidad es esencial si no existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . En este caso no hay modo de salvar la discontinuidad.

La continuidad se expresa también en términos de  $\epsilon$ - $\delta$ , como sigue (ver el problema resuelto 3):

$$f \text{ es continua en } a \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

**EJEMPLO 1.**

- El teorema 2.3 nos dice que toda función racional (en particular, todo polinomio) es continua en cualquier punto  $a$  de su dominio.
- El teorema 2.7 nos dice que las funciones seno y coseno son continuas en cualquier punto  $a$  de  $\mathbb{R}$ .

**EJEMPLO 2.**

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4}, & \text{si } x \neq 4 \\ 6, & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

- Probar que  $f$  tiene una discontinuidad removible en  $a = 4$ .
- Redefinir  $f$  para remover la discontinuidad.
- Probar que  $f$  es continua en cualquier punto  $a \neq 4$ .

**Solución**

- La primera condición de continuidad sí se cumple, ya que  $f$  está definida en 4. En efecto:  $f(4) = 6$ .

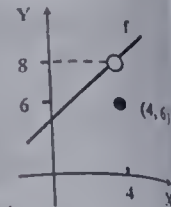
La segunda condición también se cumple. En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 8$$

Pero, la tercera condición no se cumple, ya que

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 8 \neq 6 = f(4)$$

En consecuencia,  $f$  tiene una discontinuidad removible en  $a = 4$ .



$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4}, & \text{si } x \neq 4 \\ 8, & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

3. Para los  $x \neq 4$ ,  $f$  es la función racional  $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ , cuyo denominador no se anula en ningún  $x \neq 4$ . Luego, por el ejemplo anterior,  $f$  es continua en cualquier punto  $x \neq 4$ .

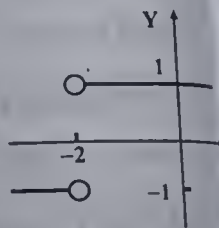
**EJEMPLO 3.** Probar que la función  $g(x) = \frac{x+2}{|x+2|}$  tiene una discontinuidad esencial en  $-2$ .

**Solución**  
Calculemos los límites unilaterales.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} (1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} (-1) = -1$$

Como estos límites unilaterales son distintos, concluimos que  $g$  no tiene límite en el punto  $-2$ . En consecuencia  $g$  tiene una discontinuidad esencial en este punto.



## CONTINUIDAD LATERAL

**DEFINICIÓN.** 1. Una función  $f$  es continua por la derecha en el punto  $a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

2. Una función  $f$  es continua por la izquierda en un punto  $a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Es evidente que:

$$f \text{ es continua en } a \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ es continua por la izquierda en } a \\ \text{y} \\ f \text{ es continua por la derecha en } a \end{cases}$$

### EJEMPLO 4

En efecto, t

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x)$$

### EJEMPLO

**Solución**

$$1. g_1(x)$$

### EJEMPLO

**Solución**

Se

Caso 1

Caso

DE

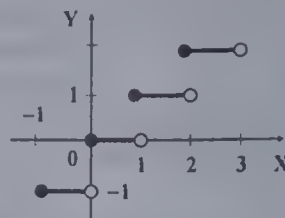


**EJEMPLO 4.** La función parte entera  $f(x) = [x]$  es continua por la derecha, pero discontinua por la izquierda en cualquier entero  $n$ .

En efecto, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n = f(n)$$

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1 \neq f(n)$$



**EJEMPLO 5.** Sea la función del ejemplo 3:  $g(x) = \frac{x+2}{|x+2|}$

1. Redefinir  $g$  para que ésta sea continua por la derecha en  $a = -2$

2. Redefinir  $g$  para que ésta sea continua por la izquierda en  $a = -2$

**Solución**

$$1. g_1(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{|x+2|}, & \text{si } x \neq -2 \\ 1, & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

$$2. g_2(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{|x+2|}, & \text{si } x \neq -2 \\ -1, & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

**EJEMPLO 6.** Probar que la función valor absoluto  $f(x) = |x|$  es continua en cualquier punto de  $\mathbb{R}$ .

**Solución**

Sea  $a$  un punto cualquiera de  $\mathbb{R}$ .

**Caso 1.**  $a = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$ , ya que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = |0| \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = -0 = 0 = |0|$$

**Caso 2.**  $a \neq 0$ :  $f(x) = |x|$  es continua en  $a$  debido a que, cerca de  $a$ , la función  $f$  coincide con el polinomio  $p(x) = x$ , si  $a > 0$ ; o con  $q(x) = -x$ , si  $a < 0$ .

## CONTINUIDAD EN INTERVALOS

- DEFINICION.**
1. Una función  $f$  es continua en el intervalo abierto  $(a, b)$  si  $f$  es continua en todo punto de este intervalo.
  2. Una función  $f$  es continua en el intervalo  $[a, b)$  si  $f$  es continua en el intervalo abierto  $(a, b)$  y  $f$  es continua por la derecha en  $a$ .

3. Una función  $f$  es continua en el intervalo  $(a, b]$  si  $f$  es continua en el intervalo abierto  $(a, b)$  y  $f$  es continua por la izquierda en  $b$ .
4. Una función  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  si  $f$  es continua en el intervalo abierto  $(a, b)$  y  $f$  es continua a la derecha en  $a$  y continua a la izquierda en  $b$ .

**EJEMPLO 7.**

- a. Una función polinomial y las funciones seno y coseno son continuas en el intervalo abierto  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ ; o sea, son continuas en su dominio.
- b. La función parte entera  $f(x) = [x]$  es continua en todos los intervalos de la forma  $[n, n+1)$ , donde  $n$  es un entero.

**EJEMPLO 8.**

Probar que la función raíz cuadrada  $f(x) = \sqrt{x}$  es continua en su dominio; o sea, es continua en el intervalo  $[0, +\infty)$ .

**Solución**

Debemos probar que  $f$  es continua en todo punto  $a$  del intervalo abierto  $(0, +\infty)$  y que  $f$  es continua por la derecha en  $a = 0$ .

$$\text{Bien, si } a > 0, \text{ por la ley de la raíz, } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} x} = \sqrt{a}.$$

Esto es, la función  $f(x) = \sqrt{x}$  es continua en  $a$ .

$$\text{Por otro lado, si } a = 0, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = \sqrt{0} = 0$$

Esto es, la función  $f(x) = \sqrt{x}$  es continua por la derecha en  $0$ .

## CONTINUIDAD Y OPERACIONES CON FUNCIONES

Las leyes de los límites, enunciadas en el teorema 2.2, nos dicen que el proceso de tomar límite respeta las operaciones algebraicas. Esta propiedad valiosa se traslada a la continuidad y se obtiene que ésta también respeta las operaciones algebraicas. Gracias a este resultado podemos construir complicadas funciones continuas a partir de funciones simples.

**TEOREMA 2.10**

Sea  $c$  una constante y sean  $f$  y  $g$  dos funciones continuas en el punto  $a$ . Entonces las siguientes funciones también son continuas en  $a$ .

1.  $f \pm g$
2.  $cf$
3.  $fg$
4.  $\frac{f}{g}$ , si  $g(a) \neq 0$

**Demostración**

Estos resultados correspondientes

Por ser  $f$  y

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$$

Esto nos dice

**EJEMPLO 9****Solución**

Por el ejemplo  
Veamos las otras

Como tan  
parte 4 del teo  
tales que cos x

En forma ar

El siguiente  
similar a la d

**TEOREMA**

En el cap  
conseguir qu  
es  $\mathbb{R}$ . Por ta  
exponencial

Por otro  
continua es  
modo sigui

Estos resultados son consecuencias inmediatas de las leyes de los límites correspondientes. Así, (1) es consecuencia de la ley de la suma. En efecto:

Por ser  $f$  y  $g$  continuas en  $a$  se tiene:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ .

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \pm \left[ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right] = f(a) \pm g(a)$$

Esto nos dice que  $f \pm g$  es continua en  $a$ .

**EJEMPLO 9.** Probar que las funciones trigonométricas son continuas en su dominio

**Solución**

Por el ejemplo 1 ya sabemos que el seno y el coseno tienen la propiedad indicada. Veamos las otras.

Como  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  es el cociente de dos funciones continuas, entonces, por la parte 4 del teorema anterior, la función  $y = \tan x$  es continua en todos los puntos  $x$  tales que  $\cos x \neq 0$ , que son precisamente los puntos del dominio de  $y = \tan x$ .

En forma análoga se procede con  $y = \cot x$ ,  $y = \sec x$  e  $y = \operatorname{cosec} x$ .

El siguiente resultado es consecuencia de la ley de la raíz y su demostración es similar a la dada en el ejemplo 8.

- TEOREMA 2.11**
1. Si  $n$  es par, entonces la función  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  es continua en el intervalo  $[0, +\infty)$ ; o sea, es continua en todo su dominio.
  2. Si  $n$  es impar, entonces la función  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  es continua en  $\mathbb{R}$ ; o sea, es continua en todo su dominio.

### CATALOGO DE FUNCIONES CONTINUAS

En el capítulo anterior, para definir  $a^x$  con  $x$  irracional, nos guió la idea de conseguir que la función exponencial  $f(x) = a^x$  sea continua en todo su dominio, que es  $\mathbb{R}$ . Por tal razón, agregamos a nuestra lista de funciones continuas a la función exponencial

Por otro lado, también afirmamos que la función inversa de una función continua es continua. Esta afirmación la podemos justificar intuitivamente, del modo siguiente. La gráfica de una función continua  $f$  no tiene saltos ni

4.  $\frac{f}{g}$ , si  $g(a) \neq 0$



interrupciones. La gráfica de la inversa  $f^{-1}$  se obtiene reflejando la gráfica de  $f$  en la recta diagonal  $y = x$ . En consecuencia, la gráfica de  $f^{-1}$  tampoco tiene saltos o interrupciones. Esto nos dice que  $f^{-1}$  es continua. Este resultado es importante, por lo que lo hacemos resaltar presentándolo en el siguiente teorema, cuya demostración formal la omitimos.

**TEOREMA 2.12**

Sea  $f$  una función definida en un intervalo  $I$ , donde  $f$  es inyectiva. Si  $f$  es continua en  $I$ , entonces la función inversa  $f^{-1}$  es continua en  $f(I)$ .

El resultado anterior nos permite concluir que la función logaritmo  $y = \log_a x$  es continua, por ser inversa de la función exponencial,  $y = a^x$ . En forma análoga, concluimos que las funciones trigonométricas inversas son continuas.

A continuación presentamos un pequeño, pero importante, catálogo de funciones continuas.

Las siguientes funciones son continuas en su dominio:

- |                                       |                              |
|---------------------------------------|------------------------------|
| 1. Polinomios                         | 2. Funciones racionales      |
| 3. Funciones radicales                | 4. Funciones trigonométricas |
| 5. Funciones trigonométricas Inversas | 5. Funciones exponenciales   |
| 6. Funciones logarítmicas             | 7. Función valor absoluto    |

El siguiente teorema es un caso particular del teorema de cambio de variable o teorema del límite de una composición de funciones. La demostración la presentamos en el problema resuelto 4.

**TEOREMA 2.13**

(Teorema de sustitución). Si  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = L$  y  $f$  es continua en  $L$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = f(L) = f\left(\lim_{t \rightarrow b} g(t)\right)$$

**EJEMPLO 10.**

a. Si  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = L$ , probar que  $\lim_{t \rightarrow b} e^{g(t)} = e^L$

b. Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$

c. Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} \right)$

Solución

a. Sigue inmediatamente de la definición de límite de la función exponencial  $f(x) = e^x$ .

b. Este límite es una indeterminación de tipo  $\frac{0}{0}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} =$$

c. Tomando en cuenta que  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} =$$

Una consecuencia importante de este teorema es el siguiente: si  $f$  es una función continua en  $L$ , entonces la operación de composición con  $f$  es continua en  $L$ .

**TEOREMA 2.14****Demostración**

Por ser  $g$  continua en  $b$ , tenemos que

Reemplazando en la definición de límite de  $f$  en  $L$ , obtenemos

Esto nos dice que  $\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = f(L)$ .

**EJEMPLO 11.****Solución**

Si  $g(x) = \ln x$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \ln 1 = 0$ .

(f o g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x) = e^{\ln x} = x.

La función  $g$  es continua en  $1$ , y la función  $f$  es continua en  $0$ .

La función  $g$  es continua en  $1$ , y la función  $f$  es continua en  $0$ .

a. Sigue inmediatamente del teorema anterior, tomando en cuenta que la función exponencial  $f(x) = e^x$  es continua.

b. Este límite es una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ . Tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^x + 1 = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

c. Tomando en cuenta que la función logarítmica  $f(x) = \ln x$  es continua, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} \right) = \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} \right) = \ln(2) = \ln 2$$

Una consecuencia del teorema anterior, que es inmediata pero de importancia capital, es el siguiente resultado, que dice que la continuidad también respeta la operación de composición de funciones.

**TEOREMA 2.14** Si  $g$  es continua en  $b$  y  $f$  es continua en  $g(b)$ , entonces la función compuesta  $f \circ g$  es continua en  $b$ .

**Demostración**

Por ser  $g$  continua en  $b$  se tiene que  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = g(b)$

Reemplazando este límite en el teorema anterior obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = f(g(b)) = (f \circ g)(b).$$

Esto nos dice que  $f \circ g$  es continua en  $b$ .

**EJEMPLO 11.** Probar que la función  $h(x) = |\ln x|$  es continua en  $(0, +\infty)$ .

**Solución**

Si  $g(x) = \ln x$  y  $f(x) = |x|$ , tenemos que  $h = f \circ g$ . En efecto,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x) = |\ln x| = h(x).$$

La función  $g(x) = \ln x$  es una función continua en  $(0, +\infty)$  y que la función valor absoluto  $f(x) = |x|$  es continua en  $\mathbb{R}$ . Por tanto, por el teorema anterior,  $h = f \circ g$  también es continua en  $(0, +\infty)$ .

Terminamos esta sección enunciando un teorema que proporciona una propiedad importante de las funciones continuas. Omitimos la demostración por estar fuera del alcance del presente texto.

**TEOREMA 2.15**

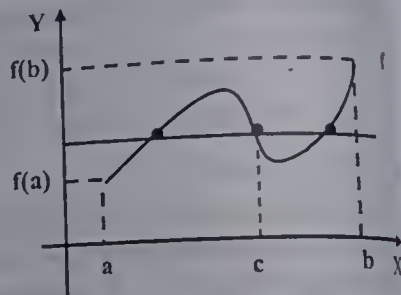
(Teorema del valor intermedio). Si  $f$  es una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  y si  $K$  es un número que está estrictamente entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , o sea

$$f(a) < K < f(b) \quad \text{ó} \quad f(b) < K < f(a),$$

entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f(c) = K$ .

Gráficamente, este teorema nos dice que cualquier recta horizontal  $y = K$  que está comprendida entre las rectas horizontales  $y = f(a)$  e  $y = f(b)$  debe cortar al gráfico de  $f$  en, por lo menos, un punto  $(c, f(c))$ , donde  $a < c < b$ .

En el siguiente ejemplo usamos este teorema para localizar las raíces de una ecuación.



**EJEMPLO 12.**

Dada la ecuación  $x^3 + 3x - 5 = 0$

- Probar que esta ecuación tiene una raíz entre 1 y 2.
- Hallar una aproximación de esta raíz con un error menor que 0,1.

**Solución**

- La función  $f(x) = x^3 + 3x - 5$ , por ser un polinomio, es continua en todo  $\mathbb{R}$  y, en particular, es continua en el intervalo cerrado  $[1, 2]$ .

Por otro lado,  $f(1)$  es negativo y  $f(2)$  positivo. En efecto:

$$f(1) = 1^3 + 3(1) - 5 = -1 \quad \text{y}$$

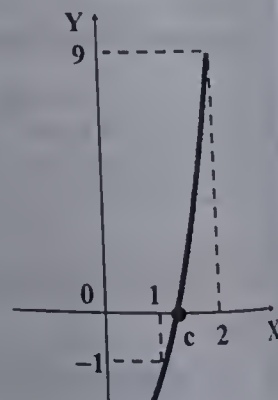
$$f(2) = 2^3 + 3(2) - 5 = 9$$

Luego,  $f(1) < 0 < f(2)$  y, por el teorema del valor intermedio con  $K = 0$ , existe un  $c$  entre 1 y 2 tal que  $f(c) = 0$ , esto es,

$$1 < c < 2 \quad \text{y} \quad c^3 + 3c - 5 = 0.$$

Es decir  $c$  es una raíz de la ecuación dada.

- Como una primera aproximación a la raíz podemos escoger a 1 ó a 2. Elegimos a 1 por estar  $f(1) = -1$  más cerca de 0 que  $f(2) = 9$ . Esta escogencia de 1 tiene un error menor que 1. Es decir,  $|1 - c| < 1$ .



Para conseguir el valor intermedio:

Evaluamos la evaluación en el intervalo  $[1, 2]$ . Elegimos a 1. Si se quiere

**PROBLEMA**

**Solución**

La función  $f$  es continua

$f$  es continua

En consecuencia

**PROBLEMA**

$f$  es continua

**Solución**

Por lo tanto



Terminamos esta sección enunciando un teorema que proporciona una propiedad importante de las funciones continuas. Omitimos la demostración por estar fuera del alcance del presente texto.

**TEOREMA 2.15**

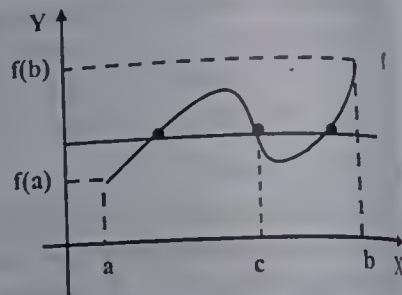
(Teorema del valor intermedio). Si  $f$  es una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  y si  $K$  es un número que está estrictamente entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , o sea

$$f(a) < K < f(b) \quad \text{ó} \quad f(b) < K < f(a),$$

entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f(c) = K$ .

Gráficamente, este teorema nos dice que cualquier recta horizontal  $y = K$  que está comprendida entre las rectas horizontales  $y = f(a)$  e  $y = f(b)$  debe cortar al gráfico de  $f$  en, por lo menos, un punto  $(c, f(c))$ , donde  $a < c < b$ .

En el siguiente ejemplo usamos este teorema para localizar las raíces de una ecuación.



**EJEMPLO 12.**

Dada la ecuación  $x^3 + 3x - 5 = 0$

- Probar que esta ecuación tiene una raíz entre 1 y 2.
- Hallar una aproximación de esta raíz con un error menor que 0,1.

**Solución**

- La función  $f(x) = x^3 + 3x - 5$ , por ser un polinomio, es continua en todo  $\mathbb{R}$  y, en particular, es continua en el intervalo cerrado  $[1, 2]$ .

Por otro lado,  $f(1)$  es negativo y  $f(2)$  positivo. En efecto:

$$f(1) = 1^3 + 3(1) - 5 = -1 \quad \text{y}$$

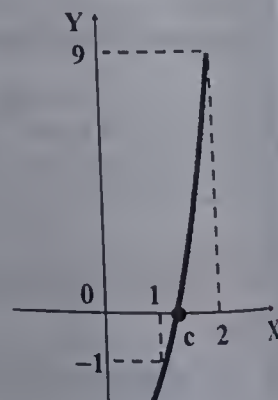
$$f(2) = 2^3 + 3(2) - 5 = 9$$

Luego,  $f(1) < 0 < f(2)$  y, por el teorema del valor intermedio con  $K = 0$ , existe un  $c$  entre 1 y 2 tal que  $f(c) = 0$ , esto es,

$$1 < c < 2 \quad \text{y} \quad c^3 + 3c - 5 = 0.$$

Es decir  $c$  es una raíz de la ecuación dada.

- Como una primera aproximación a la raíz podemos escoger a 1 ó a 2. Elegimos a 1 por estar  $f(1) = -1$  más cerca de 0 que  $f(2) = 9$ . Esta escogencia de 1 tiene un error menor que 1. Es decir,  $|1 - c| < 1$ .



Para conseguir el valor intermedio:

Evaluamos la evaluación en el intervalo  $[1, 2]$  es  $1,1 < c < 1,2$ . Elegimos a 1. Si se quiere

**PROBLEMA**

**Solución**

La función  $f$  es continua

$f$  es continua

En consecuencia

**PROBLEMA**

$f$  es continua

**Solución**

Por lo tanto

( $\Rightarrow$ ) Por ser  $f$  continua en  $a$ , se cumple (1) y, además,  $f$  está definida en  $a$ . En esta situación podemos eliminar el requerimiento  $0 < |x - a|$  de (2), ya que para  $x = a$  se cumple que  $|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ . Pero, eliminado este requerimiento, (1) se convierte en:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon) \quad (2)$$

( $\Leftarrow$ ) Es obvio, ya que (2)  $\Rightarrow$  (1).

**PROBLEMA 3.** Probar que si  $f$  es continua en  $a$  y  $f(a) > 0$ , entonces existe un intervalo abierto  $(a - \delta, a + \delta)$  tal que

$$f(x) > 0, \forall x \in (a - \delta, a + \delta).$$

**Solución**

Por ser  $f$  continua en  $a$ , para  $\varepsilon = \frac{1}{2}f(a)$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon = \frac{1}{2}f(a)$$

O sea

$$-\delta < x - a < \delta \Rightarrow -\frac{1}{2}f(a) < f(x) - f(a) < \frac{1}{2}f(a)$$

De donde,

$$a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow \frac{1}{2}f(a) < f(x) < \frac{3}{2}f(a)$$

Por tanto, por ser  $\frac{1}{2}f(a) > 0$ ,

$$a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > 0$$

**PROBLEMA 4.** Probar el teorema 2.13. Si  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = L$  y si  $f$  es continua en  $L$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = f(L) = f\left(\lim_{t \rightarrow b} g(t)\right)$$

**Solución**

Debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |f(g(t)) - f(L)| < \varepsilon$$

Bien, como  $f$  es continua en  $L$ , por el problema resuelto 3, para el  $\varepsilon > 0$  dado existe un  $\delta_1 > 0$  tal que

$$|x - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(L)| < \varepsilon \quad (1)$$

Por otra parte, como  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = L$ , para  $\varepsilon_1 = \delta_1$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |g(t) - L| < \varepsilon_1 = \delta_1 \quad (2)$$

De (1) y (2), tomando  $x = g(t)$ , se tiene que

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |f(g(t)) - f(L)| < \varepsilon$$

**PROBLEMA 5.** Sea  $f$  una función con dominio  $\mathbb{R}$ , tal que

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Si  $f$  es continua en 0, probar que  $f$  es continua en todo punto  $a \in \mathbb{R}$ .

**Solución**

Debemos probar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

En primer lugar tenemos que  $f(0) = 0$ . En efecto,

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Por otro lado, por ser  $f$  continua en 0,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ .

Ahora bien, haciendo el cambio de variable  $x = a + h$  se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(a) + f(h)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(a) + 0 = f(a). \end{aligned}$$

**PROBLEMA 6.** (Teorema del punto fijo). Sea  $f$  una función continua en el intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Probar que:

$$0 \leq f(x) \leq 1, \quad \forall x \in [0, 1] \Rightarrow f \text{ tiene un punto fijo.}$$

Es decir, existe un  $c$  en  $[0, 1]$  tal que  $f(c) = c$

**Solución**

Caso 1.  $f(0) = 0$  ó  $f(1) = 1$ .



En este caso tomamos  $c = 0$  ó  $c = 1$  y la proposición se cumple.

Caso 2.  $f(0) \neq 0$  y  $f(1) \neq 1$ .

Tomemos la función  $g(x) = x - f(x)$ . Por ser  $f$  continua en  $[0, 1]$ ,  $g$  también lo es. Además,

$$g(0) = 0 - f(0) = -f(0) < 0 \quad \text{y} \quad g(1) = 1 - f(1) > 0$$

Luego, por el teorema del valor intermedio, existe un  $c$  en  $(0, 1)$  tal que

$$g(c) = 0 \Rightarrow c - f(c) = 0 \Rightarrow f(c) = c.$$

### PROBLEMAS PROPUESTOS 2.4

De aquí.

1. Probar que la función  $f$  es continua en el punto 2. 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 4, & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

2. Definir  $g(0)$  para que la función  $g$  sea continua en 0. 
$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

3. Probar que la siguiente función es discontinua en el punto 3 y que 3 es el único punto de discontinuidad.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & \text{si } x < 3 \\ 4, & \text{si } x = 3 \\ -x + 8, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

En los problemas del 4 al 11, hallar los puntos de discontinuidad de las funciones dadas, indicando el tipo de discontinuidad.

4.  $f(x) = \frac{1}{x}$

5.  $g(x) = \frac{1}{x+2}$

6.  $h(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

7.  $f(x) = \frac{x-1}{x-5}$

8.  $g(x) = \frac{x+2}{(x-3)(x+8)}$

9.  $h(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x-2}}$

10.  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{|x-3|}$

11.  $g(x) = \frac{|x-1|}{(x-1)^3}$

En los problemas del 12 al 15, graficar la función dada y localizar, mirando el gráfico, los puntos de discontinuidad.

12.  $f(x) =$

14.  $h(x) =$

En los p  
continuas

16.  $g(x) =$

18.  $f(x) =$

En los  
dada es d

20.  $f(x) =$

22.  $h(x) =$

24.  $g(x) =$

25.  $f(x) =$

Sug

En lo  
interval

26.  $x^3 +$

28.  $\cos$

29. Sea

Si

$$12. f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 4 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

$$13. g(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x < -2 \\ 2x - 1 & \text{si } -2 \leq x < 4 \\ -\frac{x}{2} + 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$$14. h(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$15. f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

En los problemas del 16 al 19, hallar  $a$  y  $b$  para que las funciones dadas sean continuas en sus dominios.

$$16. g(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$17. h(x) = \begin{cases} -\sin^2 x & \text{si } x < \pi/4 \\ ax + b & \text{si } \pi/4 \leq x \leq \pi/3 \\ \cos^2 x & \text{si } x > \pi/3 \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} -2\sin x & \text{si } x \leq -\pi/2 \\ a \sin x + b & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos x & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}$$

$$19. g(x) = \begin{cases} a - x^2 \sin \frac{\pi}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ b, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En los problemas del 20 al 25, hallar el conjunto de puntos donde la función dada es discontinua.

$$20. f(x) = [x + 1/2]$$

$$21. g(x) = [x/4]$$

$$22. h(x) = 1/[x]$$

$$23. g(x) = [\sqrt{1-x^2}]$$

$$24. g(x) = 1 - x + [x] - [1-x]. \text{ Sugerencia: } g(x) = \begin{cases} 1-x+2n, & \text{si } n < x < n+1 \\ n, & \text{si } x = n \end{cases}$$

$$25. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Sugerencia: En todo intervalo abierto siempre existe un racional y un irracional.

En los problemas del 26 al 28, probar que la ecuación dada tiene una raíz en el intervalo indicado. Aproximar la raíz con un error menor que 0,1.

$$26. x^3 + 1 = 3x, \text{ en } [1, 2]$$

$$27. 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2 = 0, \text{ en } [-2, -1]$$

$$28. \cos x = x, \text{ en } [0, 1]$$

29. Sea  $f$  una función con dominio  $\mathbb{R}$  tal que

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Si  $f$  es continua en 0, probar que  $f$  es continua en todo punto  $a$ .

## SECCION 2.5

### LÍMITES INFINITOS Y ASINTOTAS VERTICALES

Consideremos la función  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ ,

cuyo gráfico es el adjunto.

Queremos analizar el comportamiento de esta función cuando  $x$  se aproxima a 1, por la izquierda y por la derecha.

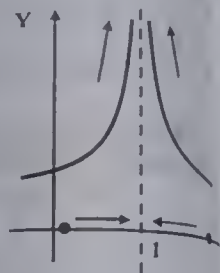
La siguiente tabla nos da los valores de  $f(x)$  para algunos valores de  $x$  cercanos a 1, tanto por la izquierda como por la derecha.

$x$	0,8	0,9	0,99	0,999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,001	1,01	1,1	1,2
$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$	25	100	10.000	1.000.000	$\rightarrow +\infty \leftarrow$	1.000.000	10.000	100	25

Observamos que a medida que  $x$  se aproxima a 1 por ambos lados, el valor de  $f(x)$  crece ilimitadamente. Este hecho lo expresamos diciendo que el límite de

$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$  cuando  $x$  tiende a 1 es  $+\infty$ , y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$



Ahora, consideremos esta otra función,  $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$

La tabla correspondiente aparece a continuación. Ahora observemos que a medida que  $x$  se aproxima a 1 por ambos lados, el valor de  $f(x)$  decrece ilimitadamente. Este hecho lo expresamos diciendo

que el límite de  $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$  cuando  $x$  tiende a 1

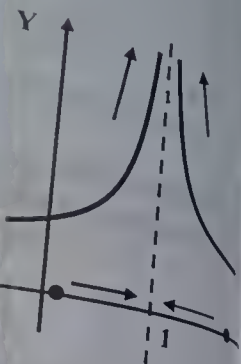
es  $-\infty$ , y se escribe  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$



$x$	0,8	0,9	0,99	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,001	1,01	1,1	1,2
$f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$	-25	-100	-10.000	$\rightarrow -\infty \leftarrow$	-1.000.000	-10.000	-100	-25



VERTICALES

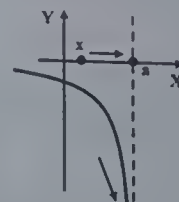
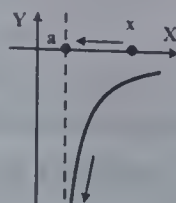
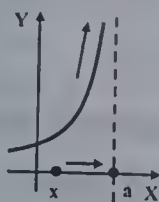
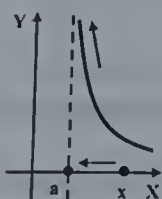


En resumen, tenemos las siguientes definiciones informales. Se supone que la función  $f$  está definida en un intervalo abierto que contiene al punto  $a$ , excepto posiblemente en el mismo  $a$ .

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$  Los valores de  $f(x)$  pueden hacerse arbitrariamente grandes, tomando a  $x$  suficientemente cerca de  $a$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$  Los valores de  $f(x)$  pueden hacerse arbitrariamente grandes negativamente ( $|f(x)|$  es grande y  $f(x) < 0$ ), tomando a  $x$  suficientemente cerca de  $a$ .

Similarmente se definen los límites siguientes límites unilaterales:

3.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
4.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$
5.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$
6.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$



Es evidente que

7.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$

**EJEMPLO 1.**

Hallar los límites unilaterales de la siguiente función en los puntos de discontinuidad.  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$

**Solución**

Esta función racional tiene un único punto de discontinuidad, que es 2. Luego, nos piden hallar

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

Analicemos los signos del numerador y del denominador para puntos  $x$  cercanos a 2. En cuanto al numerador tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 3) = 2^2 + 2(2) - 3 = 5$$

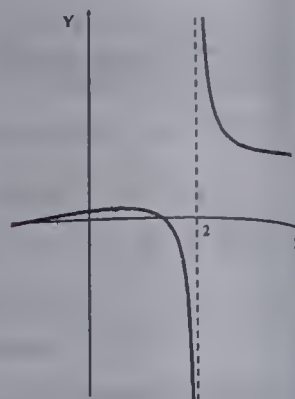
Como este límite es 5, para los puntos  $x$  cercanos a 2, ya sea por la derecha o por la izquierda, el valor del numerador se mantiene cerca de 5 y por lo tanto, éste tiene signo positivo.

Ahora, si  $x$  tiende a 2 por la derecha,  $x - 2$  es positivo y, como el numerador es positivo, el signo del cociente  $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$  es positivo. Además, como  $x - 2$  tiende a 0 cuando  $x$  tiende a 2 por la derecha, concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = +\infty$$

Por otro lado, si  $x$  tiende a 2 por la izquierda,  $x - 2$  es negativo y, como el numerador es positivo, el cociente  $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$  es negativo. Además, como  $x - 2$  tiende a 0 cuando  $x$  tiende a 2 por la izquierda, concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = -\infty$$



### ASINTOTAS VERTICALES

En el ejemplo anterior, la recta vertical  $x = 2$ , comparada con el gráfico de la función, tiene una característica muy especial: La distancia de un punto  $P = (x, f(x))$  del gráfico a la recta tiende a 0, a medida que  $x$  tiende a 0. Por esta razón se dice que la recta  $x = 2$  es una asíntota (vertical) de la gráfica de la función  $f$ . En general, tenemos la siguiente definición.

**DEFINICIÓN.** Diremos que la recta  $x = a$  es una asíntota vertical del gráfico de la función  $f$ , si se cumple al menos una de los cuatro límites siguientes:

1.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ , 2.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ , 3.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ , 4.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

**EJEMPLO 2.** La recta  $x = 2$  es una asíntota vertical del gráfico de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$$

En efecto, ya vimos que  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = -\infty$

### DEFINICIÓN

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Para todo  $\epsilon > 0$

2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Para todo  $\epsilon > 0$

Las distancias entre los puntos del gráfico y la recta  $x = a$  son infinitas.

El siguiente teorema establece que si una función tiene una asíntota vertical, entonces no tiene límite en ese punto.

### TEOREMA

1.  $L > 0$

2.  $L > 0$

3.  $L < 0$

4.  $L < 0$

El teorema anterior establece que si una función tiene una asíntota vertical, entonces no tiene límite en ese punto.

Demostremos esto.

Haremos un problema para el lector.

**DEFINICION.** (Rigurosa de límite infinito). Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto  $a$ , excepto posiblemente en  $a$ .

$$1. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

Para todo  $M > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

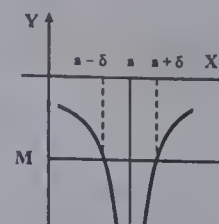
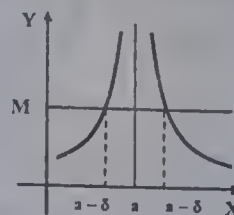
$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

Para todo  $M < 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$$

Las definiciones rigurosas de los límites unilaterales infinitos son presentadas en el problema resuelto 4.



El siguiente teorema nos proporciona resultados rápidos en el cálculo de límites infinitos. Las expresiones colocadas entre los paréntesis son, reglas nemotécnicas.

**TEOREMA 2.16** Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  ✓

$$1. L > 0 \text{ y } g(x) \rightarrow 0 \text{ positivamente} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \quad \left( \frac{+}{0^+} = +\infty \right)$$

$$2. L > 0 \text{ y } g(x) \rightarrow 0 \text{ negativamente} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \quad \left( \frac{+}{0^-} = -\infty \right)$$

$$3. L < 0 \text{ y } g(x) \rightarrow 0 \text{ positivamente} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \quad \left( \frac{-}{0^+} = -\infty \right)$$

$$4. L < 0 \text{ y } g(x) \rightarrow 0 \text{ negativamente} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \quad \left( \frac{-}{0^-} = +\infty \right)$$

El teorema también es válido si se cambia  $x \rightarrow a$  por  $x \rightarrow a^+$  ó  $x \rightarrow a^-$ .

#### Demostración

Haremos una "demostración" informal, siguiendo el esquema del ejemplo 1. Sólo probaremos 1, ya que la prueba de los otros casos es análoga y se deja como ejercicio al lector. La prueba rigurosa puede verse en el problema resuelto 3.



1. Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $L > 0$ , para los  $x$  próximos a  $a$  tenemos que  $f(x) > 0$ . Por otro lado, como  $g(x) \rightarrow 0$  positivamente, para los  $x$  próximos a  $a$  tenemos que  $g(x) > 0$  y  $g(x)$  es cercano a 0. Luego, cuando  $x$  tiende a  $a$ , el cociente  $\frac{f(x)}{g(x)}$  es positivo y crece ilimitadamente. Esto es,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ .

Como un caso particular notable del teorema anterior se tiene:

**TEOREMA 2.17** Si  $n$  es entero positivo, entonces

$$1. \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \quad 2. \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Los resultados establecidos en el siguiente teorema son intuitivamente evidentes. Una demostración parcial la hacemos en el problema resuelto 5. El resto lo dejamos a cargo del lector.

**TEOREMA 2.18** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ , entonces

$$1. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \pm\infty, \quad (\pm\infty + L = \pm\infty) \text{ ó } (\pm\infty - L = \pm\infty)$$

$$2. L > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \pm\infty \quad ((\pm\infty)(+) = \pm\infty)$$

$$L < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \mp\infty \quad ((\pm\infty)(-) = \mp\infty)$$

$$3. L > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \pm\infty \quad \left( \frac{\pm\infty}{+} = \pm\infty \right)$$

$$L < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \mp\infty \quad \left( \frac{\pm\infty}{-} = \mp\infty \right)$$

$$4. L \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{g(x)}{f(x)} \right] = 0 \quad \left( \frac{L}{\pm\infty} = 0 \right)$$

**EJEMPLO 3.**

Solución

a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}$

a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$

Ar

entero

ver  
téc  
res

a.

**EJEMPLO 3.**

Probar que:

a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cosec} x = +\infty$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{cosec} x = -\infty$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = +\infty$

d.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cot x = -\infty$

Luego, la recta  $x = 0$  es una asíntota vertical de  $y = \cot x$  y de  $y = \operatorname{cosec} x$

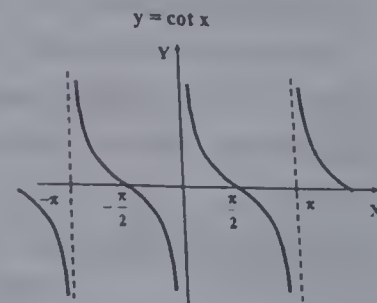
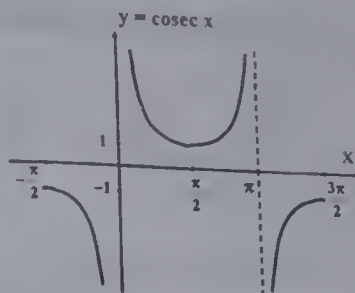
**Solución**

a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cosec} x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} = \left( \frac{1}{0^+} \right) = +\infty$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{cosec} x = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sin x} = \left( \frac{1}{0^-} \right) = -\infty$

a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \left( \frac{1}{0^+} \right) = +\infty$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{\sin x} = \left( \frac{1}{0^-} \right) = -\infty$



Argumentos similares a los prueban que las rectas  $x = n\pi$ , donde  $n$  es cualquier entero, son asíntotas verticales de  $y = \cot x$  y de  $y = \operatorname{cosec} x$ .

### OTRAS FORMAS INDETERMINADAS

Presentamos dos formas indeterminadas más:  $\frac{\infty}{\infty}$  y  $\infty - \infty$ . En esta parte sólo veremos casos simples de estas formas. Más adelante estudiaremos una nueva técnica, conocida con el nombre de **Regla de L'Hôpital**, la cual nos permitirá resolver casos más complejos de estas y otras formas más.

a. **Forma Indeterminada**  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Un límite de un cociente tiene la forma indeterminada  $\frac{\infty}{\infty}$ , si el límite (o límite lateral) del numerador y del denominador es  $\pm \infty$ .

**EJEMPLO 4.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{\operatorname{cosec} x}$

**Solución**

De acuerdo al ejemplo anterior, tenemos que:  $\frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cosec} x} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad (?)$

Bien, resolvemos la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$$

b. Indeterminada de la forma  $\infty - \infty$

Esta forma indeterminada se presenta cuando el límite de una suma o diferencia aplicar la ley de la suma, se obtiene la expresión  $\infty - \infty$  o la expresión  $-\infty + \infty$ . En este caso, la indeterminación se salva transformando la suma o diferencia en cociente.

**EJEMPLO 5.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right)$

**Solución**

$$\text{Tenemos que: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty - \infty \quad (?)$$

Bien, resolvemos la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1 - x}{x^3} \right) = \left( \frac{1}{0^+} \right) = +\infty$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 2.5

**PROBLEMA 1.**

Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}}$

**Solución**



Este límite es de la forma  $0/0$ . Se tiene:

(?)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}} \right) \left( \frac{1}{\cos x} \right) \\ &= \left( \frac{1}{0^+} \right) \left( \frac{1}{1} \right) = (+\infty)(1) = +\infty \end{aligned}$$

**PROBLEMA 2.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-3}$

**Solución**

Este límite es una forma indeterminada de la forma  $\frac{0}{0}$ .

Resolvemos la indeterminación:

Se tiene que:  $x \rightarrow 3^- \Rightarrow x-3 < 0 \Rightarrow 3-x > 0$ . Ahora,

$$\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-3} = \frac{\sqrt{(3-x)(3+x)}}{-(3-x)} = \frac{\sqrt{3-x} \sqrt{3+x}}{-\sqrt{3-x} \sqrt{3-x}} = \frac{\sqrt{3+x}}{-\sqrt{3-x}}$$

Si  $f(x) = \sqrt{3+x}$  y  $g(x) = -\sqrt{3-x}$  se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3+x} = \sqrt{6} > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-\sqrt{3-x}) = 0 \text{ y}$$

$$g(x) = -\sqrt{3-x} < 0$$

Luego,  $g(x) \rightarrow 0$  negativamente.

Aplicando la parte 2 del teorema 2.16 se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{3+x}}{-\sqrt{3-x}} = -\infty \left( \frac{+}{0^-} = -\infty \right)$$

El resultado anterior nos dice que la recta  $x = 3$  es una asíntota vertical. Además ésta es la única, ya que 3 es el único punto donde el denominador se hace 0.

**PROBLEMA 3.** Probar que el Teorema 2.16

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  entonces

1.  $L > 0$  y  $g(x) \rightarrow 0$  positivamente  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

2.  $L > 0$  y  $g(x) \rightarrow 0$  negativamente  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

3.  $L < 0$  y  $g(x) \rightarrow 0$  positivamente  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

4.  $L < 0$  y  $g(x) \rightarrow 0$  negativamente  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

**Solución**

Sólo probaremos 1 y 4. Para los casos 2 y 3 se procede en forma análoga y dejamos como ejercicios para el lector.

1. Debemos probar que dado  $M > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > M$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$  y  $L/2 < L < 3L/2$ , por el problema resuelto 10.2

la sección 3.2 con  $A = L/2$  y  $B = 3L/2$ , existe un  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow 3L/2 > f(x) > L/2 \quad (1)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , dado  $\varepsilon = L/(2M)$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon = L/(2M)$$

Como  $g(x) \rightarrow 0$  positivamente, a la expresión anterior la escribimos así:

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow g(x) < L/(2M) \quad (2)$$

Ahora, si  $\delta = \text{Mínimo} \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , entonces de (1) y (2) obtenemos

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{L/2}{L/2M} = M$$

4. Debemos probar que dado  $M > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > M$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L < 0$  y  $3L/2 < L < L/2$ , por el problema resuelto 10 de la sección 3.2 con  $A = 3L/2$  y  $B = L/2$ , existe un  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow 3L/2 < f(x) < L/2 \Rightarrow -f(x) > -L/2 \quad (3)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , dado  $\varepsilon = -L/(2M)$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon = -L/(2M)$$

Como  $g(x) \rightarrow 0$  negativamente,  $|g(x)| = -g(x)$  y a la expresión anterior la escribimos:

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow -g(x) < -L/(2M) \quad (4)$$

Ahora, si  $\delta = \text{Mínimo} \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , entonces de (3) y (4) obtenemos

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} > \frac{-L/2}{-L/2M} = M$$

**PROBLEMA 4.** Definir rigurosamente:

1.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

2.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

3.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$

4.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

**Solución**

1.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \Rightarrow (\forall M > 0) (\exists \delta > 0) (0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > M)$

2.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \Rightarrow (\forall M < 0) (\exists \delta > 0) (0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < M)$

3.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \Rightarrow (\forall M > 0) (\exists \delta > 0) (0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) > M)$

4.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \Rightarrow (\forall M < 0) (\exists \delta > 0) (0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) < M)$



**PROBLEMA 5.**

(Teorema 2.18). Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

entonces

a.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

b.  $L < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = -\infty$

**Solución**

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ , por el problema resuelto 10 de la sección 3.2, para

$A = L - (1/2)|L|$  y  $B = L + (1/2)|L|$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |a - x| < \delta_1 \Rightarrow L - (1/2)|L| < g(x) < L + (1/2)|L| \quad (1)$$

a. Debemos probar que dado  $M > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |a - x| < \delta \Rightarrow f(x) + g(x) > M$$

En vista de que sólo interesan los valores grandes de  $M$ , suponemos que  $M > L$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , dado  $M' = M - (L - (1/2)|L|)$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |a - x| < \delta_2 \Rightarrow f(x) > M' = M - (L - (1/2)|L|) \quad (2)$$

Ahora, tomando  $\delta = \text{Mínimo}\{\delta_1, \delta_2\}$ , de (1) y (2) se tiene:

$$\begin{aligned} 0 < |a - x| < \delta &\Rightarrow f(x) + g(x) > M' + L - (1/2)|L| \\ &= M - (L - (1/2)|L|) + L - (1/2)|L| = M \end{aligned}$$

b. Debemos probar que dado  $M < 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |a - x| < \delta \Rightarrow f(x)g(x) < M$$

Como  $L < 0$ , entonces  $|L| = -L$  y (1) se escribe así:

$$0 < |a - x| < \delta_1 \Rightarrow (3/2)L < g(x) < (1/2)L \quad (3)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , dado  $M' = (2M)/L$ , existe  $\delta_3 > 0$  tal que

$$0 < |a - x| < \delta_3 \Rightarrow f(x) > (2M)/L \quad (4)$$

Tomando  $\delta = \text{Mínimo}\{\delta_1, \delta_3\}$ , de (3), (4) y considerando que

$$f(x) > 0 \text{ y } (1/2)L < 0, \text{ se tiene}$$

$$0 < |a - x| < \delta \Rightarrow f(x)g(x) < f(x)(1/2)L < [(2M)/L](1/2)L = M$$

# PROBLEMAS PROPUESTOS 2.5

En los problemas del 1 al 9 calcular el límite por la derecha y el límite por la izquierda en cada punto de discontinuidad de las funciones indicadas.

1.  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  ✓

2.  $g(x) = \frac{1}{|x-2|}$  ✓

3.  $h(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$  ✓

4.  $f(x) = \frac{x}{x-4}$  ✓

5.  $g(x) = \frac{x+1}{x-5}$  ✓

6.  $h(x) = \frac{1}{x(x+2)}$  ✓

7.  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 3}$

8.  $g(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$  ✓

9.  $h(x) = x - \frac{1}{x}$

En los problemas del 10 al 28 calcular el límite indicado.

10.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x]/x$

11.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x]/x$

12.  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \sec x$

13.  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \sec x$

14.  $\lim_{x \rightarrow (-3\pi/2)^+} \sec x$

15.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x-1}{1-\sqrt{2x-x^2}} \right)$

16.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}-2} \right)$

17.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$  ✓

18.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right]$

19.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[ \frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right]$

20.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} ([x^2] - 1)/(x^2 - 1)$

21.  $\lim_{y \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{y-1} - \frac{3}{y^3-1} \right]$

22.  $\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{y\sqrt{y+1}} - \frac{1}{y} \right]$

23.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

24.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

25.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \operatorname{cosec}(x/2)$

26.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{\cos^2 x}{x} \right)$

27.  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \left( \frac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}} \right)$

28.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1 - \cos x}{\tan^3 x - \sin^3 x} \right)$

En los problemas del 29 al 32, hallar las asíntotas verticales a la gráfica de la función dada.

29.  $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$     30.  $y = \frac{x}{4x^2-1}$     31.  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$     32.  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

33. Demostrar que las rectas  $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ , donde  $n$  es un entero, son asíntotas verticales de la gráfica de  $y = \tan x$ .

## SECCION 2.6

### LÍMITES EN EL INFINITO Y ASINTOTAS HORIZONTALES

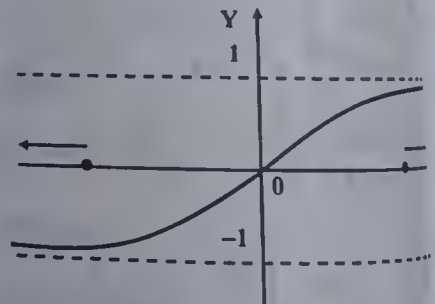
Veamos el comportamiento de las funciones cuando la variable  $x$  se aleja del origen (de 0) ilimitadamente hacia la derecha o hacia la izquierda. En el primer caso diremos que  $x$  tiende a  $+\infty$ , y en el segundo, que  $x$  tiende a  $-\infty$ .

Consideremos la función  $f(x) = \frac{x}{|x|+1} = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{-x+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Confeccionemos dos tablas, una para valores crecientes de  $x$  y otra para decrecientes (negativas).

$x \geq 0$	100	1.000	10.000 $\rightarrow +\infty$
$f(x) = \frac{1}{x+1}$	0,9901	0,9990	0,9999 $\rightarrow 1$

$x < 0$	-100	-1.000	-10.000 $\rightarrow -\infty$
$f(x) = \frac{1}{-x+1}$	-0,9901	-0,9990	-0,9999 $\rightarrow -1$



En la primera tabla observamos que  $f(x)$  se aproxima a 1 cuando  $x$  crece ilimitadamente. En este caso diremos que el límite de  $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$  cuando  $x$  tiende a  $+\infty$  es 1, y escribiremos así:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|+1} = 1$



En la segunda tabla observamos que  $f(x)$  se aproxima a  $-1$  cuando  $x$  decrece ilimitadamente. En este caso diremos que el límite de  $f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$  cuando  $x$  tiende a  $-\infty$  es  $-1$ , y escribiremos así:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x| + 1} = -1$

En general, tenemos las siguientes definiciones informales:

1. Sea  $f$  una función definida en un intervalo de la forma  $(a, +\infty)$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$  Los valores de  $f(x)$  pueden acercarse arbitrariamente a  $L$ , tomando a  $x$  suficientemente grande.

2. Sea  $f$  una función definida en un intervalo de la forma  $(-\infty, a)$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$  Los valores de  $f(x)$  pueden acercarse arbitrariamente a  $L$ , tomando a  $x$  suficientemente grande negativamente.

Las definiciones rigurosas de estos límites se dan a continuación.

**DEFINICION.** Rigurosa de límites en el infinito.

1. Sea  $f$  una función definida en un intervalo de la forma  $(a, +\infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

2. Sea  $f$  una función definida en un intervalo de la forma  $(-\infty, a)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N < 0)(x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Se prueba que las leyes de los límites del teorema 2.2, así como las propiedades de los límites enunciados en los teoremas 2.16 y 2.18 también se cumplen para los límites en el infinito (cuando  $x \rightarrow \pm \infty$ ). El siguiente teorema nos dice como pasar de un límite en el infinito a un límite en 0.

**TEOREMA 2.19**

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} f(1/t) = L$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^-} f(1/t) = L$$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 4.

Observar que el teorema anterior puede verse como el cambio de variable  $x = 1/t$ , para el cual se cumple que:  $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$  y  $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0^-$ . Pero, para la validez de este cambio, no podemos invocar directamente el teorema de cambio de variable visto, ya que éste sólo fue probado para el caso  $x \rightarrow a$  ( $a$  finito).

**EJEMPLO 1.**

Hallar: 1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \sin \frac{1}{x}$

**Solución**

En ambos casos aplicando el teorema anterior, haciendo  $x = \frac{1}{t}$ .

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \sin t = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^{3/2}} \sin t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{t^{1/2}} \right] \left[ \frac{\sin t}{t} \right]$   
 $= \left[ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} \right] \left[ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \right] = (+\infty)(1) = +\infty$

La prueba del siguiente teorema lo presentamos en el problema resuelto 6.

**TEOREMA 2.20** Si  $n$  es un número entero positivo, entonces

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$       2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$       4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

De este teorema deducimos fácilmente los límites en  $\pm \infty$  de un polinomio.

**COROLARIO.** Sea  $n > 0$ . Se tiene:

a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$

b. Si  $n$  es par, entonces

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \begin{cases} +\infty, & a_n > 0 \\ -\infty, & a_n < 0 \end{cases}$

c. Si  $n$  es impar, entonces

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \begin{cases} -\infty, & a_n > 0 \\ +\infty, & a_n < 0 \end{cases}$

**Demostración.**

Sólo probamos la parte a, ya que para los otros casos se procede similarmente.

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n) \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \\
 &= (+\infty)(a_n + 0 + \dots + 0 + 0) \\
 &= (+\infty)(a_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{si } a_n < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 2.** Dado el polinomio  $p(x) = -4x^3 + 8x^2 - 12x - 4$ , hallar

a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)$

b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)$

**Solución**

El término de mayor potencia es  $-4x^3$ , cuyo coeficiente es  $-4$  y  $-4 < 0$ . Luego,

a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^3 + 8x^2 - 12x - 4) = -\infty$     b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3 + 8x^2 - 12x - 4) = +\infty$

**EJEMPLO 3.** Calcular a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 1}$     b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 1}$

**Solución**

Ambos límites son indeterminados de la forma  $\frac{\infty}{\infty}$ . Resolvemos la indeterminación dividiendo el numerador y el denominador por la mayor potencia de  $x$  que, en este caso, es  $x^2$ .

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2/x^2}{(x^2 + 1)/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + 1/x^2} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x^2)} = \frac{3}{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x^2)} = \frac{3}{1 + 0} = 3 \\
 \text{b. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2/x^2}{(x^2 + 1)/x^2} = \frac{3}{1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^2)} = \frac{3}{1 + 0} = 3
 \end{aligned}$$



**EJEMPLO 4.**

Calcular: a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

**Solución**

Ambos límites son indeterminados de la forma  $\frac{\infty}{\infty}$ . Resolvemos indeterminación dividiendo el numerador y el denominador entre  $x$ .

a. Si  $x > 0$ , entonces  $x = \sqrt{x^2}$ . Luego,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + 1/x^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x^2)}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 0}} = 1$$

b. Si  $x < 0$ , entonces  $x = -\sqrt{x^2}$ . Luego,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + 1}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + 1/x^2}} = - \sqrt{\frac{1}{1 + 0}} = -1$$

**TEOREMA 2.21**

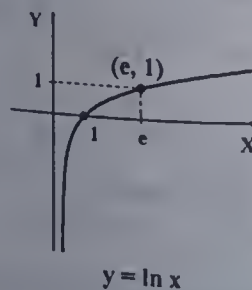
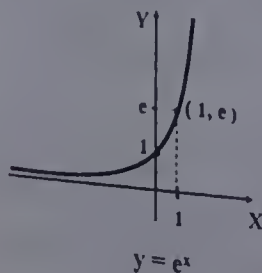
1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

**Demostración**



Observando el gráfico de la función exponencial  $y = e^x$  se puede intuir los resultados 1 y 2. La demostración formal la omitimos.

Las pruebas de 3 y 4 están en el problema resuelto 7.

Observar que el límite 3 nos dice que el eje Y es una asíntota vertical de la función logaritmo natural.

**EJEMPLO 5.** Calcular los siguientes límites:

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2 \ln x}{1 + 3 \ln x}$

**Solución**

$$\begin{aligned} \text{a. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x}) - 1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x}) + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x/e^x - e^{-x}/e^x}{e^x/e^x + e^{-x}/e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 1/e^{2x}}{1 + 1/e^{2x}} \\ &= \frac{1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/e^{2x})}{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/e^{2x})} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2 \ln x}{1 + 3 \ln x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/\ln x - 2}{1/\ln x + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/\ln x) - 2}{\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/\ln x) + 3} = \frac{0 - 2}{0 + 3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

## ASINTOTAS HORIZONTALES

También tenemos asíntotas horizontales (y también hay oblicuas).

**DEFINICION.** Diremos que la recta  $y = b$  es una asíntota horizontal del gráfico de la función  $f$  si se cumple al menos una de las dos condiciones siguientes:

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

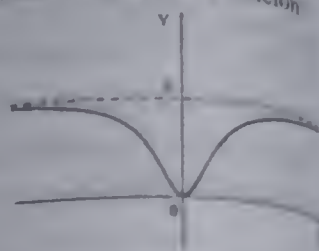
**EJEMPLO 6.**

La recta  $y = 3$  es una asíntota horizontal del gráfico de la función

$$y = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$$

En efecto, en el ejemplo 2 vimos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 1} = 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 1}$$



**EJEMPLO 7.**

Se llama tangente hiperbólica a la siguiente función.

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Hallar las asíntotas horizontales

**Solución**

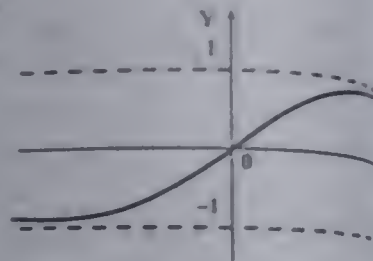
La tangente hiperbólica tiene dos asíntotas horizontales:

$$y = -1, \quad y = 1.$$

En efecto, de acuerdo al ejemplo 5, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$



$y = \tanh x$

**EJEMPLO 8.**

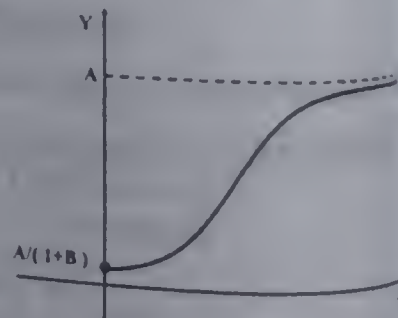
Probar que la recta  $y = A$  es una asíntota horizontal de la curva

logística:  $f(x) = \frac{A}{1 + Be^{-kx}}$ ,  $A$ ,  $B$  y  $k$  son constantes positivas

**Solución**

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A}{1 + Be^{-kx}} &= \frac{A}{1 + B \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{e^{kx}} \right)} \\ &= \frac{A}{1 + B(0)} = \frac{A}{1+0} = A \end{aligned}$$





**EJEMPLO 9.**

Hallar las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la ecuación

$$xy^2 - y^2 - 4x - 8 = 0.$$

**Solución**

Despejando y obtenemos  $y = \pm \sqrt{\frac{4x+8}{x-1}}$ .

La gráfica de la ecuación es la unión de las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+8}{x-1}} \quad y \quad g(x) = -\sqrt{\frac{4x+8}{x-1}}$$

Por conveniencia hallamos el dominio de estas funciones. Ambas tienen el mismo dominio.

$$x \in \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \Leftrightarrow \frac{4x+8}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4(x+2)}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} \geq 0$$

Resolviendo esta desigualdad hallamos que  $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$ .

**1. Asíntotas Verticales:**

El único punto que es candidato a proporcionar asíntotas verticales es 1. Como las funciones no están definidas en los puntos próximos y a la izquierda de 1, sólo debemos calcular los límites a la derecha de 1 de ambas funciones.

Ya que,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{4x+8} = \sqrt{12} > 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0$  positivamente, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{4x+8}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4x+8}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

Por otro lado,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-f(x)) = -\infty$

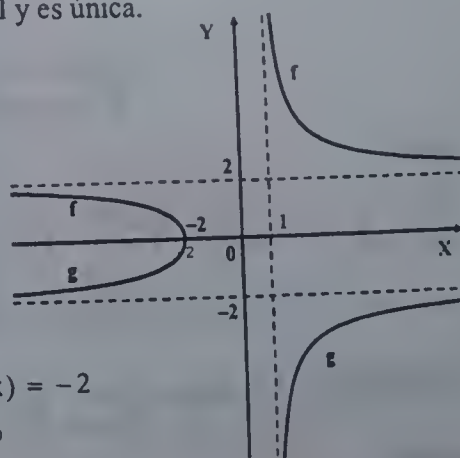
Por tanto,  $x = 1$  es una asíntota vertical y es única.

**2. Asíntotas Horizontales:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{4x+8}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{4 + 8/x}{1 - 1/x}} = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-f(x)) = - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -2$$

Luego,  $y = -2$  e  $y = 2$  son asíntotas horizontales.



## PROBLEMAS RESUELTOS 2.6

**PROBLEMA 1.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 1} \right]$

**Solución**

Usando la identidad:

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \quad \text{con } a = \sqrt[3]{x^3 + x^2} \text{ y } b = \sqrt[3]{x^3 + 1} \text{ se tiene}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 1} &= \frac{(x^3 + x^2) - (x^3 + 1)}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3 + x^2} \sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}} \\ &= \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3 + x^2} \sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}} \\ &= \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3 + x^2} \sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}} \\ &= \frac{x^2 - 1}{\frac{\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2}}{x^2} + \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2}}{x} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{x} + \frac{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}}{x^2}} \\ &= \frac{1 - 1/x^2}{\sqrt[3]{\frac{(x^3 + x^2)^2}{x^6}} + \sqrt[3]{\frac{x^3 + x^2}{x^3}} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 1}{x^3}} + \sqrt[3]{\frac{(x^3 + 1)^2}{x^6}}} \\ &= \frac{1 - 1/x^2}{\sqrt[3]{(1 + 1/x)^2} + \sqrt[3]{1 + 1/x} \sqrt[3]{1 + 1/x} + \sqrt[3]{(1 + 1/x^3)^2}} \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 1} \right] = \frac{1 - 0}{\sqrt[3]{(1 + 0)^2} + \sqrt[3]{1 + 0} \sqrt[3]{1 + 0} + \sqrt[3]{(1 + 0)^2}} = \frac{1}{3}$$

**PROBLEMA 2.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right]$

**Solución**

Multiplicando y dividiendo por la conjugada:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} &= \frac{[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}][\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}]}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\&= \frac{x + \sqrt{x+\sqrt{x}} - x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\&= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}/\sqrt{x}}{(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x})/\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1/x}}}{\sqrt{1+\sqrt{1/x}+\sqrt{1/x^3}} + 1}\end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}] = \frac{\sqrt{1+\sqrt{0}}}{\sqrt{1+\sqrt{0}+\sqrt{0}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

**PROBLEMA 3.** Probar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^{1/3}(1-x)^{2/3} - x] = -\frac{2}{3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^{1/3}(1-x)^{2/3} - x]$$

**Solución**

Tenemos que:

$$\begin{aligned}x^{1/3}(1-x)^{2/3} - x &= x^{1/3}[(1-x)^{2/3} - x^{2/3}] = x^{1/3}\left[\left((1-x)^{1/3}\right)^2 - \left(x^{1/3}\right)^2\right] \\&= x^{1/3}\left[(1-x)^{1/3} - x^{1/3}\right]\left[(1-x)^{1/3} + x^{1/3}\right]\end{aligned}$$

Ahora, haciendo uso de las siguientes identidades

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \quad \text{y} \quad a + b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$$

con  $a = (1-x)^{1/3}$  y  $b = x^{1/3}$ , se tiene que  $x^{1/3}(1-x)^{2/3} - x$



$$\begin{aligned}
 &= x^{1/3} \left[ \frac{(1-x) - x}{(1-x)^{2/3} + (1-x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \right] \left[ \frac{(1-x) + x}{(1-x)^{2/3} - (1-x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \right] \\
 &= x^{1/3} \left[ \frac{1-2x}{(1-x)^{2/3} + (1-x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \right] \left[ \frac{1}{(1-x)^{2/3} - (1-x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \right] \\
 &= \frac{x^{1/3}(1-2x)}{[(1-x)^{2/3} + (1-x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}] [(1-x)^{2/3} - (1-x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]} \\
 &= \frac{x^{2/3}x^{2/3} \left( \frac{1}{x} - 2 \right)}{[(1-x)^{2/3} + (1-x)^{2/3}x^{1/3} + x^{2/3}] [(1-x)^{2/3} - (1-x)^{2/3}x^{1/3} + x^{2/3}]} \\
 &= \frac{1/x - 2}{\left[ \frac{(1-x)^{2/3} + (1-x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}}{x^{2/3}} \right] \left[ \frac{(1-x)^{2/3} - (1-x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}}{x^{2/3}} \right]} \\
 &= \frac{1/x - 2}{[(1/x - 1)^{2/3} + (1/x - 1)^{1/3} + 1] [(1/x - 1)^{2/3} - (1/x - 1)^{1/3} + 1]}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^{1/3}(1-x)^{2/3} - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x - 2}{[(1/x - 1)^{2/3} + (1/x - 1)^{1/3} + 1] [(1/x - 1)^{2/3} - (1/x - 1)^{1/3} + 1]} \\
 &= \frac{0 - 2}{[(0 - 1)^{2/3} + (0 - 1)^{1/3} + 1] [(0 - 1)^{2/3} - (0 - 1)^{1/3} + 1]} \\
 &= \frac{-2}{[(-1) + 1] [(-1) + 1]} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Dado los mismos pasos dados atrás, se consigue que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x^{1/3}(1-x)^{2/3} - x] = -\frac{2}{3}$$

## PROBLEMA 4

Solución

Probaremos

1. Probaremos

( $\Rightarrow$ ) Debe

Dado

Como

Ahora

( $\Leftarrow$ ) De

Dad

Co

PROB

Solució

1. Por

**PROBLEMA 4.** Probar el teorema 2.19

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \iff \lim_{t \rightarrow 0^+} f(1/t) = L \quad 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \iff \lim_{t \rightarrow 0^-} f(1/t) = L$$

**Solución**

Probaremos sólo la parte 1, ya para la parte 2 se procede en forma similar.

$$1. \text{ Probaremos que: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \iff \lim_{t \rightarrow 0^+} f(1/t) = L$$

( $\Rightarrow$ ) Debemos probar que:

$$\text{Dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } 0 < t < \delta \Rightarrow |f(1/t) - L| < \varepsilon.$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L, \text{ para el } \varepsilon \text{ dado existe } N > 0 \text{ tal que}$$

$$x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\text{Ahora, si } \delta = \frac{1}{N} > 0, \text{ entonces}$$

$$0 < t < \delta = \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{1}{t} > N \Rightarrow |f(1/t) - L| < \varepsilon.$$

( $\Leftarrow$ ) Debemos probar que:

$$\text{Dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } N > 0 \text{ tal que } x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

$$\text{Como, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(1/t) = L, \text{ para el } \varepsilon \text{ dado existe } \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$0 < t < \delta \Rightarrow |f(1/t) - L| < \varepsilon.$$

$$\text{Ahora, si } N = \frac{1}{\delta} > 0, \text{ entonces}$$

$$x > N = 1/\delta \Rightarrow 0 < 1/x < \delta \Rightarrow |f(1/(1/x)) - L| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

**PROBLEMA 5.** Hallar: 1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{x}$  2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sin \left( x + \frac{1}{x} \right) - \sin x \right]$

**Solución**

1. Por el problema resuelto 4, haciendo  $x = 1/t$  se tiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \sin t = \sin 0 = 0$$

2. Usando la identidad trigonométrica 41 tenemos

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{1}{x}\right) - \sin x &= 2 \cos\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x} + x\right)\right] \sin\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x} - x\right)\right] \\ &= 2 \cos\left[x + \frac{1}{2x}\right] \sin \frac{1}{2x}\end{aligned}$$

Considerando que  $\left|\cos\left[x + \frac{1}{2x}\right]\right| \leq 1$  se tiene:

$$\begin{aligned}0 &\leq \left|\sin\left(x + \frac{1}{x}\right) - \sin x\right| = \left|2 \cos\left[x + \frac{1}{2x}\right] \sin \frac{1}{2x}\right| \\ &= 2 \left|\cos\left[x + \frac{1}{2x}\right]\right| \left|\sin \frac{1}{2x}\right| \leq 2 \left|\sin \frac{1}{2x}\right|\end{aligned}$$

Luego:

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \left|\sin\left(x + \frac{1}{x}\right) - \sin x\right| \leq 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left|\sin \frac{1}{2x}\right| \quad (3)$$

Pero, por la continuidad de la función valor absoluto y la parte (1), se tiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left|\sin \frac{1}{2x}\right| = \left|\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{2x}\right| = |0| = 0 \quad (4)$$

De (3) y (4) obtenemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left|\sin\left(x + \frac{1}{x}\right) - \sin x\right| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sin\left(x + \frac{1}{x}\right) - \sin x\right] = 0$$

**PROBLEMA 6.** (Teorema 2.20). Si  $n$  es un número entero positivo, probar que

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Usando el teorema de variable  $x = 1/t$ , y de acuerdo al teorema 2.10, tenemos



$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

2. Si  $n$  es par:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Si  $n$  es impar:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t^n} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1/t)^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} t^n = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(1/t)^n} = \lim_{x \rightarrow 0^-} t^n = 0$$

**PROBLEMA 7.** (Teorema 2.21) Probar:

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Solución

3. Por definición, debemos probar que:

$$\text{Dado } M < 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < x < \delta \Rightarrow \ln x < M$$

Bien,

$$\ln x < M \Rightarrow x < e^M. \text{ Luego, tomamos } \delta = e^M$$

Por otro lado, por estar  $x$  en el dominio de  $y = \ln x$ , debemos tener que  $x > 0$ .

Ahora tenemos:

$$0 < x < \delta \Rightarrow 0 < x < e^M \Rightarrow \ln x < \ln e^M = M$$

4. Por definición, debemos probar que:

$$\text{Dado } M > 0, \exists N > 0 \text{ tal que } x > N \Rightarrow \ln x > M$$

Bien,

$$\ln x > M \Rightarrow x > e^M. \text{ Luego, tomamos } N = e^M$$

Ahora tenemos:

$$x > N \Rightarrow x > e^M \Rightarrow \ln x > \ln e^M = M$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 2.6

En los problemas del 1 al 9 calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

1.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

2.  $f(x) = \frac{-1}{x^3}$

3.  $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$

4.  $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$

5.  $f(x) = \frac{x^3 - 8}{2x^3 - 3x^2 + 1}$

6.  $f(x) = x^5 - 4x^4$

7.  $f(x) = -2x^6 + 5x^5$

8.  $f(x) = \frac{x+1}{x}$

9.  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

En los problemas del 10 al 31 calcular el límite indicado.

10.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x + \sqrt{x}]$

11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \sqrt{x}]$

12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$

13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}$

14.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

15.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{-8x^3 + x + 1}}{x-1}$

16.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}]$

17.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x]$

18.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\sqrt{x^2 + 5} - x]$

19.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x + \sqrt[3]{1-x^3}]$

20.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

21.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

22.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1} + \sqrt{x} + \sqrt{x}}$

23.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1/2} \sin x$

24.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{\pi}{6} \right)$

25.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \sqrt{x+2} - \sin \sqrt{x}]$

26.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

27.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$

28.  $\lim_{x \rightarrow +\infty}$

30.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln$

32. Sea la

a. n

c. n

33. Dar u

a.

c.

34. Prob

Hal

En los  
función

35.  $f(x)$

38.  $f(x)$

41.  $f(x)$

En l  
gráfica

42.  $2x$

1.6

$$f(x)$$

$$-\infty$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

$$f(x) = x^5 - 4x^4$$

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{-8x^3+x+1}}$$

$$\sqrt{x^2 + 2x - x}$$

$$x + \sqrt[3]{1-x^3}$$

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$1/2 \sin x$$

$$\sqrt{2} - \sin \sqrt{x}$$

$$-3x$$

$$-3x$$

$$28. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10^x}{10^x + 1}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x^2})$$

$$32. \text{ Sea la función racional } f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}, a_n \neq 0 \text{ y } b_m \neq 0. \text{ Probar que:}$$

$$a. n = m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$$

$$b. n < m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$$c. n > m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty, & \text{si } \frac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}$$

33. Dar una definición rigurosa de:

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$b. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$c. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$d. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

34. Probar que todo polinomio de grado impar tiene una raíz (real). Sugerencia: Hallar los límites en  $+\infty$  y en  $-\infty$ .

En los problemas del 35 al 41 hallar las asíntotas horizontales del gráfico de la función dada.

$$35. f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$36. g(x) = \frac{1}{x(x+2)}$$

$$37. g(x) = \frac{x}{4x^2 - 1}$$

$$38. f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$39. g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$40. h(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$41. f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

En los problemas del 42 al 44 hallar las asíntotas verticales y horizontales del gráfico de la ecuación dada.

$$42. 2x^2 + yx^2 = 16y$$

$$43. (y^2 - 4)(x - 1) = 8$$

$$44. x^2 y^2 = 2y^2 + x^2 + 1$$



## SECCION 2.7

### LOS LIMITES Y EL NUMERO $e$

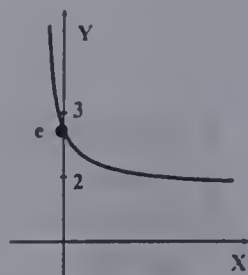
Ya estamos en condiciones de definir al número  $e$ .

**DEFINICION.** El número  $e$  se define como el siguiente límite

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + x \right)^{\frac{1}{x}} \quad (1)$$

Esta definición del número  $e$  debe justificarse, probando que tal límite existe. Se hace en los cursos avanzados de Cálculo. Además, se prueba que este límite es un número irracional. A modo de ilustración, tenemos la siguiente tabla y el gráfico

$$y = (1 + x)^{1/x}$$



$x$	$(1+x)^{1/x}$
0,000001	2,718281693
0,0000001	2,718281693
$\downarrow$	$\downarrow$
0	$e$
$\uparrow$	$\uparrow$
-0,0000001	2,718281964
-0,000001	2,718283188

Esta tabla nos da una aproximación de  $e$  con 6 cifras decimales:

$$e \approx 2,718281$$

Si en límite (1) hacemos el cambio de variable  $z = \frac{1}{x}$  tenemos que:

$$x \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow 0^+ \text{ y } x \rightarrow 0^- \Leftrightarrow z \rightarrow +\infty \text{ y } z \rightarrow -\infty$$

En consecuencia, el límite (1) es equivalente a decir que los dos límites siguientes se cumplen simultáneamente:

$$(2) \quad e = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^z \quad \text{y} \quad (3) \quad e = \lim_{z \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^z$$

Ahora mostramos otros límites importantes:

### TEOREMA 2.2

**Demostración**

1. Si  $a = 0$ , el

Sea  $y = ax$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1+x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( \frac{1}{1+x} \right)$$

$$3. \quad \text{Sea } y = e^{bx} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0}$$

4. Teniendo

### PROBLEMA

Solución

RO e

mite:

(1)

tal límite existe. Esto  
que este límite es un  
tabla y el gráfico de

$(1+x)^{1/x}$   
18281693

18281693

↓

e

↑

8281964

8283188

**TEOREMA 2.22**

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + ax \right)^{\frac{1}{x}} = e^a \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{bx} - 1}{x} = b \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

**Demostración**

1. Si  $a = 0$ , el resultado es obvio. Veamos el caso  $a \neq 0$ .

Sea  $y = ax$ . Se tiene que:  $x = \frac{y}{a}$ ,  $\frac{1}{x} = \frac{a}{y}$ . Además:  $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow y \rightarrow 0$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + ax \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( 1 + y \right)^{\frac{a}{y}} = \left( \lim_{y \rightarrow 0} \left( 1 + y \right)^{\frac{1}{y}} \right)^a = e^a$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( 1 + x \right)^{\frac{1}{x}} = \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + x \right)^{\frac{1}{x}} \right) = \ln e = 1$$

3. Sea  $y = e^{bx} - 1$ . Se tiene que:

$$e^{bx} = 1 + y, \quad x = \frac{1}{b} \ln(1+y) \quad y \quad x \rightarrow 0 \Leftrightarrow y \rightarrow 0. \text{ Luego,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{bx} - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + y - 1}{\frac{1}{b} \ln(1+y)} = b \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)}$$

$$= b \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y}} = b \left( \frac{1}{1} \right) = b$$

4. Teniendo en cuenta que  $a^x = e^{x \ln a}$  y la parte 3 anterior con  $b = \ln a$ , tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \ln a$$

mites siguientes

**PROBLEMAS RESUELTOS 2.7**

**PROBLEMA 1.**

Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x}$

Solución

$$\left( \frac{1}{z} \right)^z$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} \frac{e^x - 1}{x} \frac{x}{\sin x} \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} \right) \left( \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} \right) = \left( \frac{1}{e^0} \right) \left( \frac{1}{1} \right) = 1 \end{aligned}$$

### PROBLEMAS PROPUUESTOS 2.7

Hallar los siguientes límites

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e}{x - 1}$

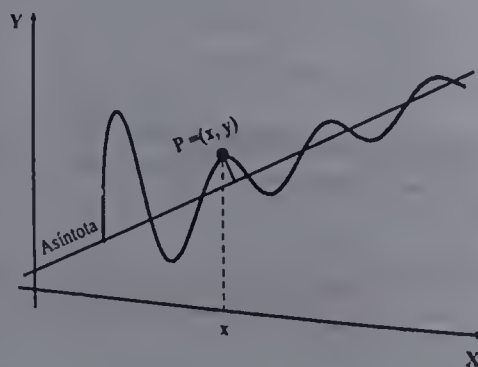
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{1/x} - 1 \right)$

### SECCION 2.8

#### ASINTOTAS OBLICUAS

Además de asíntotas verticales y horizontales, tenemos también asíntotas oblicuas. En general, se dice que una recta  $L$  es una asíntota de una curva  $C$  si la distancia  $d(P, L)$ , de un punto  $P$  cualquiera de la curva  $C$  a la recta  $L$ , tiende a 0 a medida que  $P$  se aleja del origen de coordenadas.



Cuando la curva  
definición:

#### DEFINICION.

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty}$

Pera ser más p  
derecha si suced

La condición  
entre del punto

Observar que  
oblicuas. En ef  
nosotros, como  
de asíntotas obl

En vista de la  
asíntota o blicu  
asíntota oblicu  
a la derecha y

Entre las fu  
racionales  $f(x)$

grado del den  
tiene la forma

donde el gr  
denominador

Este resul  
derecha con

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x)]$



Cuando la curva es la gráfica de una función, esta idea es captada en la siguiente definición:

**DEFINICIÓN.** La recta  $L: y = mx + b$  es una asíntota oblicua de la gráfica de la función  $y = f(x)$  si se cumple que:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{ó} \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Para ser más precisos: Se dice que la recta  $y = mx + b$  es una asíntota oblicua a la derecha si sucede (1) o que es una asíntota oblicua a la izquierda si sucede (2).

La condición (1) o (2) nos dice que cuando  $x \rightarrow +\infty$  o cuando  $x \rightarrow -\infty$ , la distancia entre el punto  $(x, f(x))$  del gráfico y el punto  $(x, mx + b)$  de la recta, tiende a cero.

Observar que las asíntotas horizontales son un caso particular de las asíntotas oblicuas. En efecto, una asíntota oblicua con  $m = 0$  es una asíntota horizontal. Para nosotros, como ya hemos tratado las asíntotas horizontales aparte, cuando hablemos de asíntotas oblicuas entenderemos que no es horizontal, o sea  $m \neq 0$ .

En vista de la unicidad del límite cuando  $x \rightarrow +\infty$ , toda gráfica tiene, a lo más, una asíntota oblicua a la derecha. De modo análogo, toda gráfica tiene, a lo más, una asíntota oblicua a la izquierda. Una misma recta puede ser, a la vez, asíntota oblicua a la derecha y asíntota oblicua a la izquierda.

Entre las funciones cuyas gráficas tienen asíntotas oblicuas están las funciones racionales  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  cuyo grado del numerador  $p(x)$  es una unidad mayor que el grado del denominador  $q(x)$ . En efecto, si dividimos  $p(x)$  entre  $q(x)$ , se tiene que  $f(x)$  tiene la forma:

$$f(x) = mx + b + \frac{h(x)}{q(x)},$$

donde el grado del polinomio  $h(x)$  del numerador es menor que el grado del denominador  $q(x)$ . En consecuencia,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{h(x)}{q(x)} = 0$$

Este resultado nos dice que la recta  $y = mx + b$  es una asíntota oblicua, tanto a la derecha como a la izquierda, de la gráfica de  $y = f(x)$ . En efecto:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \left( mx + b + \frac{h(x)}{q(x)} \right) - (mx + b) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{h(x)}{q(x)} = 0 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 1.** Hallar las asíntotas oblicuas de

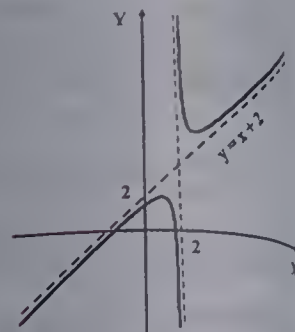
$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

Solución

a. Tenemos que

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2} = x + 2 + \frac{1}{x - 2}$$

Luego,  $y = x + 2$  es una asíntota oblicua.  
Observar que  $x = 2$  es una asíntota vertical.



¿Cómo encontrar las asíntotas oblicuas si  $y = f(x)$  no es función racional? O sea si  $y = mx + b$  es una asíntota, como hallar las constantes  $m$  y  $b$ ? El siguiente teorema nos da la respuesta.

**TEOREMA 2.23** a.  $y = mx + b$  es una asíntota oblicua a la derecha de  $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = b$$

b.  $y = mx + b$  es una asíntota oblicua a la izquierda de  $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = b$$

Demostración

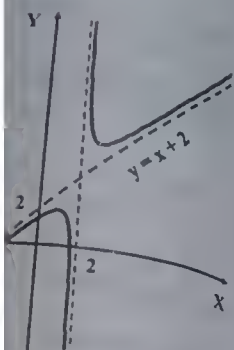
Ver el problema resuelto 4.

**EJEMPLO 2.** Hallar las asíntotas oblicuas al gráfico de  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Solución

Asíntota oblicua a la derecha.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x/x}{\sqrt{x^2 - 1}/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - 1/x^2}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$



$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x \right]$$

Pero,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x &= \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{(x^2 - x\sqrt{x^2 - 1})(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1}(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})} \\ &= \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})} = \frac{1}{(\sqrt{x^2 - 1}/x)(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})/x} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{1 - 1/x^2})(x + \sqrt{x^2 - 1})} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

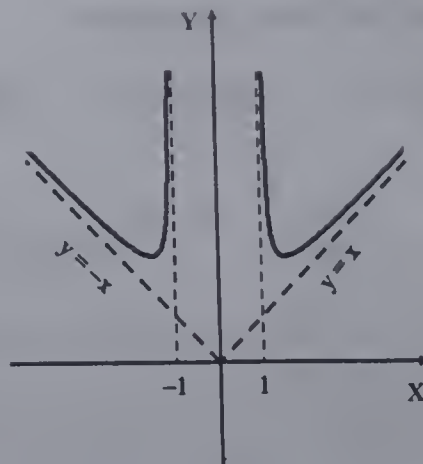
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{1 - 1/x^2})(x + \sqrt{x^2 - 1})} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0}(+\infty)} = 0$$

Luego,  $y = x$  es asíntota oblicua a la derecha.

**Asíntota oblicua a la izquierda.**

Podríamos proceder como en el caso anterior, calculando los límites respectivos cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Sin embargo, observamos que la función es par,  $f(-x) = f(x)$ , y, por lo tanto, su gráfico es simétrico respecto al eje Y. Teniendo en cuenta este hecho, rápidamente concluimos que la asíntota oblicua a la izquierda es  $y = -x$ .

Observar que las rectas  $x = -1$  y  $x = 1$  son asíntotas verticales.





## PROBLEMAS RESUELTOS 2.8

**PROBLEMA 1.** Hallar las asíntotas oblicuas de  $f(x) = \tan^{-1}(x) - x$

**Solución**

Considerando que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2}$  se tiene:

**Asíntota oblicua a la derecha.**

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\tan^{-1}(x) - x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\tan^{-1}(x)}{x} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\tan^{-1}(x)}{x} \right) - 1 = \frac{\pi/2}{+\infty} - 1 = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

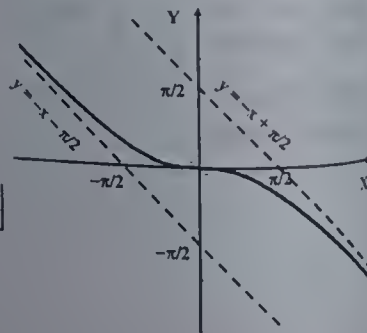
$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\tan^{-1}(x) - x - (-x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Luego,  $y = -x + \frac{\pi}{2}$  es una asíntota a la derecha de  $f(x) = \tan^{-1}(x) - x$

**Asíntota oblicua a la izquierda.**

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\tan^{-1}(x) - x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\tan^{-1}(x)}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\tan^{-1}(x)}{x} \right) - 1 \\ &= \frac{-\pi/2}{-\infty} - 1 = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\tan^{-1}(x) - x - (-x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



Luego,  $y = -x - \frac{\pi}{2}$  es la asíntota oblicua a la izquierda de  $f(x)$ .

**PROBLEMA 2.** Hallar

**Solución**

**Asíntota oblicua a la derecha.**

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} - 1 \right) \end{aligned}$$

Por otro lado, de acuerdo

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

Luego,  $y = x - \frac{2}{3}$  es la asíntota oblicua a la derecha de  $f(x)$ .

**Asíntota oblicua a la izquierda.**

En forma enteramente análoga obtenemos que la misma

asíntota oblicua a la izquierda

**PROBLEMA 3.** De

**Solución**

La hipérbola puede construirse a continuación.

Luego,  $y = -x - \frac{\pi}{2}$  es una asíntota a la izquierda de

$$f(x) = \tan^{-1}(x) - x$$

**PROBLEMA 2.** Hallar las asíntotas oblicuas de

$$f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$$

**Solución**

**Asíntota oblicua a la derecha.**

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1/3}(1-x)^{2/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)^{2/3}}{x^{2/3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} - 1 \right)^{2/3} = (0-1)^{2/3} = 1 \end{aligned}$$

Por otro lado, de acuerdo al problema resuelto 3 de la sección 2.6 tenemos:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^{1/3}(1-x)^{2/3} - x] = -\frac{2}{3}$$

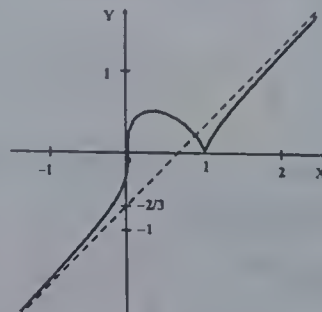
Luego,  $y = x - \frac{2}{3}$  es asíntota oblicua a

la derecha de  $f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$

**Asíntota oblicua a la izquierda.**

En forma enteramente análoga a la parte anterior, obtenemos que la misma recta,  $y = x - \frac{2}{3}$  es

asíntota oblicua a la izquierda de  $f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$



**PROBLEMA 3.** Demostrar que las rectas  $y = \frac{b}{a}x$  e  $y = -\frac{b}{a}x$  son asíntotas

oblicuas de la hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

**Solución**

La hipérbola puede considerarse como el gráfico de las funciones  $f$  y  $g$  que construimos a continuación.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

$$\Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Sean

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad y \quad g(x) = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

La gráfica de  $f$  es la parte de la hipérbola sobre el eje  $X$ , y la de  $g$  es la de abajo.

Mostraremos que las rectas  $y = \frac{b}{a}x$  e  $y = -\frac{b}{a}x$  son asíntotas oblicuas de ambas funciones,  $f$  y  $g$ . Verificaremos este resultado sólo para  $f$ , ya que para el caso de  $g$ , el proceso es exactamente igual.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{b}{a} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - a^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{b}{a} \frac{1}{|x|} \sqrt{x^2 - a^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \right) = \frac{b}{a} \sqrt{1 - 0} = \frac{b}{a}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x \right]$$

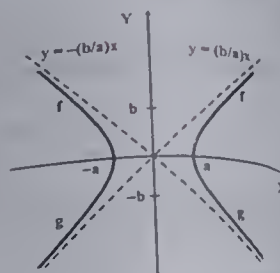
$$= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 - a^2} - x \right] = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{b}{a} (0) = 0$$

Luego,  $y = \frac{b}{a}x$  es una asíntota oblicua por la derecha.

Similarmente:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{b}{a}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = 0$$

Luego,  $y = -\frac{b}{a}x$  es una asíntota oblicua por la izquierda.



**PROBLEMA 4.** Demostrar el teorema 2.23:

a.  $y = mx + b$  es una asíntota oblicua a la derecha de  $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad y \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = b$$

b.  $y = mx + b$  es una asíntota oblicua a la izquierda de  $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad y \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = b$$

Solución

a. ( $\Rightarrow$ ) Si  $y = mx + b$

Sacando factor

Puesto que

Aún más

De do

Por o

( $\Leftarrow$ )  $\lim_{x \rightarrow +\infty}$

Luego,

b. Se procede

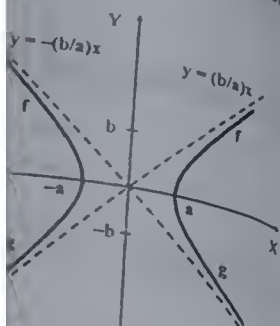
Hallar las

$$1. y = \frac{x^2}{x-1}$$

$$4. y = \frac{2x^4}{x^3}$$

$$7. f(x) = x$$





la de g es la de abajo.  
on asíntotas oblicuas de  
ra f, ya que para el caso

$$\left( \frac{b}{a} \frac{1}{|x|} \sqrt{x^2 - a^2} \right)$$

$$\frac{b}{a} (0) = 0$$

$$= 0$$

echa de  $y = f(x)$

$$- mx] = b$$

ierda de  $y = f(x)$

$$- mx] = b$$

a. ( $\Rightarrow$ ) Si  $y = mx + b$  es una asíntota oblicua a la derecha de  $y = f(x)$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad (1)$$

Sacando factor común  $x$  tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Puesto que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$ , para que se cumpla la igualdad anterior, debemos tener que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Aún más, puesto que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0$ , tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - m \right] = 0$$

De donde,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

Por otro lado, teniendo en cuenta (1), obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = b$$

$$(\Leftarrow) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - b] = 0$$

Luego,  $y = mx + b$  es una asíntota a la derecha de  $y = f(x)$ .

b. Se procede como en a.

## PROBLEMAS PROPUESTOS 2.8

Hallar las asíntotas oblicuas al gráfico de las siguientes funciones

1.  $y = \frac{x^2}{x-1}$

2.  $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

3.  $y = \frac{x^3}{2(x^2+1)^2}$

4.  $y = \frac{2x^4 + x^2 + x}{x^3 - x^2 + 2}$

5.  $y = \sqrt{x^2 - 1}$

6.  $y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

7.  $f(x) = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}$

8.  $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$

## BREVE HISTORIA DE $\pi$

Se ha sostenido, con justa razón, que la historia de  $\pi$  es un "pequeño espejo de la historia del hombre".

$\pi$ , la constante más famosa de todos los tiempos, es la razón entre la longitud de cualquier circunferencia y la longitud de su diámetro.

La historia de  $\pi$  comienza con el inicio de la civilización, cuando el hombre precisa de mediciones precisas con motivos agrícolas o arquitectónicos.

Al inicio, alrededor de 2.000 años antes de Cristo, el valor de  $\pi$  fue aproximado empíricamente. Así, para los antiguos hebreos,  $\pi = 3$ ; para los babilonios,  $\pi = 3,125$ ; para los antiguos egipcios,  $\pi = 4 \times (8/9)^2 = 3,16045$ .

El empirismo en el cálculo de  $\pi$  fue superado por el gran Arquímedes, quien consideró a la longitud de la circunferencia como el límite de los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos a la circunferencia. Mediante este método logró probar que:

$$3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7 \quad \text{o bien, en decimales, } 3,1408 < \pi < 3,142858$$

Con la llegada de los romanos, tanto la historia de  $\pi$  como del mundo, pasa por tiempos oscuros, hasta la llegada del Renacimiento. En el siglo XVI aparece el matemático francés François Viète (1.540–1.603), considerado como el padre del Álgebra. Viète aplicó el Álgebra y la Trigonometría al método de Arquímedes, mejorando los resultados. Logra expresar a  $\pi$  como una serie infinita. En 1.580, haciendo uso de esta serie, calcula 10 cifras decimales, que son las siguientes:

$$\pi \approx 3,1415926535$$

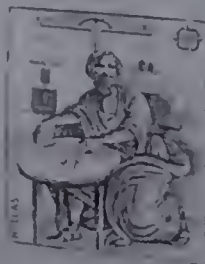
En 1.615, el matemático alemán Ludolf von Ceulen, mediante otra serie infinita, calcula 35 decimales de  $\pi$ .

En 1.761, el físico-matemático alemán Johann Heinrich Lambert probó que  $\pi$  es un número irracional. En consecuencia, su expresión decimal es infinita y no periódica.

En 1.844, Johann Martin Zacharias Dase (1.824–1.861), usando series infinitas, alrededor de dos meses de trabajo duro, calculó 200 dígitos. En 1.989, los hermanos Chudnovsky, dos matemáticos de la Universidad de Columbia (Nueva York), usando una computadora Cray 2 y una IBM 3090-VF, calcularon 1.011.196 dígitos. El record, hasta 1.995, lo tiene Yasumasa Kanada, profesor de la Universidad de Tokio, quien ha calculado 6.442.450.000 dígitos.

Para usos prácticos no se requiere mucha exactitud de  $\pi$ . Así, sólo se requieren 39 decimales para computar la longitud de la circunferencia del universo conocido con un error no mayor que el radio de un átomo de hidrógeno.

Arquímedes  
(287–212 A.C.)



François Viète  
(1.540–1.603)



# 3

---

## LA DERIVADA

---

ISAAC NEWTON  
(1.642 - 1.727)

### 3.1 LA DERIVADA

### 3.2 TECNICAS BASICAS DE DERIVACION

### 3.3 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

### 3.4 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

### 3.5 REGLA DE LA CADENA



## Isaac Newton (1.642 – 1.727)



Isaac Newton nació en Woolsthorpe, Inglaterra, el día de Navidad de 1.642. Su obra cambió el pensamiento científico de su época y aún en la ciencia actual sus ideas están presentes.

En 1.661, a la edad de 18 años, ingresó al Trinity College de Cambridge, donde conoció a otro ilustre matemático, Isaac Barrow (1.630–1.677). Se graduó en 1.665. En el otoño de ese año, una epidemia azotó el área de Londres y la universidad tuvo que cerrar sus puertas por año y medio. Newton regresó a la granja de su familia en su pueblo natal. Esta etapa fue muy fructífera en la vida del insigne científico. Se dice que fue allí donde ocurrió el incidente de la manzana: Newton, al ver caer una manzana de un árbol, relacionó la caída de ésta con la atracción gravitacional que ejerce la tierra sobre la luna, naciendo así la famosa ley de la gravitación universal. También fue en esta época cuando desarrolló, lo que él llamó, el método de las fluxiones, que fueron el fundamento del Cálculo Diferencial. Estas ideas también fueron desarrolladas simultáneamente e independientemente por el matemático y filósofo alemán G. Leibniz (1.646–1.716). A ambos científicos se les concede la paternidad del Cálculo.

En 1.667 regresa a Cambridge y en 1.669 Barrow renuncia a su cargo de profesor de matemáticas en el Trinity College a favor de Newton.

Sus investigaciones en óptica las aplicó para construir el primer telescopio de reflexión. Gracias a este invento ingresó a la Sociedad Real, la institución científica inglesa de gran renombre y de la cual llegó a ser su presidente.

En 1.687 se publicó su obra capital: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural), en la que presenta las leyes de la mecánica clásica y su famosa teoría de la gravitación universal. Con esta obra ganó gran renombre y fue razón principal para que en 1.705 lo nombraran caballero del Imperio.

### ACONTECIMIENTOS IMPORTANTES

Durante la vida de Isaac Newton, en América y en el mundo hispano sucedieron los siguientes hechos notables: En 1.706 nace en Boston Benjamin Franklin, científico y estadista norteamericano. El 22 de diciembre de 1.721 Felipe V convierte el Colegio de Santa Rosa de Caracas en la universidad de Caracas (U. Central), que es inaugurada en 1.725.

## SECCION 3.1

### LA DERIVADA

La noción de derivada tuvo su origen en la búsqueda de soluciones a dos problemas, uno de la Geometría y otro de la Física, que son: Encontrar rectas tangentes a una curva y hallar la velocidad instantánea de un objeto en movimiento. El plantamiento del problema de las tangentes se remonta hasta la Grecia Antigua; sin embargo, para encontrar su solución debieron pasar muchos siglos. En el año 1.629, Pierre Fermat encontró un interesante método para construir las tangentes a una parábola. Su idea fue la de considerar a la recta tangente como la posición límite de rectas secantes. Este método, como veremos a continuación, contiene implícitamente el concepto de derivada. A partir de aquí, no pasó mucho tiempo para que Newton (1.624–1.727) y Leibniz (1.646–1.716), dos gigantes de la matemática, iniciaran el estudio sistemático de la derivada, con lo que dieron origen al Cálculo Diferencial.

#### RECTA TANGENTE

Sea  $y = f(x)$  una función real de variable real y sea  $A = (a, f(a))$  un punto fijo de su gráfico. Buscamos la recta tangente al gráfico de la función en el punto A. Para no tener dificultades vamos a asumir que nuestra función es continua y su gráfico se desarrolla suavemente (sin vértices). Tomemos otro punto  $P = (x, f(x))$  del gráfico, cercano al punto de tangencia  $A = (a, f(a))$ , y tracemos la recta secante que pasa por A y P.

Si movemos a P sobre el gráfico en tal forma que P se aproxime a A, la recta secante se aproximará a la recta tangente. En el límite, la secante coincidirá con la tangente. Esto es, la recta tangente es la posición límite de la recta secante cuando P tiende a A.

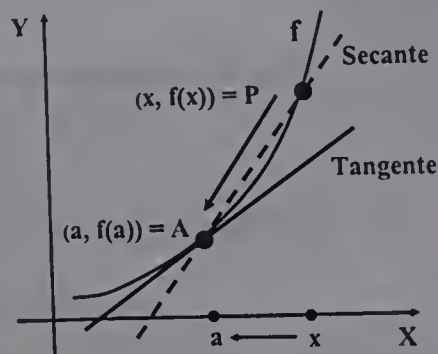
Veamos el punto anterior en forma analítica. Como la recta tangente pasa por el punto  $A = (a, f(a))$ , para obtener su ecuación bastará encontrar su pendiente.

La pendiente de la recta secante que pasa por  $P = (x, f(x))$  y  $A = (a, f(a))$  es

$$m_{PA} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ahora, cuando el punto  $P = (x, f(x))$  se aproxima a  $A = (a, f(a))$ , la secante se aproxima a la tangente y la pendiente de la secante se aproximará a la pendiente de la tangente. Pero, decir que  $P = (x, f(x))$  se aproxima a  $A = (a, f(a))$  es equivalente a decir que  $x$  se aproxima a  $a$ . Es pues razonable establecer que la pendiente  $m$  de la recta tangente al gráfico de la función  $y = f(x)$  en el punto  $A = (a, f(a))$  es

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (i)$$





## VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Supongamos que un automóvil cruza por dos ciudades distantes entre sí 180 Kms. y que estos 180 Kms. los recorre en 3 horas. El automóvil, en este recorrido, viaja a una velocidad promedio de  $\frac{180}{3} = 60$  Kms/h.

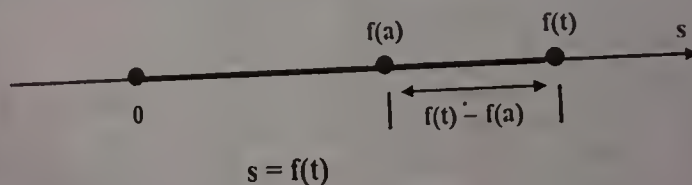
En general tenemos que:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Regresemos al caso del automóvil. La aguja del velocímetro no se ha mantenido estática marcando 60 Kms/h, que es la velocidad promedio, sino que ésta ha estado variando, algunas veces marcando 0 (en los semáforos) y otras marcando números mayores que 60. Esto se debe a que la aguja marca la **velocidad instantánea** y no la velocidad promedio. ¿Cómo se relacionan estas dos velocidades? A continuación contestamos esta inquietud tratando el problema en forma más general.

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación  $s = f(t)$ . Aquí la variable  $t$  mide el tiempo y la variable  $s$  mide el desplazamiento del objeto contabilizado a partir del origen de coordenadas. A esta función  $s = f(t)$  la llamaremos **función de posición**.

Buscamos una expresión para la velocidad instantánea en un instante fijo  $a$ . A esta velocidad la denotaremos por  $v(a)$ . Sea  $t$  un instante cualquiera cercano al instante  $a$ . En el intervalo de tiempo entre  $a$  y  $t$  el cambio de posición del objeto es  $f(t) - f(a)$ .



La velocidad promedio en este intervalo de tiempo de  $a$  a  $t$  es:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

Esta velocidad promedio es una aproximación a la **velocidad instantánea**  $v(a)$ . Esta aproximación será mejor a medida que  $t$  se acerque más al instante  $a$ . Por tanto, es natural establecer que:

$$v(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \quad (\text{ii})$$

Tanto en el problema de la recta tangente como en el de la velocidad instantánea, hemos llegado a un mismo límite ((i) y (ii)). En este límite radica la esencia del Cálculo Diferencial. Su importancia rebasa a los problemas geométricos y físicos que le dieron origen, y merece ser tratado independientemente. Este límite es la derivada.

## DEFINICION.

La derivada diremos que la En esta def que contiene a Al límite

Si  $h = x$

Luego, (1

Es tradic

En este

Con est siguiente.

A  $\Delta$  la varia

I el c

te

Es c

P



**DEFINICION.** La derivada de  $f$  en  $a$ , denotada por  $f'(a)$ , es el siguiente límite:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (1)$$

La derivada  $f'(a)$ , por ser un límite, puede o no existir. En el caso de que exista diremos que la función  $f$  es diferenciable en el punto  $a$ .

En esta definición está implícito que  $f$  debe estar definida en un intervalo abierto que contiene a  $a$ .

Al límite anterior lo podemos expresar en otra forma ligeramente diferente.

Si  $h = x - a$ , entonces  $x = a + h$  y  $x \rightarrow a \Leftrightarrow h \rightarrow 0$ .

Luego, (1) es equivalente a:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

Es tradicional llamar  $\Delta x$  (delta  $x$ ) a la diferencia  $x - a$ . Esto es,

$$\Delta x = x - a$$

En este caso,  $x = a + \Delta x$  y  $x \rightarrow a \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow 0$ .

Con esta notación, al límite (1) ó al (2) los podemos escribir de la manera siguiente, obteniendo la expresión tradicional para la derivada:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad (3)$$

A  $\Delta x = x - a$  se le llama **incremento de  $x$** , y expresa el cambio que experimenta la variable independiente al pasar del valor  $a$  al valor  $x = a + \Delta x$ .

La diferencia  $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$  es el **incremento de la función**, y expresa el cambio de los valores de la función al pasar de  $f(a)$  a  $f(a + \Delta x)$ .

El cociente  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  es la **razón incremental**, y de acuerdo a la igualdad (3) tenemos que:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Es decir, la derivada es el límite de la razón incremental cuando  $\Delta x$  tiende a 0.

Para hallar la derivada  $f'(a)$  se utilizan cualquiera de los 3 límites: (1), (2) ó (3).

**EJEMPLO 1.** Dada la función  $f(x) = x^2$ , hallar  $f'(3)$ .

**Solución**

Usaremos la fórmula (1):

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 2.** Dada la función  $g(x) = \frac{1}{x}$ , hallar  $g'(-2)$ .

**Solución**

Usaremos la fórmula (2) de la derivada:

$$\begin{aligned} g'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{-2+h} - \frac{1}{-2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 - (-2+h)}{(-2)h(-2+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(-2)h(-2+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2(-2+h)} = \frac{1}{2(-2+0)} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 3.** Probar que la siguiente función es diferenciable en 0 y que  $f'(0)=0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**Solución**

Debemos probar que existe  $f'(0)$ . Recordando el problema resuelto 1, sección 2.2:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0.$$

**EJEMPLO 4.** Probar que  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  no es diferenciable en 0. Esto es, no existe  $f'(0)$ .

**Solución**

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

Como  $+\infty$  no es un número real, concluimos que no existe  $f'(0)$ .

## DERIVADAS POR LA DERECHA Y POR LA IZQUIERDA

**DEFINICION.** La derivada por la derecha y la derivada por la izquierda de  $f$  en  $a$  son los siguientes límites, respectivamente:

$$(1) f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2) f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Es fácil ver que:

$$\exists f'(a) \Leftrightarrow \exists f'_+(a), \exists f'_-(a) \text{ y } f'_+(a) = f'_-(a)$$

**EJEMPLO 5.** Dada la función valor absoluto  $f(x) = |x|$ .

- a. Hallar  $f'_+(0)$     b. Hallar  $f'_-(0)$     c. Probar que  $f$  no es diferenciable en 0.

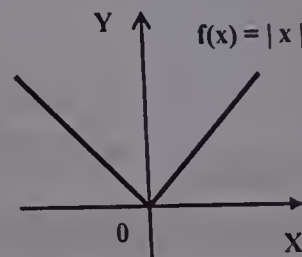
**Solución**

$$a. f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$b. f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

- c. Como las derivadas laterales no son iguales, concluimos que no existe  $f'(0)$  y, por tanto,  $f(x) = |x|$  no es diferenciable en el punto 0.

Este resultado puede explicarse geoméricamente: El gráfico de  $f(x) = |x|$  tiene un vértice en el punto  $(0, 0)$ . Este vértice no permite asignarle una recta tangente al gráfico en este punto, ya que al pasar de los puntos a la izquierda de  $(0, 0)$  a los de la derecha hay un cambio brusco de pendientes de  $-1$  a  $1$ .



## LA FUNCION DERIVADA

**DEFINICION.** La derivada de la función  $f$  es la función  $f'$ , tal que su valor en un número  $x$  del dominio de  $f$  es la derivada de  $f$  en  $x$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



El dominio de  $f'$  está formado por los puntos  $x$  del dominio de  $f$  en los cuales existe  $f'(x)$ . Es claro que el dominio de  $f'$  es un subconjunto del dominio de  $f$ .

Otro símbolo para  $f'$  es  $Df$ ; esto es  $Df = f'$  y en el caso de que se quiera especificar la variable independiente, se escribe  $D_x f$ , que se lee "la derivada de  $f$  respecto a  $x$ ". Se tiene, entonces

$$D_x f(x) = f'(x)$$

**EJEMPLO 6.**

- a. Probar que la derivada de  $f(x) = x^2$  es la función  $f'(x) = 2x$ .  
 b. Usando la parte (a) hallar  $f'(3)$  y observar que el resultado del ejemplo 1 es un caso particular del resultado (a).

**Solución**

- a. Sea  $x$  un punto cualquiera del dominio de  $f$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

Esto es,  $f'(x) = 2x$  y el dominio de  $f'$  es el mismo que el de  $f$ , que es todo  $\mathbb{R}$ .

- b. En  $f'(x) = 2x$ , tomando  $x = 3$ , se tiene que  $f'(3) = 2(3) = 6$ . Este resultado coincide con el obtenido en el ejemplo 1.

**EJEMPLO 7.**

- a. Probar que la derivada de  $g(x) = \frac{1}{x}$  es la función

$$D_x g(x) = -\frac{1}{x^2}$$

- b. Usando la parte (a) hallar  $D_x g(-2)$  y observar que el resultado del ejemplo 2 es un caso particular del resultado (a).

**Solución**

- a. Sea  $x$  un punto cualquiera del dominio de  $g$ . Esto es  $x \neq 0$ .

$$\begin{aligned} D_x g(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{h x(x+h)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h x(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+0)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{Esto es, } D_x g(x) = g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

El dominio de  $D_x g(x) = -\frac{1}{x^2}$  es el mismo que el de  $g(x) = \frac{1}{x}$ , que es  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

b. En  $D_x g(x) = -\frac{1}{x^2}$ , tomando  $x = -2$ , se tiene  $D_x g(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$ .

Este resultado coincide con el obtenido en ejemplo 2:  $g'(-2) = -\frac{1}{4}$ .

## LA NOTACION DE LEIBNIZ

Además de la notación que hemos introducido para designar a la función derivada existen otras. Entre éstas tenemos la notación clásica, que fue introducida por Leibniz durante la época del nacimiento del Cálculo. Esta notación para designar la derivada de una función  $y = f(x)$  usa cualquiera de las cuatro expresiones siguientes:

$$1. \frac{dy}{dx} \quad 2. \frac{df}{dx} \quad 3. \frac{df(x)}{dx} \quad 4. \frac{d}{dx}(f(x))$$

En el ejemplo 6 encontramos que la derivada de la función  $f(x) = x^2$  es  $f'(x) = 2x$ . Con la notación de Leibniz este resultado se escribe así:

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x \quad \text{o bien,} \quad \frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x.$$

y si en lugar de  $f(x) = x^2$  escribimos  $y = x^2$ , entonces su derivada se expresaría así:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x$$

Regresando a la notación incremental, si una función es denotada por  $y = f(x)$ , entonces el incremento de la función podemos expresarlo así:  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  y a la derivada, con la notación de Leibniz, así:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

En esta expresión nos inspiraremos en un capítulo posterior para asignar significados propios a  $dx$  y a  $dy$ . Aquí  $\frac{dy}{dx}$  no debe interpretarse como una fracción, sino simplemente como otra notación para la derivada  $f'(x)$ .

Si  $y = f(x)$ , con la notación de Leibniz, la derivada  $f'(a)$  se escribe así:

$$y'(a), \quad \frac{dy}{dx}(a), \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} \quad \text{ó} \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}$$

**EJEMPLO 8.** Probar que  $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , donde  $x > 0$ .

**Solución**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Observar que el dominio de  $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  es  $(0, +\infty)$ .

**NOTACION.** Si una función se expresa mediante otras variables, que no sean  $x$  o  $y$ , la notación de la derivada cambiará de acuerdo a las nuevas variables. Así, la derivada de la función  $u = t^2$  se expresa en la forma siguiente:

$$1. u' = 2t \quad 2. \frac{du}{dt} = 2t \quad 3. \frac{d(t^2)}{dt} = 2t \quad 4. D_t(t^2) = 2t$$

## DIFERENCIABILIDAD Y CONTINUIDAD

El siguiente es un resultado importante que relaciona la diferenciabilidad con la continuidad.

**TEOREMA 3.1** Si  $f$  es diferenciable en el punto  $a$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ .

**Demostración**

Consideremos la siguiente identidad

$$f(x) - f(a) = (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Tomemos límites a ambos lados:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \left[ (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = 0 \cdot f'(a) = 0\end{aligned}$$

Esto es,  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$ . De donde,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Esta última igualdad nos dice que  $f$  es continua en  $a$ .

Capítulo 3. La Derivada

**OBSERVACIÓN**

El recíproco de este teorema no es cierto en un punto y se ilustra el caso. Véase el ejemplo 5.

Igual situación es continua en  $a$ .

Damos razones de motivación.

**DEFINICIÓN**

a. La recta tangente a la curva en el punto  $a$  que pasa por  $(a, f(a))$ .

b. La recta normal a la curva en el punto  $a$  que pasa por  $(a, f(a))$  y es perpendicular a la recta tangente.

**EJEMPLO**

**Solución**

a. En el punto  $a = 2$ ,  $f(2) = 4$ ,  $f'(2) = 4$ . La recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(2, 4)$  es la recta  $y = 4x - 4$ .

y =

b. La recta normal a la curva en el punto  $a = 2$  que pasa por  $(2, 4)$  es la recta  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$ .

y =



**OBSERVACION.**

El recíproco del teorema anterior no se cumple. Una función puede ser continua en un punto y no ser diferenciable en ese punto. La función valor absoluto nos ilustra el caso. Esta función es continua en el punto 0. Sin embargo, como se mostró en el ejemplo 5, esta función no es diferenciable en 0.

Igual situación ocurre con la función  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , del ejemplo 4, la cual también es continua en 0, pero no es diferenciable en ese punto.

## RECTAS TANGENTES

Damos respaldo oficial al problema geométrico de la recta tangente, que nos sirvió de motivación para introducir la derivada.

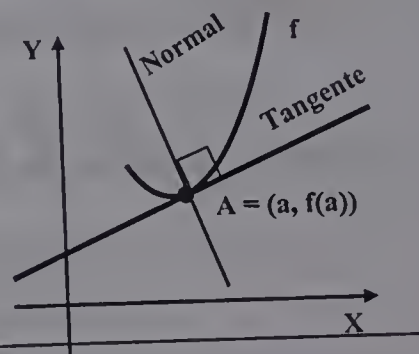
**DEFINICION.** Sea  $f$  una función diferenciable en el punto  $a$ .

- a. La recta **tangente** al gráfico de la función  $f$  en el punto  $A = (a, f(a))$  es la recta que pasa por  $A$  y tiene por pendiente  $m = f'(a)$ . O sea, es la recta

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

- b. La recta **normal** al gráfico de la función  $f$  en el punto  $A = (a, f(a))$  es la recta que pasa por  $A$  y es perpendicular a la recta tangente en  $A$ . O sea, es la recta

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a), \text{ donde } f'(a) \neq 0.$$



**EJEMPLO 9.** Sea la función  $f(x) = x^2$ . Hallar:

- La recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(2, 4)$ .
- La recta normal al gráfico de  $f$  en el punto  $(2, 4)$ .

**Solución**

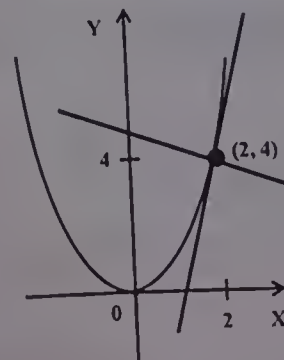
- a. En el ejemplo 6 probamos que la derivada de  $f(x) = x^2$  es  $f'(x) = 2x$ . Cuando  $x = 2$  tenemos  $f'(2) = 2(2) = 4$ . Luego, la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(2, 4)$  es

$$y - f(2) = f'(x)(x - 2) \Rightarrow y - 4x + 4 = 0$$

- b. La recta normal al gráfico de  $f$  en el punto  $(2, 4)$  es

$$y - f(2) = -\frac{1}{f'(2)}(x - 2) \Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

$$\Rightarrow 4y + x - 18$$



**EJEMPLO 10.**

Sea la función  $g(x) = \frac{1}{x}$ . Hallar:

- La recta tangente al gráfico de  $g$  en el punto donde  $x = -\frac{1}{2}$
- La recta normal al gráfico de  $g$  en el punto donde  $x = -\frac{1}{2}$

**Solución**

a. Hallemos  $g'(-1/2)$ . Por el ejemplo 7.a. sabemos que

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ y, por tanto,}$$

$$g'(-1/2) = -\frac{1}{(-1/2)^2} = -4.$$

$$\text{Por otro lado, } g(-1/2) = \frac{1}{-1/2} = -2.$$

Luego, la recta tangente buscada es:

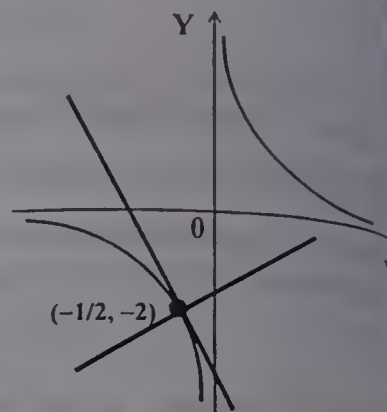
$$y - g(-1/2) = g'(-1/2)(x - (-1/2)) \Rightarrow$$

$$y - (-2) = -4(x + 1/2) \Rightarrow y + 4x + 4 = 0$$

b. La recta normal buscada es

$$y - g(-1/2) = -\frac{1}{g'(-1/2)}(x - (-1/2)) \Rightarrow y - (-2) = -\frac{1}{-4}(x + 1/2)$$

$$\Rightarrow 8y - 2x + 15 = 0.$$

**PROBLEMAS RESUELTOS 3.1****PROBLEMA 1.**

Hallar  $a$  y  $b$  para que la siguiente función sea diferenciable en 1

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

**Solución**

Por el teorema 3.1, si  $f$  es diferenciable en 1,  $f$  debe ser continua en 1. Luego:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

Pero,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + x) = a + b$$

$$\text{Luego, } a + b = 1 \quad (1)$$

Por otro lado, por ser  $f$  diferenciable en 1, la derivada por la derecha en este punto debe ser igual a su derivada por la izquierda. Esto es,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{a(1+h) + b - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ah + (a+b) - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ah + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ah}{h} = a \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } a = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Finalmente, de (1) y (2), obtenemos  $a = \frac{1}{2}$  y  $b = \frac{1}{2}$ .

**PROBLEMA 2.** Hallar la derivada de la función  $f(x) = x^3$ .

**Solución**

Sea  $x$  un punto cualquiera del dominio de  $f$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3] - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[3x^2 + 3xh + h^2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [3x^2 + 3xh + h^2] = 3x^2 \end{aligned}$$

Luego,  $f'(x) = 3x^2$  ó bien  $\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2$ , con dominio todo  $\mathbb{R}$ .



**PROBLEMA 3.** Hallar la derivada de la función  $f(x) = |x|$ .

**Solución**

Sabemos, por el ejemplo 5, que no existe  $f'(0)$ . Veamos qué sucede cuando  $x \neq 0$ .

Si  $x > 0$ , entonces  $|x| = x$ . Tomamos  $h$  suficientemente pequeño para que  $x + h > 0$  y, por lo tanto,  $|x + h| = x + h$ . En este caso tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

Si  $x < 0$ , entonces  $|x| = -x$ . Tomamos  $h$  suficientemente pequeño para que  $x + h < 0$  y, por lo tanto,  $|x + h| = -(x + h)$ . En este caso tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

En conclusión, la derivada de la función  $f(x) = |x|$  es

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{con dominio } \mathbb{R} - \{0\}.$$

**PROBLEMA 4.** La tangente a la parábola  $y = x^2$  en cierto punto  $P$  es paralela a la recta

$$L: y + 4x + 12 = 0.$$

Hallar el punto  $P$  y la recta tangente.

**Solución**

Sea  $P = (a, a^2)$ . Por el ejemplo 6 sabemos que  $y' = 2x$ , luego la pendiente de la recta tangente a la parábola  $y = x^2$  en el punto  $P = (a, a^2)$  es  $m = 2a$ .

Para la pendiente de la recta

$$L: 4x + y + 12 = 0 \text{ es } -4.$$

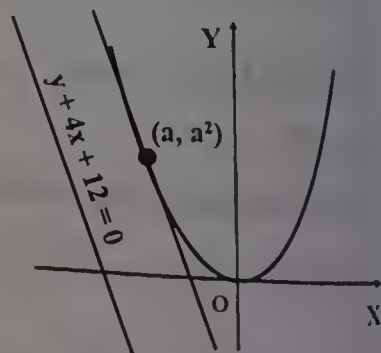
Como la tangente y la recta  $L$  son paralelas, ambos deben tener igual pendiente.

$$2a = -4 \Rightarrow a = -2.$$

Por lo tanto, el punto  $P$  buscado es  $P = (-2, (-2)^2) = (-2, 4)$ .

La recta tangente a la parábola en  $P = (-2, 4)$  es

$$y - 4 = -4(x - (-2)), \text{ o sea } 4x + y + 4 = 0$$



## PROBLEMAS PROPUESTOS 3.1

En los problemas del 1 al 9, hallar la derivada de la función en el punto a indicado.

1.  $f(x) = 2$  en  $a = 1$  ✓

2.  $g(x) = x$  en  $a = 3$  ✓

3.  $h(x) = 3x$  en  $a = 2$  ✓

4.  $f(x) = 4x - 1$  en  $a = 2$  ✓

5.  $g(x) = 2x^2 - 5$  en  $a = -1$  ✓

6.  $h(x) = \frac{3}{x}$  en  $a = -2$  ✓

7.  $f(x) = 3x^2 - 5$  en  $a = -1$  ✓

8.  $g(x) = x + \frac{1}{x}$  en  $a = 2$  ✓

9.  $h(x) = x^3 + 2$  en  $a = -1$  ✓

10. Probar que la siguiente función es diferenciable en 0:  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

11. Probar que la siguiente función no es diferenciable en 0:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

12. Hallar los valores de  $a$  y  $b$  para que  $f$  sea diferenciable en 1:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En los problemas del 13 al 21, hallar la derivada de la función indicada.

13.  $f(x) = 2$  ✓ 14.  $g(x) = x$  ✓ 15.  $h(x) = 3x$  ✓ 16.  $f(x) = 4x - 1$  ✓ 17.  $g(x) = 2x^2 - 5$  ✓

18.  $h(x) = \frac{3}{x}$  ✓ 19.  $f(x) = 3x^2 - 5$  ✓ 20.  $g(x) = x + \frac{1}{x}$  ✓ 21.  $h(x) = x^3 + 2$  ✓

22. Dada la función  $f(x) = x^3 + x^2$

a. Hallar la pendiente de la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto donde  $x = 1$ .

b. Hallar la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto donde  $x = 1$ .

c. Hallar la recta normal al gráfico de  $f$  en el punto donde  $x = 1$ .

23. Dada la función  $g(x) = \sqrt{x - 3}$

a. Hallar la pendiente de la recta tangente al gráfico de  $g$  en el punto donde  $x = 12$ .

b. Hallar la recta tangente al gráfico de  $g$  en el punto donde  $x = 12$ .

c. Hallar la recta normal al gráfico de  $g$  en el punto donde  $x = 12$ .

24. Dada la función  $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 7$

a. Hallar su función derivada.

b. ¿En qué punto del gráfico de  $h$  la tangente es paralela a la recta  $y = 3x + 6$ ?

c. Hallar la recta tangente al gráfico de  $h$  en el punto encontrado en la parte b.

25. Dada la función  $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

a. Hallar la función derivada de  $f$ .

b. Una tangente al gráfico de  $f$  tiene por pendiente  $1/2$ . Hallar una ecuación de esta tangente.

## SECCION 3.2

### TECNICAS BASICAS DE DERIVACION

Llamaremos derivación o diferenciación al proceso de hallar la derivada de una función. En la sección anterior, este proceso fue llevado a cabo aplicando directamente la definición, lo cual dependía del laborioso y tedioso trabajo de calcular ciertos límites. En esta sección presentaremos algunos teoremas que nos permitirán encontrar la derivada de un gran número de funciones en forma rápida y mecánica, sin tener que recurrir a los límites. Algunos resultados los presentaremos usando las diferentes notaciones de la derivada.

#### TEOREMA 3.2 Regla de la constante.

Si  $f$  es la función constante  $f(x) = c$ , entonces

$$f'(x) = 0. \text{ O bien, } D_x c = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{dc}{dx} = 0$$

Demostración

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

#### EJEMPLO 1.

$$\text{a. } D_x(2) = 0 \quad \text{b. } \frac{d(-8)}{dx} = 0 \quad \text{c. } \frac{d(\sqrt{3})}{dx} = 0 \quad \text{d. } D_x(\pi) = 0$$

#### TEOREMA 3.3 Regla de la potencia.

Si  $f(x) = x^n$  y  $n$  es un número real, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}. \text{ O bien}$$

$$D_x(x^n) = nx^{n-1} \quad \text{ó} \quad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Demostración

Aquí sólo probaremos este teorema para el caso en el que  $n$  es un número natural.

Tomando en cuenta el problema resuelto 7 de la sección 2.1 tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

#### COROLARIO.

La derivada de la identidad,  $f(x) = x$ , es la función constante

$$f'(x) = 1. \text{ O bien } \frac{dx}{dx} = 1, \quad \text{ó} \quad D_x x = 1$$

Demostración

$$D_x(x) = D_x(x^1) = 1x^0 = 1$$



**EJEMPLO 2.**

$$\text{a. } D_x(x^2) = 2x \quad \text{b. } \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 \quad \text{c. } D_x(x^4) = 4x^3$$

**EJEMPLO 3.**

$$\text{a. } \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\text{b. } \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{c. } \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3} \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

**DERIVADA DE LA FUNCION EXPONENCIAL NATURAL**

$$\text{TEOREMA 3.4} \quad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad \text{ó bien} \quad D_x(e^x) = e^x$$

**Demostración**

De acuerdo al teorema 2.22 parte 3 de la sección 2.7, tenemos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Ahora, si  $f(x) = e^x$ , tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x(1) = e^x \end{aligned}$$

**DERIVADA DE UNA SUMA O DIFERENCIA****TEOREMA 3.5** Regla de la suma y de la diferencia.

Si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables en  $x$ , entonces  $f \pm g$  es diferenciable en  $x$  y se cumple que:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

o, simplemente,

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

La regla de la suma o diferencia, con las otras notaciones se expresa así:

$$D_x [f(x) \pm g(x)] = D_x f(x) \pm D_x g(x)$$

$$\frac{d}{dx} [f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx} (f(x)) \pm \frac{d}{dx} (g(x))$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} (f(x) \pm g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) \pm g(x+h)] - [f(x) \pm g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x) \end{aligned}$$

Este resultado se puede extender fácilmente al caso de varios sumandos.

**EJEMPLO 4.**

$$a. D_x [e^x + x^3] = D_x [e^x] + D_x [x^3] = e^x + 3x^2$$

$$b. D_x [x^4 - x^2 + 5] = D_x (x^4) - D_x (x^2) + D_x (5) = 4x^3 - 2x + 0 = 4x^3 - 2x$$

### DERIVADA DE UN PRODUCTO

**TEOREMA 3.6** Regla del producto.

Si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables en  $x$ , entonces  $fg$  es diferenciable en  $x$  y se cumple que

$$(fg)'(x) = f(x) g'(x) + g(x) f'(x)$$

o, simplemente,

$$(fg)' = f g' + g f'$$

La regla del producto, con las otras notaciones se expresa así:

$$D_x [f(x) g(x)] = f(x) D_x g(x) + g(x) D_x f(x)$$

$$\frac{d}{dx} [f(x) g(x)] = f(x) \frac{d}{dx} (g(x)) + g(x) \frac{d}{dx} (f(x))$$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 10.

**EJEMPLO 5.**

$$\begin{aligned} D_x [(x^3 + 1)(x^2 - 8)] &= (x^3 + 1) D_x [x^2 - 8] + (x^2 - 8) D_x [x^3 + 1] \\ &= (x^3 + 1)(2x - 0) + (x^2 - 8)(3x^2 + 0) \\ &= 5x^4 - 24x^2 + 2x \end{aligned}$$

En el teorema anterior, si una de las dos funciones es una constante, se tiene:

**COROLARIO.** Si  $c$  es una constante y  $f$  es una función diferenciable en  $x$ , entonces  $cf$  es diferenciable en  $x$  y se cumple que:

$$(cf)'(x) = cf'(x),$$

o bien

$$D_x [cf(x)] = c D_x f(x) \quad \text{ó} \quad \frac{d}{dx} [cf(x)] = c \frac{d}{dx} (f(x))$$

### Demostración

Aplicando la regla del producto y la regla de la constante tenemos que:

$$D_x [cf(x)] = c D_x f(x) + f(x) D_x c = c D_x f(x) + 0 = c D_x f(x).$$

### EJEMPLO 6.

$$D_x [5x^3] = 5D_x [x^3] = 5(3x^2) = 15x^2$$

## DERIVADA DE UN COCIENTE

### TEOREMA 3.7 Regla del cociente.

Si  $f$  y  $g$  son diferenciables en  $x$  y  $g(x) \neq 0$ , entonces  $\frac{f}{g}$  es diferenciable en  $x$  y se cumple que:

$$\left( \frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{o simplemente,} \quad \left( \frac{f}{g} \right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Con las otras notaciones:

$$D_x \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x) D_x f(x) - f(x) D_x g(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \frac{d}{dx} (f(x)) - f(x) \frac{d}{dx} (g(x))}{[g(x)]^2}$$

### Demostración

Ver el problema resuelto 12.

### EJEMPLO 7.

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 3} \right] = \frac{(x^2 + 3) \frac{d}{dx} (2x^3 - 1) - (2x^3 - 1) \frac{d}{dx} (x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^2}$$



$$= \frac{(x^2 + 3)(6x^2) - (2x^3 - 1)(2x)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2x^4 + 18x^2 - 4x^4 + 2x}{(x^2 + 3)^2}$$

**EJEMPLO 8.** Hallar las rectas tangentes horizontales a la curva  $y = e^2 \frac{1-x}{e^x}$

**Solución**

Teniendo en cuenta que  $e^2$  es una constante y aplicando la regla de cociente:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[ e^2 \frac{1-x}{e^x} \right] = e^2 \frac{d}{dx} \left[ \frac{1-x}{e^x} \right] = e^2 \frac{e^x \frac{d}{dx}(1-x) - (1-x) \frac{d}{dx}(e^x)}{(e^x)^2} \\ &= e^2 \frac{e^x(-1) - (1-x)e^x}{e^{2x}} = e^2 \frac{e^x(x-2)}{e^{2x}} = e^2 \frac{x-2}{e^x} \end{aligned}$$

Las tangentes horizontales deben tener pendiente 0:

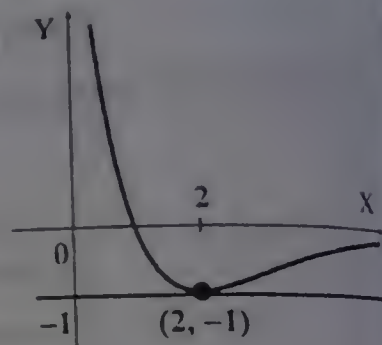
$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow e^2 \frac{x-2}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Luego, la curva dada tiene sólo una tangente horizontal en el punto donde  $x = 2$ .

Reemplazando  $x = 2$  en la ecuación de la curva:

$$y = \frac{e^2(1-2)}{e^2} = -1.$$

Luego, el punto de tangencia es  $(2, -1)$  y la ecuación de la tangente es  $y = -1$



## PROBLEMAS RESUELTOS 3.2

**PROBLEMA 1.** Hallar la derivada de la función  $y = x\sqrt{x}$ .

**Solución**

Podemos proceder de dos formas:

a. Mediante la regla del producto.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (x\sqrt{x}) = x \frac{d}{dx} (\sqrt{x}) + \sqrt{x} \frac{d}{dx} (x) = x \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

b. Mediante la regla de la potencia.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x(x^{1/2})) = \frac{d}{dx}(x^{3/2}) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

**PROBLEMA 2.**

Hallar la derivada de la función  $u = \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{3}{\sqrt[3]{v^2}}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{du}{dv} &= \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{3}{\sqrt[3]{v^2}}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right) - \frac{d}{dv}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{v^2}}\right) \\ &= \frac{d}{dv}(v^{-1/2}) - \frac{d}{dv}(3v^{-2/3}) = -\frac{1}{2}v^{-1/2-1} - 3\left(-\frac{2}{3}v^{-2/3-1}\right) \\ &= -\frac{1}{2v^{3/2}} + \frac{2}{v^{5/3}} = -\frac{1}{2\sqrt{v^3}} + \frac{2}{\sqrt[3]{v^5}}. \end{aligned}$$

**PROBLEMA 3.**

Hallar la derivada de la función  $y = (1 + \sqrt{x})(x - \sqrt{2})$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (1 + \sqrt{x}) \frac{d}{dx}(x - \sqrt{2}) + (x - \sqrt{2}) \frac{d}{dx}(1 + \sqrt{x}) \\ &= (1 + \sqrt{x}) \left( \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(\sqrt{2}) \right) + (x - \sqrt{2}) \left( \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) \right) \\ &= (1 + \sqrt{x})(1 - 0) + (x - \sqrt{2})\left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= 1 + \sqrt{x} + \frac{x - \sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} + 2x + x - \sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} + 3x - \sqrt{2}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 4.**

Si  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones diferenciables, probar que

$$(fgh)' = fgh' + fhg' + ghf'.$$

**Solución**

Escribimos  $fgh = [fg]h$  y aplicamos la regla del producto:

$$\begin{aligned} (fgh)' &= ([fg]h)' = [fg]h' + h[fg]' \\ &= fgh' + h(fg' + gf') \\ &= fgh' + fhg' + ghf' \end{aligned}$$

**PROBLEMA 5.**

Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes, hallar la derivada de la función  
 $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ .

**Solución**

Aplicando el problema anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} [(x-a)(x-b)(x-c)] \\ &= (x-a)(x-b) \frac{d}{dx}(x-c) + (x-a)(x-c) \frac{d}{dx}(x-b) + (x-b)(x-c) \frac{d}{dx}(x-a) \\ &= (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c) \\ &= x^2 - (a+b)x + ab + x^2 - (a+c)x + ac + x^2 - (b+c)x + bc \\ &= 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc\end{aligned}$$

**PROBLEMA 6.**

Hallar la derivada de la función  $y = \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$ .

**Solución**

Aplicamos la regla del cociente

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(a^2 - x^2) \frac{d}{dx}(a^2 + x^2) - (a^2 + x^2) \frac{d}{dx}(a^2 - x^2)}{(a^2 - x^2)^2} \\ &= \frac{(a^2 - x^2)(2x) - (a^2 + x^2)(-2x)}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{2a^2x - 2x^3 + 2a^2x + 2x^3}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{4a^2x}{(a^2 - x^2)^2}\end{aligned}$$

**PROBLEMA 7.**

Hallar la parábola  $y = x^2 + bx + c$  que tiene por tangente a la recta  $y = x$  en el punto  $(2, 2)$ .

**Solución**

Sea  $f(x) = x^2 + bx + c$ .

La pendiente de la recta  $y = x$  es  $m = 1$ .

Por otro lado, la pendiente de la tangente a la parábola en el punto  $(2, 2)$  es  $f'(2)$ . En consecuencia, debemos tener que  $f'(2) = 1$ .

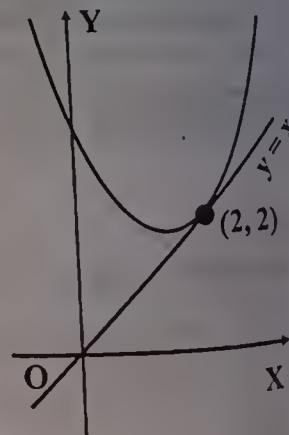
Pero,

$$f'(x) = 2x + b \Rightarrow f'(2) = 2(2) + b = 4 + b.$$

Luego,

$$4 + b = 1 \Rightarrow b = -3.$$

Reemplazando el valor  $b = -3$  en la parábola:  $y = x^2 - 3x + c$





Ahora hallamos el valor de  $c$ . Para esto, usamos el hecho de que el punto  $(2, 2)$  está en la parábola  $y$ , por tanto, debe satisfacer su ecuación. Esto es,

$$2 = (2)^2 - 3(2) + c \Rightarrow c = 4$$

En consecuencia, la parábola buscada es  $y = x^2 - 3x + 4$ .

**PROBLEMA 8.** Hallar la recta tangente al gráfico de la función siguiente (Bruja de Agnesi) en el punto donde  $x = 2a$ .

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$

**Solución**

Encontremos la pendiente de la tangente en el punto  $x = 2a$ .

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} \right) \\ &= \frac{(x^2 + 4a^2) \frac{d}{dx} (8a^3) - 8a^3 \frac{d}{dx} (x^2 + 4a^2)}{(x^2 + 4a^2)^2} \\ &= \frac{(x^2 + 4a^2)(0) - 8a^3(2x)}{(x^2 + 4a^2)^2} = \frac{-16a^3x}{(x^2 + 4a^2)^2} \end{aligned}$$

Ahora, la pendiente de la recta tangente en el punto donde  $x = 2a$  es:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2a} = \frac{-16a^3(2a)}{((2a)^2 + 4a^2)^2} = \frac{-32a^4}{64a^4} = -\frac{1}{2}$$

Encontremos el punto de tangencia. Reemplazando  $x = 2a$  en la ecuación que define la función tenemos:

$$y = \frac{8a^3}{(2a)^2 + 4a^2} = \frac{8a^3}{8a^2} = a.$$

Luego, el punto de tangencia es  $(2a, a)$ .

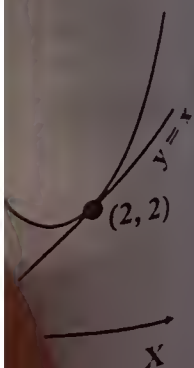
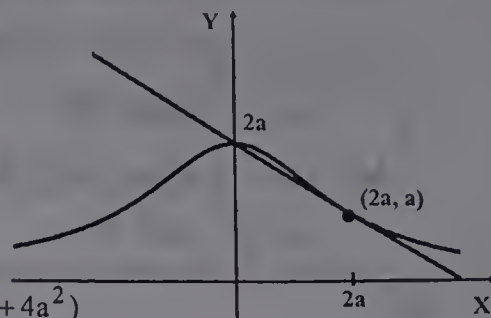
Ahora, ya podemos hallar la tangente buscada:

$$y - a = -\frac{1}{2}(x - 2a), \text{ o sea } x + 2y - 4a = 0.$$

**PROBLEMA 9.** Hallar los puntos del gráfico de la siguiente función en los cuales la recta tangente pasa por el origen de coordenadas.

$$f(x) = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$$

**Solución**



Sea  $(a, f(a))$  un punto del gráfico tal que la recta tangente en  $(a, f(a))$  pasa por el origen. En general, la ecuación de la recta tangente es:

$$L: y - f(a) = f'(a)(x - a) \Rightarrow$$

$$L: y = f'(a)x + [f(a) - af'(a)]$$

$$L \text{ pasa por el origen} \Leftrightarrow$$

$$[f(a) - af'(a)] = 0 \Leftrightarrow f(a) = af'(a)$$

$$\text{Pero, } f'(a) = 6a^2 + 26a + 5. \text{ Luego,}$$

$$f(a) = af'(a) \Leftrightarrow$$

$$2a^3 + 13a^2 + 5a + 9 = a(6a^2 + 26a + 5)$$

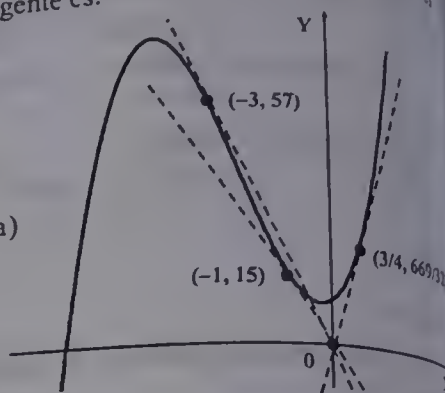
$$\Leftrightarrow 4a^3 + 13a^2 - 9 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son  $-3$ ,  $-1$ , y  $3/4$ . Luego, los puntos buscados son:

$$P_1 = (-3, f(-3)) = (-3, 57),$$

$$P_2 = (-1, f(-1)) = (-1, 15) \quad y$$

$$P_3 = (3/4, f(3/4)) = (3/4, 669/32)$$



PROBL

Solución

$$\left( \frac{1}{g(x)} \right)$$

PRO

**PROBLEMA 10.** Regla del producto. Si  $f$  y  $g$  son diferenciables en  $x$ , probar:

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Solución

$$(fg)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Restando y sumando  $f(x+h)g(x)$  al numerador tenemos:

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)] + [f(x+h)g(x) - f(x)g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[ g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= \left[ \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \right] \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] + \left[ \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \right] \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \end{aligned}$$

Solu

T

A

**PROBLEMA 11.**

Si  $g$  es una función diferenciable en  $x$  y  $g(x) \neq 0$ , probar que

$$\left( \frac{1}{g(x)} \right)' = - \frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Solución

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{g(x)} \right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \right] \\ &= \left[ - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \right] \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \right] \\ &= - \frac{1}{g(x)g(x)} g'(x) = - \frac{g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 12.**

**Regla del cociente.** Si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables y  $g(x) \neq 0$ , probar que

$$\left( \frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Solución

Tenemos que  $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$ .

Ahora, aplicamos la regla del producto y el problema anterior:

$$\begin{aligned} \left( \frac{f}{g} \right)'(x) &= \left( f(x) \frac{1}{g(x)} \right)' = f(x) \left( \frac{1}{g(x)} \right)' + \frac{1}{g(x)} f'(x) \\ &= f(x) \left( - \frac{g'(x)}{[g(x)]^2} \right) + \frac{1}{g(x)} f'(x) = \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)} \\ &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$



## PROBLEMAS PROPUESTOS 3.2

En los problemas del 1 al 38, hallar la derivada de la función indicada. Las letras  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son constantes.

1.  $y = 4x^2 - 6x + 1$

3.  $y = 0,5x^4 - 0,3x^2 + 2,5x^1$

5.  $s = 2t^{-5} + \frac{t^3}{3} - 0,3t^{-2}$

7.  $f(x) = 3x^{5/6} - 4x^{-2/3} - 10$

9.  $y = -\frac{2x^6}{3a}$

11.  $z = \frac{t^3 - bt^2 - 3}{6}$

13.  $z = \sqrt[3]{t} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$

15.  $y = (5x^4 - 4x^5)(3x^2 + 2x^3)$

17.  $y = \sqrt{x} e^x$

19.  $y = (x-1)(x-2)(x-3)$

21.  $z = \sqrt{t}(t^4 - 1)(t^6 - 2)$

23.  $u = 2\sqrt{x}(x^2 - \sqrt{x} + \sqrt{5})$

25.  $y = \frac{3}{x-9}$

26.  $y = \frac{x}{x-8}$

28.  $z = \frac{t}{t^2 + 1}$

29.  $u = \frac{2t^3 + 1}{t-1}$

31.  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x}$

32.  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{x}}$

34.  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - (x-1)(x^2 - 1)$

36.  $y = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}}$

37.  $y = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + 3\sqrt[3]{x}}$

2.  $y = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^6}{6}$

4.  $u = v^{10} - \frac{3v^8}{4} + 0,4v^3 - 0,1$

6.  $z = \frac{1}{3y} - \frac{3}{y^2} + 2$

8.  $g(x) = ax^5 - bx^{-4} + cx^{3/2} + d$

10.  $z = \frac{x^3}{a+b} + \frac{x^5}{a-b} - x$

12.  $y = 4\sqrt{x} - \frac{3}{2x^2} + \sqrt{3}$

14.  $u = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{3}$

16.  $y = x^3 e^x$

18.  $y = x^e + e^x$

20.  $y = \frac{1}{3}(2x^3 - 1)(3x^2 - 2)(6x - 5)$

22.  $y = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$

24.  $y = (\sqrt{x} - 3)\left(\frac{2}{x} - 1\right)$

27.  $y = \frac{x+3}{x-3}$

30.  $y = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x + 1}$

33.  $y = \frac{ax^2 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

35.  $y = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$

38.  $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

unción indicada. La

En los problemas del 39 al 42, hallar la recta tangente al gráfico de la función en el punto especificado.

39.  $y = x^4 - 3x^2 + x - 2$ ,  $(1, -3)$

40.  $y = x^2(x - 5)$ ,  $(2, -12)$

41.  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 3}$ ,  $(-1, \frac{1}{2})$

42.  $g(x) = \frac{x^3}{2a - x}$ ,  $(a, a^2)$

43. Hallar el punto en la parábola  $y = 3x^2 - 2x - 1$  en el cual la recta tangente es horizontal (paralela al eje X).

44. Hallar la recta tangente horizontal a la curva  $y = \frac{e^x}{x}$

45. Hallar la recta tangente horizontal a la curva  $y = \frac{e^x}{1 + x^2}$

46. Hallar los puntos del gráfico de la función  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{7}{2}$  en los cuales la recta tangente es horizontal (paralela al eje X).

47. Hallar la tangente al gráfico de  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$  que es paralela a la recta  $3x + y - 1 = 0$ .

48. Hallar la tangente al gráfico de  $g(x) = \sqrt{x} + 2$  que es perpendicular a la recta  $2x + y + 8 = 0$ .

49. Hallar la parábola  $y = ax^2 + bx$  que tenga a  $(2, -12)$  como punto más bajo.

50. Hallar la parábola  $y = ax^2 + bx$  que tenga a  $(4, 16)$  como punto más alto.

51. Hallar la parábola  $y = x^2 + bx + c$  que es tangente a la recta  $2x + y + 7 = 0$  en el punto  $(-2, -3)$

### SECCION 3.3

## DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

#### TEOREMA 3.8

1.  $D_x(\sin x) = \cos x$

2.  $D_x(\cos x) = -\sin x$

3.  $D_x(\tan x) = \sec^2 x$

4.  $D_x(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

5.  $D_x(\sec x) = \sec x \tan x$

6.  $D_x(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

Demostración

$$1. D_x(\sin x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

Fino, usando la identidad del seno de una suma tenemos que

$$\sin(x+h) - \sin x = \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x \\ = \sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h$$

Luego,

$$D_x(\sin x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin h}{h}$$

$$= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \right) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \left( \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \right) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right)$$

$$= (\sin x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x$$

2. Se prueba como en (1). Ver el problema propuesto 12.

$$3. D_x(\tan x) = D_x\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x D_x(\sin x) - \sin x D_x(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \sec^2 x.$$

4. Se prueba como (3). Ver el problema propuesto 13.

$$5. D_x(\sec x) = D_x\left[\frac{1}{\cos x}\right] = \frac{(\cos x)D_x(1) - (1)D_x(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{0 - (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x.$$

6. Se prueba como (5). Ver el problema propuesto 14.

**EJEMPLO 1.** Hallar la derivada de

a.  $f(x) = x^3 \sin x$

b.  $h(t) = \tan t - t$

**Solución**

a.  $f'(x) = (x^3)'(\sin x) + (x^3)(\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$

b.  $h'(t) = \sec^2 t - 1 = \tan^2 t$

(Identidad Trig. 6)



**EJEMPLO 2.** Calcular la derivada de

a.  $y = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$

b.  $y = \frac{1 - \cot x}{\operatorname{cosec} x}$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a. } D_{\theta}(y) &= \frac{(1 + \tan \theta) D_{\theta}(1 - \tan \theta) - (1 - \tan \theta) D_{\theta}(1 + \tan \theta)}{(1 + \tan \theta)^2} \\ &= \frac{(1 + \tan \theta)(-\sec^2 \theta) - (1 - \tan \theta)(\sec^2 \theta)}{(1 + \tan \theta)^2} = -\frac{2 \sec^2 \theta}{(1 + \tan \theta)^2} \end{aligned}$$

b. Método 1.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\operatorname{cosec} x) D_x(1 - \cot x) - (1 - \cot x) D_x(\operatorname{cosec} x)}{\operatorname{cosec}^2 x} \\ &= \frac{(\operatorname{cosec} x)(0 - (-\operatorname{cosec}^2 x)) - (1 - \cot x)(-\operatorname{cosec} x \cot x)}{\operatorname{cosec}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{cosec}^3 x + \operatorname{cosec} x \cot x - \operatorname{cosec} x \cot^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec}^2 x + \cot x - \cot^2 x)}{\operatorname{cosec}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{cosec}^2 x + \cot x - \cot^2 x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1 + \cot^2 x + \cot x - \cot^2 x}{\operatorname{cosec} x} \\ &= \frac{1 + \cot x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1 + \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\frac{1}{\sin x}} = \sin x + \cos x \end{aligned}$$

Método 2

$$y = \frac{1 - \cot x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1 - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\sin x - \cos x}{\frac{1}{\sin x}} = \sin x - \cos x$$

Luego,

$$y' = D_x(\sin x - \cos x) = D_x(\sin x) - D_x(\cos x) = \cos x + \sin x$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 3.3

En los problemas del 1 al 9 hallar la derivada de la función dada.

1.  $f(x) = 5\sec x + 2\cos x$  / 2.  $g(\theta) = \theta \cot \theta$  / 3.  $y = \tan \theta \sec \theta$

4.  $y = \tan x - \cot x$  /

5.  $h(t) = \frac{\sec t}{1 + \cos t}$  /

6.  $f(x) = \frac{\tan x}{x}$

7.  $g(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$  /

8.  $y = \frac{\sec t + \cos t}{\sec t - \cos t}$  /

9.  $y = \frac{\tan x + 1}{\sec x}$

10. Si  $f(x) = \sec x - 2\cos x$ , hallar:

a. La recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(\pi/3, 1)$

b. La recta normal al gráfico de  $f$  en el punto  $(\pi/3, 1)$ .

11. Si la recta tangente al gráfico de función  $f(x) = \sec x$  en el punto  $(a, \sec a)$  por el origen, probar que se cumple que  $\tan a = a$ .

12. Probar que  $D_x \cos x = -\sin x$

13. Probar que  $D_x \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$

14. Probar que  $D_x \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$

## SECCION 3.4

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES  
EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

**TEOREMA 3.8** Derivada de las funciones exponenciales y logarítmicas

1.  $D_x(a^x) = a^x \ln a$

2.  $D_x(\ln x) = \frac{1}{x}$

3.  $D_x(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

**Demostración**

$$\begin{aligned} 1. D_x(a^x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a \quad (\text{Teorema 2.2, parte 4}) \end{aligned}$$

2. Basta probar 3, ya que 2 sigue de 3, tomando  $a = e$ .

3. De acuerdo al teorema 2.22 parte 1, tenemos que  $\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$ .

Además, por el corolario del teorema 1.3, sabemos que  $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$ .

Ahora,

$$\begin{aligned} D_x (\log_a x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left( \frac{x+h}{x} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left( \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \right) = \log_a \left( \lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \right) \\ &= \log_a (e^{1/x}) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 1.** Hallar la derivada de  $y = x^2 e^x + x 5^x$

**Solución**

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x (x^2 e^x + x 5^x) = D_x (x^2 e^x) + D_x (x 5^x) \\ &= x^2 D_x (e^x) + e^x D_x (x^2) + x D_x (5^x) \\ &= x^2 e^x + e^x (2x) + x (5^x \ln 5) = x^2 e^x + 2x^2 e^x + x \ln 5 5^x \end{aligned}$$

**EJEMPLO 2.** Hallar la derivada de

$$1. y = \frac{\ln x}{x} \qquad 2. y = \log_2 (x^3)$$

**Solución**

$$1. D_x y = \frac{x D_x (\ln x) - \ln x D_x (x)}{x^2} = \frac{x \frac{1}{x} - (\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$2. D_x y = D_x (\log_2 (x^3)) = D_x (3 \log_2 x) = 3 \frac{1}{x \ln 2} = \frac{3}{x \ln 2}$$

**PROBLEMA 3.** Hallar la recta normal al gráfico de

$$f(x) = x \ln x,$$

en el punto donde  $x = e$



**Solución**

Tenemos que:  $f(e) = e \ln e = e(1) = e$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f'(x) &= x (\ln x)' + (\ln x)(x)' \\ &= x \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x \Rightarrow \end{aligned}$$

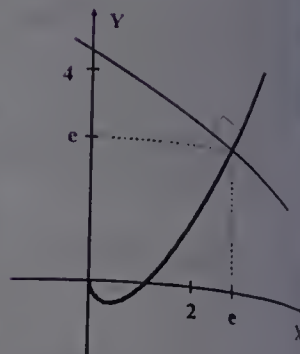
$$f'(e) = 1 + \ln e = 1 + 1 = 2$$

La pendiente de la recta normal en el punto  $(e, e)$  es:

$$m = -\frac{1}{f'(e)} = -\frac{1}{2}$$

Luego, la recta normal en el punto  $(e, e)$  es:

$$y - e = -\frac{1}{2}(x - e) \Rightarrow 2y + x - 3e = 0$$

**PROBLEMAS PROPUESTOS 3.4**

En los problemas del 1 al 9, hallar la derivada de la función dada.

1.  $y = \sqrt{x} e^x$

2.  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3.  $y = x^2 2^x$

4.  $y = x^2 e^{-x}$

5.  $y = e^x \ln x$

6.  $y = 2^x \log_2 x$

7.  $y = \frac{\ln x}{e^x}$

8.  $y = \frac{\log_2 x}{2^x}$

9.  $y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$

10. Hallar la recta tangente horizontal a la curva  $y = \frac{e^x}{1+x^2}$

11. Hallar la recta tangente al gráfico de  $f(x) = x e^{-x}$  en el punto donde  $x = -1$

12. Hallar la recta tangente al gráfico de  $g(x) = \frac{4-x}{\ln x}$  en el punto donde  $x = 4$ .

## SECCION 3.5 LA REGLA DE LA CADENA

Esta sección la dedicaremos a estudiar la diferenciación de funciones compuestas. El resultado que expresa la derivada de una función compuesta en términos de sus funciones componentes se conoce con el nombre de **regla de la cadena**.

Muchas de las funciones que encontramos con frecuencia se expresan como  $y = f(g(x))$ . A  $f$  la llamaremos función externa y a  $g$ , función interna.

### TEOREMA 3.9 Regla de la cadena.

Si  $y = f(u)$  es diferenciable en  $u$  y  $u = g(x)$  es diferenciable en  $x$ , entonces la función compuesta  $f \circ g$  es diferenciable en  $x$  y se cumple que

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

En palabras, la derivada de una función compuesta es igual al producto de la derivada de la función externa (derivada externa) por la derivada de la función interna (derivada interna).

La regla de la cadena, con las otras notaciones se expresa así:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) g', \quad D_x y = D_u y \text{ y } D_x u \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

### Demostración

Ver el problema resuelto 11.

### EJEMPLO 1. Si $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ , hallar $\frac{dy}{dx}$ .

#### Solución

Si hacemos  $u = x^2 + 3x$ , entonces  $y = \sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{u}$ .

$$\text{Además, } \frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ y } \frac{du}{dx} = 2x + 3.$$

Luego, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} (2x + 3) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}.$$

### EJEMPLO 2. Si $F(x) = \sqrt{g(x)}$ , $g(1) = 9$ y $g'(1) = 18$ , hallar $F'(1)$ .

#### Solución

Sea  $f(u) = \sqrt{u}$ . Se tiene que  $F(x) = \sqrt{g(x)} = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

Aplicando la regla de la cadena:

$$F'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x) \quad (1)$$

Pero,

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ y, por tanto, } f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} g'(x)$$

En particular, para  $x = 1$  tenemos que

$$F'(1) = \frac{1}{2\sqrt{g(1)}} g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{9}} (18) = \frac{1}{2(3)} (18) = 3$$

### TABLA DE DERIVADAS

La regla de la cadena combinada con las derivadas ya encontradas nos da una lista de derivadas más generales. Si  $u = g(x)$  es una función diferenciable de  $x$ , entonces

1.  $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$  ó bien  $\frac{d}{dx}((g(x))^n) = n(g(x))^{n-1} \frac{d}{dx}(g(x))$
2.  $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$
3.  $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}$
4.  $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
5.  $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}$
6.  $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$
7.  $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$
8.  $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
9.  $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$
10.  $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
11.  $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$

La demostración de estas nuevas formulas es inmediata. Como muestra probaremos la primera.

Consideremos la función  $f(u) = u^n$ , cuya derivada es  $\frac{d}{du}(f(u)) = f'(u) = nu^{n-1}$ .

Se tiene:  $(g(x))^n = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ .

Ahora, aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}((g(x))^n) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x) = n(g(x))^{n-1} \frac{d}{dx}(g(x)).$$

### EJEMPLO 3.

Solución  $\frac{dy}{dx} = 3$

### EJEMPLO 4.

Solución

a.  $\frac{d}{dx}(e^{\tan x})$

b.  $\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}})$

### EJEMPLO 5

Solución

a.  $g'(x)$

b.  $D_\alpha u =$

c.  $y' =$

### EJEMPL

Solución

Tenemo

$f'(x)$

$f'(\pi)$

Luego,

$y -$

$-y -$



**EJEMPLO 3.** Hallar la derivada de la función  $y = (x^2 + 5x - 6)^3$ .

**Solución**

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 + 5x - 6)^2 \frac{d}{dx}(x^2 + 5x - 6) = 3(x^2 + 5x - 6)^2(2x + 5).$$

**EJEMPLO 4.** Hallar la derivada de:

a.  $y = e^{\tan x}$

b.  $y = e^{\sqrt{x}}$

**Solución**

a.  $\frac{d}{dx}(e^{\tan x}) = e^{\tan x} \frac{d}{dx}(\tan x) = e^{\tan x} (\sec^2 x) = \sec^2 x e^{\tan x}$

b.  $\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}}) = e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

**EJEMPLO 5.** Hallar la derivada de  
a.  $g(x) = \cos(x^2 + 1)$   
b.  $u = \sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha$   
c.  $y = \cot(\sin 3x)$

**Solución**

a.  $g'(x) = -\sin(x^2 + 1) D_X(x^2 + 1) = -2x \sin(x^2 + 1)$

b.  $D_\alpha u = 2(\sec \alpha) D_\alpha(\sec \alpha) + 2(\operatorname{cosec} \alpha) D_\alpha(\operatorname{cosec} \alpha)$   
 $= 2(\sec \alpha)(\sec \alpha \tan \alpha) + 2(\operatorname{cosec} \alpha)(-\operatorname{cosec} \alpha \cot \alpha)$   
 $= 2\sec^2 \alpha \tan \alpha - 2\operatorname{cosec}^2 \alpha \cot \alpha.$

c.  $y' = -\operatorname{cosec}^2(\sin 3x) D_X(\sin 3x) = (-\operatorname{cosec}^2(\sin 3x))(\cos 3x)(3)$   
 $= -3\cos 3x \operatorname{cosec}^2(\sin 3x).$

**EJEMPLO 6.** Hallar la recta tangente al gráfico de  $f(x) = \tan(x/2)$  en el punto donde  $x = \pi/2$ .

**Solución**

Tenemos que  $f(\pi/2) = \tan(\pi/4) = 1$ . Por otro lado,

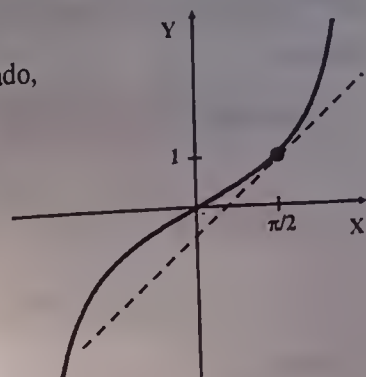
$$f'(x) = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) D_X\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$f'(\pi/2) = \frac{1}{2} \sec^2(\pi/4) = \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 = 1.$$

Luego, la ecuación de la recta tangente es

$$y - f(\pi/2) = f'(\pi/2)(x - \pi/2) \Rightarrow$$

$$y - 1 = 1(x - \pi/2) \Rightarrow y - x + \pi/2 - 1 = 0.$$



**EJEMPLO 7.** Hallar la derivada de  $y = 5^{3x^2-1}$

**Solución**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( 5^{3x^2-1} \right) = \left( 5^{3x^2-1} \ln 5 \right) \frac{d}{dx} (3x^2 - 1) = \left( 5^{3x^2-1} \ln 5 \right) (6x) \\ &= 6 (\ln 5) x 5^{3x^2-1}\end{aligned}$$

**EJEMPLO 8.** a. Hallar la derivada de  $f(x) = e \ln \ln x + 4$

b. Hallar la recta tangente y la recta normal al gráfico de la función dada en el punto donde  $x = e$

**Solución**

a.  $f'(x) = D_x (e \ln \ln x + 4) = e D_x (\ln \ln x)$

$$= e \frac{1}{\ln x} D_x (\ln x) = e \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} = \frac{e}{x \ln x}$$

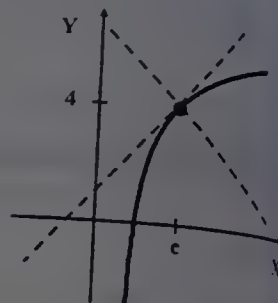
b. Tenemos que:

$$f(e) = e \ln \ln e + 4 = e \ln 1 + 4 = e(0) + 4 = 4 \quad y$$

$$f'(e) = \frac{e}{e \ln e} = \frac{e}{e(1)} = 1. \text{ Luego,}$$

$$\text{Recta tangente: } y - f(e) = f'(e)(x - e) \Rightarrow y - 4 = 1(x - e) \Rightarrow y - x = 4 - e$$

$$\text{Recta normal: } y - f(e) = (-1/f'(e))(x - e) \Rightarrow y - 4 = -1(x - e) \Rightarrow y + x = 4 + e$$



### PROBLEMAS RESUELTOS 3.5

**PROBLEMA 1.** Hallar la derivada de  $y = \sqrt[3]{x^6 - 3x}$ .

**Solución**

Se tiene que:  $y = \sqrt[3]{x^6 - 3x} = (x^6 - 3x)^{1/3}$ . Luego,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (x^6 - 3x)^{1/3} = \frac{1}{3} (x^6 - 3x)^{1/3-1} \frac{d}{dx} (x^6 - 3x) \\ &= \frac{1}{3} (x^6 - 3x)^{-2/3} (6x^5 - 3) = \frac{6x^5 - 3}{3(x^6 - 3x)^{2/3}} = \frac{2x^5 - 1}{(x^6 - 3x)^{2/3}}\end{aligned}$$

**PROBLEMA 2.** Hallar la derivada de la función  $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{x}{(a^2 - x^2)^{1/2}} \right] = \frac{(a^2 - x^2)^{1/2} \frac{d}{dx}(x) - x \frac{d}{dx}(a^2 - x^2)^{1/2}}{\left[ (a^2 - x^2)^{1/2} \right]^2} \\ &= \frac{(a^2 - x^2)^{1/2}(1) - x \left[ \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-1/2} \frac{d}{dx}(a^2 - x^2) \right]}{a^2 - x^2} \\ &= \frac{(a^2 - x^2)^{1/2}(1) - x \left[ \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) \right]}{a^2 - x^2} \\ &= \frac{(a^2 - x^2)^{1/2} + x^2(a^2 - x^2)^{-1/2}}{a^2 - x^2} = \frac{(a^2 - x^2)^{1/2} + \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^{1/2}}}{a^2 - x^2} \\ &= \frac{(a^2 - x^2) + x^2}{(a^2 - x^2)^{1/2}(a^2 - x^2)} = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

**PROBLEMA 3.** Derivar la función  $u = \sqrt{t + \sqrt{t+1}}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sqrt{t + \sqrt{t+1}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{t + \sqrt{t+1}}} \frac{d}{dt}(t + \sqrt{t+1}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t + \sqrt{t+1}}} \left[ 1 + \frac{d}{dt} \sqrt{t+1} \right] = \frac{1}{2\sqrt{t + \sqrt{t+1}}} \left[ 1 + \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t + \sqrt{t+1}}} + \frac{1}{4\sqrt{t+1}\sqrt{t + \sqrt{t+1}}}. \end{aligned}$$



**PROBLEMA 4.** Hallar la derivada de

a.  $y = \sqrt{1 + 2 \tan x}$

b.  $y = x - \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x$

**Solución**

$$\begin{aligned} \text{a. } y' &= D_x [(1 + 2 \tan x)^{1/2}] = \frac{1}{2} (1 + 2 \tan x)^{1/2-1} D_x (1 + 2 \tan x) \\ &= \frac{1}{2} (1 + 2 \tan x)^{-1/2} (2 \sec^2 x) = \frac{\sec^2 x}{(1 + 2 \tan x)^{1/2}} = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 + 2 \tan x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } y' &= D_x (x) - D_x (\tan x) + D_x \left( \frac{1}{3} \tan^3 x \right) \\ &= 1 - \sec^2 x + 3 \left( \frac{1}{3} \tan^2 x \right) D_x (\tan x) = 1 - \sec^2 x + (\tan^2 x) (\sec^2 x) \\ &= -\tan^2 x + (\tan^2 x) (1 + \tan^2 x) = -\tan^2 x + \tan^2 x + \tan^4 x = \tan^4 x. \end{aligned}$$

**PROBLEMA 5.** Hallar  $\frac{dy}{dx}$  si  $y = \sin^2(\cos 3x)$ .**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= D_x [\sin^2(\cos 3x)] = 2 \sin(\cos 3x) D_x [\sin(\cos 3x)] \\ &= (2 \sin(\cos 3x)) (\cos(\cos 3x)) D_x [\cos 3x] \\ &= (2 \sin(\cos 3x)) (\cos(\cos 3x)) (-\sin 3x) D_x [3x] \\ &= (2 \sin(\cos 3x)) (\cos(\cos 3x)) (-\sin 3x) (3) \\ &= (-3 \sin 3x) [2 \sin(\cos 3x) \cos(\cos 3x)] \\ &= -3 \sin 3x [\sin(2 \cos 3x)] \end{aligned}$$

(Ident. Trig. 27)

**PROBLEMA 6.** Hallar la derivada de  $y = 2^{3^{x^2}}$ **Solución**

$$\begin{aligned} y' &= D_x \left( 2^{3^{x^2}} \right) = 2^{3^{x^2}} (\ln 2) D_x \left( 3^{x^2} \right) = 2^{3^{x^2}} (\ln 2) 3^{x^2} (\ln 3) D_x (x^2) \\ &= 2^{3^{x^2}} (\ln 2) 3^{x^2} (\ln 3) (2x) = 2(\ln 2)(\ln 3)x 3^{x^2} 2^{3^{x^2}} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 7.**

Hallar la derivada de  $y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

**Solución**

Se tiene que:

$$y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \ln(1) - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Luego,

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x \left( -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right) = - \frac{D_x (x + \sqrt{x^2 - 1})}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= - \frac{1 + D_x (\sqrt{x^2 - 1})}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = - \frac{1 + \frac{D_x (x^2)}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = - \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = - \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= - \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{(\sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})} = - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 8.**

a. Si  $G(x) = g(a + bx) + g(a - bx)$  y  $g$  es diferenciable en  $a$ , hallar  $G'(0)$ .

b. Si  $F(x) = f(f(f(x)))$ ,  $f(0) = 0$  y  $f'(0) = -2$ , hallar  $F'(0)$ .

**Solución**

a. Sea  $f(x) = a + bx$  y  $h(x) = a - bx$ . Se tiene que

$$f'(x) = b, \quad h'(x) = -b \quad \text{y} \quad G(x) = g(f(x)) + g(h(x)).$$

Luego, aplicando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} G'(x) &= [g(f(x)) + g(h(x))]' = [g(f(x))]' + [g(h(x))]' \\ &= g'(f(x))f'(x) + g'(h(x))h'(x) \end{aligned}$$

En particular, para  $x = 0$

$$G'(0) = g'(f(0))f'(0) + g'(h(0))h'(0) = g'(a)(b) + g'(a)(-b) = 0$$

b. Sea  $g(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$ . Se tiene que  $F(x) = f(f(f(x))) = f(g(x))$

Aplicando la regla de la cadena a  $g$  y a  $F$

$$g'(x) = f'(f(x)) f'(x) \quad y$$

$$F'(x) = [f(f(f(x)))]' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) g'(x) = f'(f(f(x))) f'(f(x)) f'(x).$$

En particular, para  $x = 0$

$$\begin{aligned} F'(0) &= f'(f(f(0))) f'(f(0)) f'(0) = f'(f(0)) f'(0) f'(0) = f'(0) f'(0) f'(0) \\ &= (-2)(-2)(-2) = -8. \end{aligned}$$

**PROBLEMA 9.**

Hallar la recta tangente al gráfico de la siguiente función en el punto que tiene por abscisa  $x = -3$ .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(4+x)^2}}$$

**Solución**

Tenemos que  $f(-3) = \frac{1}{\sqrt[3]{(4-3)^2}} = 1 \quad y$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\sqrt[3]{(4+x)^2}} \right] = \frac{d}{dx} [(4+x)^{-2/3}] = \frac{-2}{3} (4+x)^{-5/3} \frac{d}{dx} (4+x) \\ &= -\frac{2}{3} (4+x)^{-5/3} (1) = \frac{-2}{3(4+x)^{5/3}} \end{aligned}$$

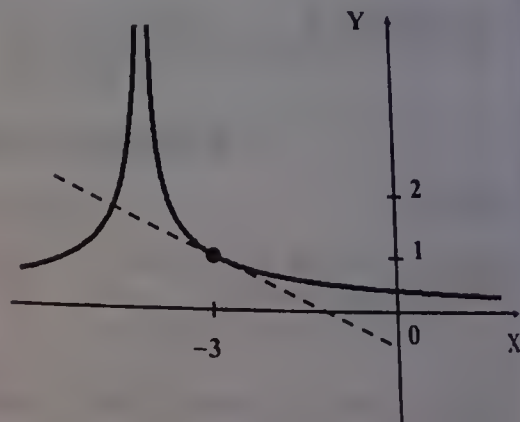
En particular,

$$f'(-3) = \frac{-2}{3(4-3)^{5/3}} = -\frac{2}{3(1)} = -\frac{2}{3}.$$

Luego, la recta tangente buscada es

$$y - f(-3) = f'(-3)(x - (-3)) \Rightarrow$$

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x + 3) \Rightarrow 3y + 2x + 3 = 0.$$

**PROBLEMA 10.**

a. Hallar la derivada de la función  $f(x) = 4x^2 e^{-x^2/4}$

b. Hallar los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal

**Solución**



$$\begin{aligned}
 a. f'(x) &= D_x \left( 4x^2 e^{-x^2/4} \right) = \left( 4x^2 \right) D_x \left( e^{-x^2/4} \right) + \left( e^{-x^2/4} \right) D_x \left( 4x^2 \right) \\
 &= \left( 4x^2 \right) \left( e^{-x^2/4} \right) D_x \left( -\frac{x^2}{4} \right) + \left( e^{-x^2/4} \right) (8x) \\
 &= \left( 4x^2 \right) \left( e^{-x^2/4} \right) \left( -\frac{2x}{4} \right) + \left( e^{-x^2/4} \right) (8x) = -2x^3 e^{-x^2/4} + 8x e^{-x^2/4} \\
 &= 2x e^{-x^2/4} (x^2 - 4)
 \end{aligned}$$

b. La recta tangente es horizontal si su pendiente es 0. Luego,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x e^{-x^2/4} (x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x^2 - 4 = 0$$

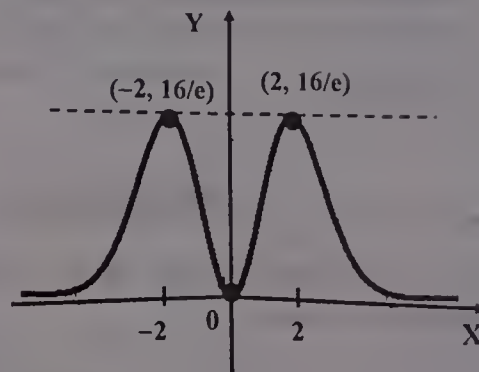
$$\Leftrightarrow x = 0, x = -2 \text{ ó } x = 2$$

Pero,

$$f(0) = 4(0^2) e^{-0^2/4} = 0,$$

$$f(-2) = 4(-2)^2 e^{-(-2)^2/4} = \frac{16}{e} \text{ y}$$

$$f(2) = 4(2)^2 e^{-(2)^2/4} = \frac{16}{e}$$



Luego, los puntos buscados son:  $(0, 0)$ ,  $(-2, 16/e)$  y  $(2, 16/e)$

### PROBLEMA 11. Regla de la cadena.

Si  $f$  es diferenciable en  $u$  y  $u = g(x)$  es diferenciable en  $x$ , probar que  $f \circ g$  es diferenciable en  $x$  y se cumple que

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x).$$

Solución

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

Multiplicando el numerador y denominador por  $\Delta g = g(x+h) - g(x)$

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h[g(x+h) - g(x)]} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + \Delta g) - f(g(x))}{\Delta g} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}
 \end{aligned}$$

El segundo límite de la expresión anterior es  $g'(x)$ . En el primer límite: Cuando  $h$  tiende a 0, por ser  $g$  continua (teorema 3.1), la expresión  $\Delta g = g(x+h) - g(x)$  también tiende a 0 y, por lo tanto, este primer límite es  $f'(g(x))$ . En consecuencia,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x).$$

En la demostración anterior, al dividir entre  $\Delta g = g(x+h) - g(x)$ , hemos supuesto implícitamente que  $\Delta g \neq 0$ . Para el caso en el que  $\Delta g = 0$  se debe dar una demostración aparte, que nosotros no haremos.

### PROBLEMAS PROPUESTOS 3.5

En los problemas del 1 al 61 derivar la función indicada. Las letras  $a$ ,  $b$  y  $c$  denotan constantes.

1.  $y = (x^2 - 3x + 5)^3$

2.  $f(x) = (15 - 8x)^4$

3.  $g(t) = (2t^3 - 1)^{-3}$

4.  $z = \frac{1}{(5x^5 - x^4)^8}$

5.  $y = (3x^2 - 8)^3(-4x^2 + 1)^4$

6.  $f(u) = \frac{2u^3 + 1}{u^2 - 1}$

7.  $y = \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2$

8.  $g(t) = \left(\frac{3t^2 + 2}{2t^3 - 1}\right)^2$

9.  $y = \sqrt{1 - 2x}$

10.  $u = \sqrt{1 + t - 2t^2 - 8t^3}$

11.  $h(x) = x^2 \sqrt{x^4 - 1}$

12.  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

13.  $y = \sqrt{3x^2 - 1} \sqrt[3]{2x + 1}$

14.  $z = (1 - 3x^2)^2 (\sqrt{x} + 1)^{-2}$

15.  $h(t) = \frac{1+t}{\sqrt{1-t}}$

16.  $z = 3\sqrt{\frac{1}{1+t^2}}$

17.  $z = \sqrt[3]{b + ax^3}$

18.  $f(x) = \frac{x}{b^2 \sqrt{b^2 + x^2}}$

19.  $y = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{1 + \sqrt{1+x}}$

$$20. f(x) = \sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$22. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$25. u = \cos(x^3)$$

$$27. y = \tan(x^4) + \tan^4 x$$

$$30. y = \sqrt{\cos \sqrt{x}}$$

$$33. y = \frac{4}{\sqrt{\sec x}}$$

$$36. y = \frac{\tan x}{\sqrt{\sec^2 x + 1}}$$

$$39. y = \frac{\cot(x/2)}{\sqrt{1 - \cot^2(x/2)}}$$

$$42. y = \sin(\cos x^2)$$

$$45. y = \cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x)$$

$$47. y = \tan(\sin^2 x)$$

$$50. y = x^n a^{-x^2}$$

$$53. y = \sqrt{\log_5 x}$$

$$56. y = \ln \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}$$

$$59. y = \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{3/5}$$

$$62. \text{ Si } G(x) = (g(x))^{2/3}, g(2) = 125 \text{ y } g'(2) = 150, \text{ hallar } G'((2)).$$

$$63. \text{ Si } F(t) = [f(\sin t)]^2, f(0) = -3 \text{ y } f'(0) = 5, \text{ hallar } F'(0).$$

$$64. \text{ Dadas } f(u) = \frac{1}{4}u^3 - 3u + 5 \text{ y } g(x) = \frac{x-1}{x+1}, \text{ hallar la derivada de } f \circ g \text{ de}$$

dos maneras:

a. Encontrando  $(f \circ g)(x)$  y derivando este resultado.

b. Aplicando la regla de la cadena.

En los ejercicios del 65 al 69, hallar  $h'(x)$  si  $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ .

$$65. f(u) = u^3 - 2u^2 - 5, g(x) = 2x - 1$$

$$66. f(v) = \sqrt{v}, g(x) = 2x^3 - 4$$

$$23. y = \tan 4x$$

$$26. v = \cos^3 x$$

$$28. z = \cos \sqrt{x}$$

$$31. y = \sqrt[3]{\tan 3x}$$

$$34. y = \operatorname{cosec} \frac{1}{x^2}$$

$$37. y = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$$

$$40. y = \sqrt{a \sin^2 x + b \cos^2 x}$$

$$43. y = \sin^2(\cos 4x)$$

$$48. y = e^{-3x^2 + 1}$$

$$51. y = 3^{\cot(1/t)}$$

$$54. y = \ln \left( \frac{x}{e^x} \right)$$

$$57. y = e^{x \ln x}$$

$$60. y = \ln(x^3 \sin x) \quad (61.) y = \ln \cos \frac{x-1}{x}$$

$$21. y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$$

$$24. y = 2 \cot \frac{x}{2}$$

$$27. y = \tan(x^4) + \tan^4 x$$

$$29. u = \sqrt{\cos x}$$

$$32. y = \cot \sqrt[3]{1+x^2}$$

$$35. y = \sin^3 \left[ \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right]$$

$$38. y = \sqrt{1 + \cot(x + 1/x)}$$

$$41. y = \cos(\cos x)$$

$$44. y = \sin(\sin(\sin x))$$

$$46. y = \sin(\tan \sqrt{\sin x})$$

$$49. y = 2^{\sqrt{x}}$$

$$52. y = 2^{3^{\sin^2 x}}$$

$$55. y = \frac{\ln t}{e^{2t}}$$

$$58. y = \ln \left( \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \right)$$



204

67.  $f(t) = t^5$ ,  $g(x) = 1 - 2\sqrt{x}$

69.  $f(v) = \frac{1}{v}$ ,  $g(x) = a\sqrt{a^2 - x^2}$

En los ejercicios del 70 al 73 hallar  $\frac{dy}{dx}$ .

70.  $y = 3u^3 - 4u^4 - 1$ ,  $u = x^2 - 1$

72.  $y = t^4$ ,  $t = \frac{ax+b}{c}$

En los ejercicios del 74 al 81, hallar la recta tangente y la recta normal al gráfico de la función dada en el punto  $(a, f(a))$ , para el valor especificado de  $a$ .

74.  $f(x) = (2x^2 - 1)^3$ ,  $a = -1$

76.  $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{3x+6}}$ ,  $a = 1$

78.  $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(3x-2)^2}$ ,  $a = \frac{1}{2}$

80.  $f(x) = |1 - x^3|$ ,  $a = 2$

82. Hallar las rectas tangentes al gráfico de  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$  en los puntos donde el gráfico corta al eje X.

83. Hallar los puntos en la gráfica de  $g(x) = x^2(x-4)^2$  en los cuales la recta tangente es paralela al eje X.

84. Hallar las rectas tangentes al gráfico de  $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$  en los puntos donde este gráfico corta a los ejes. ¿Qué particularidad tienen estas rectas?

85. Hallar las rectas tangentes al gráfico de  $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$  que pasan por el origen.

86. Hallar las rectas tangentes al gráfico de  $f(x) = 3x^2 - \ln x$  en el punto  $(1, 3)$ .

87. Hallar las rectas tangentes al gráfico de  $y = \ln(1 + e^x)$  en el punto  $(0, \ln 2)$ .

88. Sean  $f$  y  $g$  dos funciones diferenciables tales que  $f'(u) = \frac{1}{u}$  y  $f(g(x)) = x$ . Probar que  $g'(x) = g(x)$ .

68.  $f(u) = \frac{b-u}{b+u}$ ,  $g(x) = \dots$

71.  $y = v^5$ ,  $v = 3a + 2bx$

73.  $y = \frac{1}{\sqrt{v}}$ ,  $v = 3x^2 - 1$

75.  $f(x) = \frac{3}{(2-x^2)^2}$ ,  $a = \dots$

77.  $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ,  $a = -1$

79.  $f(x) = \cot^2 x$ ,  $a = \frac{\pi}{4}$

81.  $f(x) = \sin 5x$ ,  $a = \frac{\pi}{3}$

# 4

---

## OTRAS TECNICAS DE DERIVACION

---

*GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ*  
(1.646 – 1.716)

**4.1 DERIVACION IMPLICITA Y TEOREMA  
DE LA FUNCION INVERSA**

**4.2 DERIVACION LOGARITMICA**

**4.3 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES  
TRIGONOMETRICAS INVERSAS**

**4.4 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR, VELOCIDAD Y  
ACELERACION**

**4.5 FUNCIONES HIPERBOLICAS Y SUS INVERSAS**

**4.6 RAZON DE CAMBIO**

**4.7 DIFERENCIALES**

*BREVE HISTORIA DE LA FAMILIA BERNOULLI*

## Gottfried Wilhelm Leibniz (1.646 a 1.716)



Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig, Alemania. Se graduó y fue profesor en la universidad de Altdorf. Fue un genio polifacético. Se desenvolvió con excelencia en varios campos: Matemáticas, Filosofía, Lógica, Mecánica, Geología, Jurisprudencia, Diplomacia, etc.

En 1684 se publicaron sus investigaciones sobre lo que sería el Cálculo Diferencial e Integral. El, junto con Newton, son considerados como creadores del Cálculo. Sus ideas sobre este tema fueron más claras que las de Newton. La notación que usó para designar la derivada todavía se usa hasta ahora (notación de Leibniz).

Inventó una máquina de multiplicar. A temprana edad se graduó con la tesis De Arte Combinatoria, que trata sobre un método de razonamiento. En este trabajo están, en germen, las ideas iniciales de la Lógica Simbólica.

Durante algún tiempo del reinado de Luis XIV fue embajador de su patria en París. Allí conoció a científicos, como Huygens, quienes reforzaron su interés por la matemática.

En 1712 surgió una larga e infortunada querrela entre Newton y sus seguidores, por un lado, y Leibniz y sus seguidores, en otro lado, sobre quien de los dos matemáticos realmente inventó el Cálculo. Se lanzaron acusaciones mutuas de plagio y falsificación. Los historiadores zanjaron la disputa dando mérito a cada uno. Dicho sea de paso, Newton y Leibniz, lograron sus resultados independientemente.

### ACONTECIMIENTOS IMPORTANTES

Durante la vida de Leibniz, en América y en el mundo hispano sucedieron algunas hechos notables. La poetisa mejicana Sor Inés de la Cruz (1.651-1.690) publica sus obras poéticas, obras que fueron fuertemente influenciadas por Gongorismo. En 1664, los ingleses, bajo el mando del duque de York, toman Nueva Amsterdam y le cambian el nombre a Nueva York. En 1.671 el pirata inglés Henry Morgan saquea e incendia la ciudad de Panamá. En 1.682 el cuáquero William Penn funda Pensilvania. Ese mismo año, el francés Robert Cavalier de la Salle llega al desembocadura del río Misisipi, toma posesión de la región y la nombra, en honor a

DERI

Considera

despejar la

Casos como

forma  $g(x)$ ,

diremos que

En cambio,

y como fun

No toda

variable re

reales. Pu

función. A

Suced

despejar l

técnica

implícita

Esta técn

Para  
conside  
Luego,

EJEM

Solució

Der

$$\frac{d}{dx}(x)$$

⇒



## SECCION 4.1

### DERIVACION IMPLICITA Y TEOREMA DE LA FUNCION INVERSA

Consideremos la ecuación  $xy - 1 = 0$ . En esta ecuación, fácilmente podemos despejar la variable  $y$ :  $y = \frac{1}{x}$ . Esta nueva ecuación define a  $y$  como función de  $x$ .

Casos como el ejemplo anterior suceden con frecuencia. Es decir, una ecuación de la forma  $g(x, y) = 0$  puede dar lugar a una función  $y = f(x)$ . Si esta situación ocurre diremos que la ecuación  $g(x, y) = 0$  define **implícitamente** a  $y$  como función de  $x$ . En cambio, diremos que una ecuación de la forma  $y = f(x)$  define **explícitamente** a  $y$  como función de  $x$ .

No toda ecuación  $g(x, y) = 0$  determina implícitamente una función (real de variable real). Tal es el caso de la ecuación  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ , que no tiene soluciones reales. Puede suceder también que una misma ecuación dé lugar a más de una función. Así, la circunferencia  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  determina dos funciones

$$1. f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \quad 2. f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

Sucede con frecuencia que en funciones definidas implícitamente es difícil despejar la variable dependiente. Por este motivo, sería conveniente contar con una técnica que nos permita encontrar la derivada de una función definida implícitamente, sin la necesidad de contar con la expresión explícita de la función. Esta técnica se llama **diferenciación implícita** y se resume en la siguiente regla.

Para derivar implícitamente, derivar la ecuación término a término, considerando a la variable dependiente como función de la independiente. Luego, despejar la derivada.

**EJEMPLO 1.** Hallar  $\frac{dy}{dx}$  si  $x^3y - y^7x = 5$ .

**Solución**

Derivamos término a término.

$$\frac{d}{dx}(x^3y) - \frac{d}{dx}(y^7x) = \frac{d}{dx}(5) \Rightarrow \left[ x^3 \frac{dy}{dx} + y \frac{d}{dx}(x^3) \right] - \left[ y^7 \frac{dx}{dx} + x \frac{d}{dx}(y^7) \right] = 0$$

$$\Rightarrow x^3 \frac{dy}{dx} + 3yx^2 - y^7 - 7xy^6 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x^3 \frac{dy}{dx} - 7xy^6 \frac{dy}{dx} = y^7 - 3yx^2$$

$$\Rightarrow (x^3 - 7xy^6) \frac{dy}{dx} = y^7 - 3yx^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 3yx^2}{x^3 - 7xy^6}$$

**EJEMPLO 2.** Si  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ , hallar  $D_x y$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} D_x \left( \sqrt[3]{x^2} \right) + D_x \left( \sqrt[3]{y^2} \right) &= D_x \left( \sqrt[3]{a^2} \right) \Rightarrow D_x x^{2/3} + D_x y^{2/3} = 0 \Rightarrow \\ \frac{2}{3} x^{-1/3} + \frac{2}{3} y^{-1/3} D_x y &= 0 \Rightarrow x^{-1/3} + y^{-1/3} D_x y = 0 \Rightarrow \\ D_x y &= \frac{-x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 3.** Si  $\tan xy = \frac{x}{y}$ , hallar  $D_x y$

**Solución**

$$\begin{aligned} D_x (\tan xy) &= D_x \left( \frac{x}{y} \right) \Rightarrow \sec^2 xy D_x(xy) = \frac{y D_x x - x D_x y}{y^2} \Rightarrow \\ \sec^2 xy (x D_x y + y) &= \frac{y - x D_x y}{y^2} \Rightarrow x \sec^2 xy D_x y + y \sec^2 xy = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} D_x y \\ \Rightarrow \left( \frac{x}{y^2} + x \sec^2 xy \right) D_x y &= \frac{1}{y} - y \sec^2 xy \\ \Rightarrow \frac{x}{y^2} (1 + y^2 \sec^2 xy) D_x y &= \frac{1}{y} (1 - y^2 \sec^2 xy) \\ \Rightarrow x(1 + y^2 \sec^2 xy) D_x y &= y(1 - y^2 \sec^2 xy) \\ \Rightarrow D_x y &= \frac{y(1 - y^2 \sec^2 xy)}{x(1 + y^2 \sec^2 xy)} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 4.** Si  $\ln y + \frac{x}{y} = c$ , hallar  $D_x y$

**Solución**

$$\begin{aligned} D_x \left( \ln y + \frac{x}{y} \right) &= D_x (c) \Rightarrow D_x (\ln y) + D_x \left( \frac{x}{y} \right) = 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{y} D_x y + \frac{y D_x(x) - x D_x y}{y^2} &= 0 \Rightarrow \frac{1}{y} D_x y + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} D_x y = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) D_x y = -\frac{1}{y} \Rightarrow \left(\frac{y-x}{y^2}\right) D_x y = -\frac{1}{y} \Rightarrow D_x y = -\frac{1}{y} \frac{y^2}{y-x} = \frac{y}{x-y}$$

**EJEMPLO 5.** Hallar las rectas tangentes a la siguiente circunferencia en los puntos que tienen abscisa  $x=4$ .

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$$

**Solución**

Hallemos los puntos en la curva que tienen abscisa  $x=4$ . Para esto, sustituimos el valor  $x=4$  en la ecuación de la curva.

$$(4-1)^2 + (y+1)^2 = 25 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 16 \Leftrightarrow y=3 \text{ ó } y=-5.$$

Hay dos puntos en la curva con abscisa  $x=4$ :  $P_1=(4,3)$  y  $P_2=(4,-5)$ .

Hallemos la derivada  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\frac{d}{dx}(x-1)^2 + \frac{d}{dx}(y+1)^2 = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\Rightarrow 2(x-1) + 2(y+1) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{y+1}$$

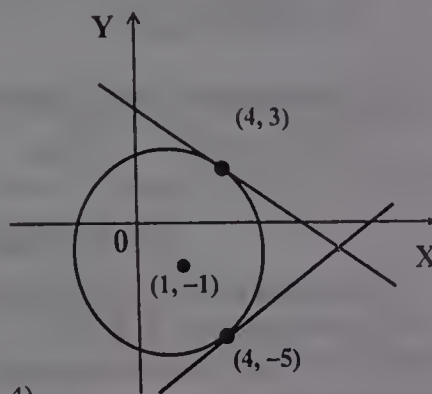
Si  $m_1$  es la pendiente de  $L_1$ , la recta tangente en el punto  $P_1=(4,3)$ , entonces

$$m_1 = -\frac{4-1}{3+1} = -\frac{3}{4} \text{ y } L_1: y-3 = -\frac{3}{4}(x-4)$$

$$\Rightarrow L_1: 3x + 4y - 24 = 0$$

Si  $m_2$  es la pendiente de  $L_2$ , la recta tangente en el punto  $P_2=(4,-5)$ , entonces

$$m_2 = -\frac{4-1}{-5+1} = \frac{3}{4} \text{ y } L_2: y+5 = \frac{3}{4}(x-4) \Rightarrow L_2: 3x - 4y - 32 = 0.$$



**EJEMPLO 6.** Hallar la recta tangente a la siguiente curva

$$ye^{xy} = 2 + x^2$$

en el punto donde  $x=0$ .

**Solución**

Hallamos la derivada  $y'$

Derivando ambos miembros de la ecuación se tiene que:



$$\begin{aligned}
 (ye^{xy})' &= (2+x^2)' \Rightarrow y'e^{xy} + y(e^{xy})' = 2x \Rightarrow \\
 y'e^{xy} + y(e^{xy}(y + xy')) &= 2x \Rightarrow y'e^{xy} + y^2e^{xy} + xyy'e^{xy} = 2x \\
 \Rightarrow y'(e^{xy} + xye^{xy}) &= 2x - y^2e^{xy} \Rightarrow y' = \frac{2x - y^2e^{xy}}{e^{xy}(1+xy)}
 \end{aligned}$$

Hallamos la recta tangente:

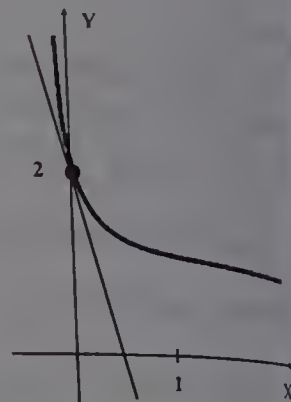
Reemplazando  $x = 0$  en la ecuación de la curva

$$ye^{(0)y} = 2 + 0^2 \Rightarrow y = 2$$

Luego, el punto de tangencia es  $(0, 2)$ .

La pendiente  $m$  de la tangente en  $(0, 2)$  es la derivada  $y'$  en  $(0, 2)$ . Esto es,

$$m = \frac{2(0) - 2^2e^{(0)2}}{e^{(0)2}(1+0(2))} = \frac{-4}{1} = -4$$



En consecuencia, la recta tangente a la curva en el punto donde  $x = 0$  es:

$$y - 2 = -4(x - 0), \text{ ó bien, } y + 4x = 2$$

### TEOREMA DE LA FUNCION INVERSA

En esta parte trataremos rápidamente las condiciones que garantizan la existencia y la diferenciabilidad de la función inversa. La demostración que presentamos es parcial. El lector interesado puede hallar la prueba total en el problema resuelto 7.

#### TEOREMA 4.1 Teorema de la función Inversa.

Si  $f$  es diferenciable en un intervalo abierto  $I$  en el cual  $f'$  es continua y no se anula, entonces

- $f$ , en todo  $I$ , tiene inversa  $f^{-1}$ .
- $f^{-1}$  es diferenciable y para cada  $x$  en  $f(I)$ , se cumple que:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Este teorema, con la notación de Leibniz, nos dice que:

$$\frac{dx}{dy} = 1 / \frac{dy}{dx} \text{ ó bien, } \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dy} = 1$$

Demostración

La demostración que aquí presentamos presupone que la inversa  $f^{-1}$  es diferenciable. Derivando implícitamente, deducimos la fórmula enunciada.

Bien, por definición de función inversa tenemos

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

Derivando la segunda igualdad respecto a  $x$  se obtiene

$$f'(y)y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{f'(y)} \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

**EJEMPLO 7.**

Sea la función  $f(x) = x^3 + 3x - 2$

a. Probar que  $f$  tiene inversa en todo su dominio que es  $\mathbb{R}$ .

b. Hallar  $(f^{-1})'(2)$

c. Hallar la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(1, 2)$

d. Hallar la recta tangente al gráfico de  $f^{-1}$  en el punto  $(2, 1)$

**Solución**

a. Tenemos que  $f'(x) = 3x^2 + 3$  y  $f'(x) \neq 0$ , para todo  $x$  en  $\mathbb{R}$ . Luego  $f$  tiene inversa en todo  $\mathbb{R}$ .

b. Se tiene que:  $f'(1) = 3(1)^2 + 3(1) = 6$ . Además,

$$f(1) = (1)^3 + 3(1) - 2 = 2 \text{ y, por lo tanto, } (f^{-1})(2) = 1$$

Luego,

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

$$c. y - 2 = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 6(x - 1) \Rightarrow y = 6x - 4$$

$$d. y - 1 = (f^{-1})'(2)(x - 2) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{6}(x - 2) \Rightarrow 6y - x = 4$$

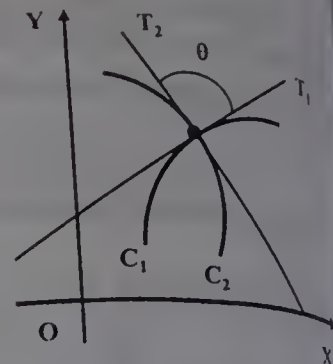
**ÁNGULO ENTRE CURVAS**

Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos curvas que se intersectan en un punto  $P$  y sean  $T_1$  y  $T_2$  las rectas tangentes a estas curvas en el punto  $P$ . Llamaremos ángulos entre  $C_1$  y  $C_2$  a los ángulos suplementarios que forman  $T_1$  y  $T_2$ . Si  $m_1$  y  $m_2$  son las pendientes de  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente, entonces, de acuerdo a nuestro apéndice de Trigonometría, uno de estos dos ángulos es el ángulo  $\theta$  que cumple:

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Si  $\tan \theta \geq 0$ , el ángulo es agudo; en cambio, si  $\tan \theta < 0$ , el ángulo es obtuso.

Se dice que dos curvas se cortan ortogonalmente si las rectas tangentes en el punto de intersección son perpendiculares. O sea, si las curvas se cortan formando un ángulo recto.



**EJEMPLO 8.**

Hallar los ángulos que forman las siguientes circunferencias en el punto de intersección.

$$C_1: x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0, \quad C_2: x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$$

**Solución**

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las circunferencias hallamos que ellas se intersectan en los puntos  $A = (1, 2)$  y  $B = (3, -2)$

a. En  $A = (1, 2)$

Hallamos la derivada  $y'$  para ambas ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$2x + 2yy' + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y+1}$$

En  $A = (1, 2)$ ,

$$y' = -\frac{x}{y+1} = -\frac{1}{2+1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{3}$$

Por otro lado,

$$x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2x + 2yy' - 4 = 0 \Rightarrow y' = \frac{2-x}{y}$$

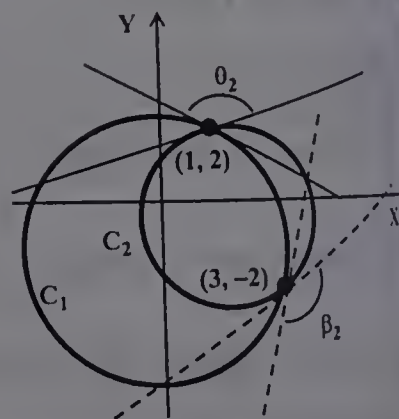
En  $A = (1, 2)$ ,

$$y' = \frac{2-x}{y} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

Ahora, si  $\theta_1$  es uno de los ángulos en  $A = (1, 2)$ , entonces

$$\tan \theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{1/2 - (-1/3)}{1 + (-1/3)(1/2)} = 1$$

Luego, el ángulo agudo es  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$  y el obtuso,  $\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$



B. En  $B = (3, -2)$   
 $y' =$

Ahora  
 $\tan$

Lue

**EJEMP**

**Solució**

Tene

$xy =$

Por

$y^2 =$

Si  
intres  
famil  
famil  
punto

r

Lue

**P**

Sc



En  $B = (3, -2)$

$$y' = -\frac{x}{y+1} = -\frac{3}{-2+1} = 3 \Rightarrow m_1 = 3, \quad y' = \frac{2-3}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

Además si  $\beta_1$  es uno de los ángulos en  $B = (3, -2)$ , entonces

$$\tan \beta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{1/2 - 3}{1 + (3)(1/2)} = 1$$

Luego, el ángulo agudo es  $\beta_1 = \frac{\pi}{4}$  y el obtuso,  $\beta_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

**EJEMPLO 9.**  Probar que cada miembro de la familia (hipérbolas)

$$xy = k, \quad k \neq 0$$

corta ortogonalmente a cada miembro de la familia (hipérbolas).

$$y^2 - x^2 = c, \quad c \neq 0$$

**Solución**

Tenemos que:

$$xy = k \Rightarrow xy' + y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}$$

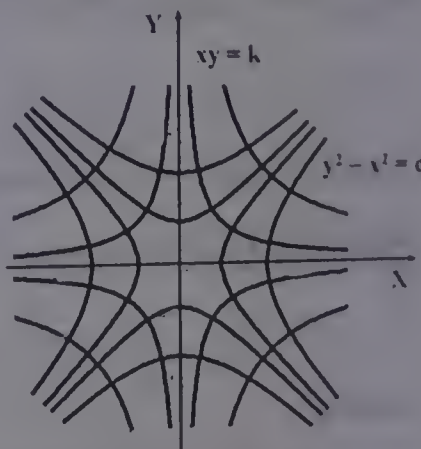
Por otro lado,

$$y^2 - x^2 = c \Rightarrow 2yy' - 2x = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$$

Si  $P = (x, y)$  es un punto donde se intersecta un miembro de la primera familia con un miembro de la segunda familia, entonces las pendientes en ese punto son:

$$m_1 = -\frac{y}{x} \quad y \quad m_2 = \frac{x}{y} \Rightarrow m_1 m_2 = \left(-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}\right) = -1$$

Luego, las curvas se cortan ortogonalmente.



## PROBLEMAS RESUELTOS 4.1

**PROBLEMA 1.** Hallar la recta tangente en el punto  $(3a^2, 3a^2)$  a la hoja de

Descartes

$$x^2 + y^2 = 3axy$$

**Solución**

Hallemos  $\frac{dy}{dx}$  derivando implícitamente:

$$x^3 + y^3 = 3axy \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 3ay + 3ax \frac{dy}{dx}$$

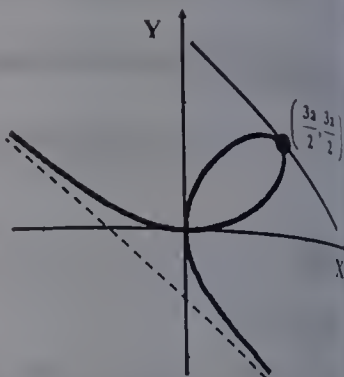
$$\Rightarrow 3(y^2 - ax) \frac{dy}{dx} = 3(ay - x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

Ahora, la pendiente en el punto  $(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2})$  es:

$$m = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} = \frac{a\left(\frac{3a}{2}\right) - \left(\frac{3a}{2}\right)^2}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - a\left(\frac{3a}{2}\right)} = \frac{-3a^2}{3a^2} = -1$$

Luego, la recta tangente en el punto dada es:

$$y - \frac{3a}{2} = (-1)\left(x - \frac{3a}{2}\right) \Rightarrow y + x - 3a = 0$$



**PROBLEMA 2.** Probar que la recta tangente en el punto  $(x_0, y_0)$  a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ es la recta } \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

**Solución**

Multiplicando la ecuación de la elipse por  $a^2 b^2$ :

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad (1)$$

Por ser  $(x_0, y_0)$  un punto de la elipse:

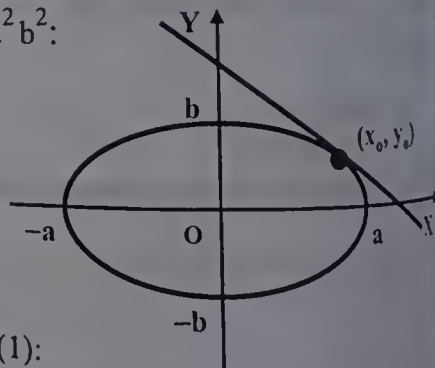
$$b^2 (x_0)^2 + a^2 (y_0)^2 = a^2 b^2 \quad (2)$$

Hallemos la pendiente de la tangente. Para esto, derivamos implícitamente la igualdad (1):

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \Rightarrow 2b^2 x + 2a^2 y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Luego, la pendiente en el punto  $(x_0, y_0)$  es  $m = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$

En consecuencia, la recta tangente en el punto  $(x_0, y_0)$  es



$$y - y_0 = -$$

Finalmente,

**PROBLEMA**

**Solución**

$$y = 0$$

Luego, la

Derivando

$$2x - x$$

$$(2y -$$

La pendi

$$m_1 =$$

$$y -$$

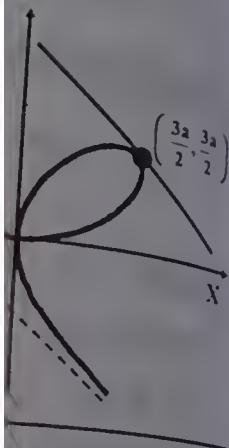
La pend

$$m_2 =$$

$$y -$$

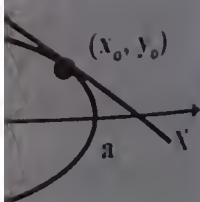
Observ  
paralelas

$$= \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$



a la elipse

1



x  
y

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0) \Rightarrow a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 (y_0)^2 + b^2 (x_0)^2$$

$$\Rightarrow a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 b^2 \quad (\text{por (2)})$$

Finalmente, dividiendo entre  $a^2 b^2$ :

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

**PROBLEMA 3.** El gráfico de la siguiente ecuación es una elipse rotada.

$$x^2 - xy + y^2 = 4$$

Hallar las rectas tangentes a esta curva en los puntos donde ésta corta al eje X. Mostrar que estas rectas son paralelas.

Solución

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - x(0) + (0)^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Luego, la curva corta al eje X en los puntos  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$

Derivando implícitamente la ecuación, tenemos:

$$2x - x y' - y + 2y y' = 0 \Rightarrow$$

$$(2y - x) y' = y - 2x \Rightarrow y' = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

La pendiente de la tangente en  $(-2, 0)$

$$m_1 = \frac{0 - 2(-2)}{2(0) - (-2)} = 2, \text{ y su ecuación es}$$

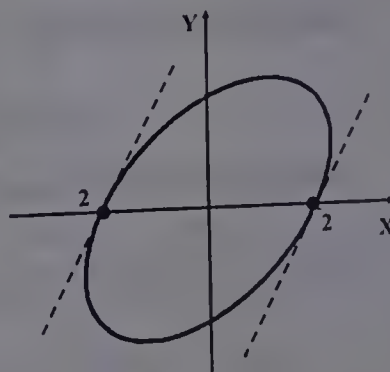
$$y - 0 = 2(x - (-2)) \Rightarrow y = 2x + 4$$

La pendiente de la tangente en  $(2, 0)$

$$m_2 = \frac{0 - 2(2)}{2(0) - 2} = 2, \text{ y su ecuación es}$$

$$y - 0 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4$$

Observar que las dos tangentes tienen la misma pendiente y, por tanto, son paralelas.





**PROBLEMA 4.** Probar que el segmento de cualquier recta tangente a la Astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

comprendido entre los dos ejes coordenados tiene longitud  $a$

**Solución**

Sea  $P = (h, k)$  un punto cualquiera de la Astroide.

Se tiene, entonces:

$$h^{2/3} + k^{2/3} = a^{2/3} \quad (1)$$

**Paso 1.** Hallamos la ecuación de la tangente en el punto  $P = (h, k)$ .

Hallemos la pendiente.

Derivando implícitamente:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-1/3}y^{1/3} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

En particular, la derivada en el punto  $P = (h, k)$ , nos da la pendiente:

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=h} = -\frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}$$

Luego, la ecuación de la recta tangente, teniendo en cuenta (1), es

$$y - k = -\frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}(x - h) \Rightarrow y + \frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}x = h^{2/3}k^{1/3} + k \Rightarrow$$

$$y + \frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}x = k^{1/3}(h^{2/3} + k^{2/3}) \Rightarrow y + \frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}x = k^{1/3}a^{2/3} \quad (2)$$

**Paso 2.** Hallamos la intersección de la recta tangente con los ejes coordenados.

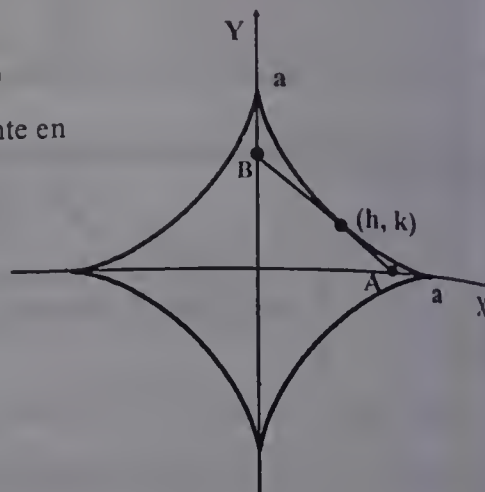
Haciendo  $x = 0$  en (2) se tiene:  $y = k^{1/3}a^{2/3}$

Luego, la recta tangente corta al eje  $Y$  en el punto  $A = (0, k^{1/3}a^{2/3})$

Haciendo  $y = 0$  en (2) se tiene:

$$\frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}x = k^{1/3}a^{2/3} \Rightarrow x = \frac{h^{1/3}}{k^{1/3}}(k^{1/3}a^{2/3}) = h^{1/3}a^{2/3}$$

Luego, la recta tangente corta al eje  $X$  en el punto  $B = (h^{1/3}a^{2/3}, 0)$



Paso 3. Hallamos la longitud del segmento de extremos A y B.

La longitud de este segmento es la distancia  $d(A, B)$ , de A a B.

$$\begin{aligned} [d(A, B)]^2 &= \left(0 - k^{1/3} a^{2/3}\right)^2 + \left(h^{1/3} a^{2/3} - 0\right)^2 \\ &= k^{2/3} a^{4/3} + h^{2/3} a^{4/3} = a^{4/3} (k^{2/3} + h^{2/3}) = a^{4/3} a^{2/3} = a^2 \end{aligned}$$

Luego, la longitud de este segmento de extremos A y B es  $d(A, B) = a$ .

**PROBLEMA 5.** Dada la función  $f(x) = 2x + \cos x$ , cuyo dominio es  $\mathbb{R}$ .

a. Probar que tiene inversa

b. Hallar  $(f^{-1})'(1)$

c. Hallar la recta tangente al gráfico de  $f^{-1}$  en el punto  $(1, f^{-1}(1))$ .

**Solución**

a. Tenemos que

$$f'(x) = 2 - \sin x \Rightarrow f'(x) \geq 2 - 1 = 1 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego, por la parte a del teorema de la función inversa,  $f$  tiene inversa en todo  $\mathbb{R}$ .

b. Se tiene que

$$f(0) = 2(0) + \cos(0) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0$$

Luego, por la parte b. del teorema de la función inversa,

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2 - \sin(0)} = \frac{1}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

c. La recta tangente a la gráfica de  $f^{-1}$  en el punto  $(1, f^{-1}(1)) = (1, 0)$  es

$$y - 0 = (f^{-1})'(1)(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y - x + 1 = 0$$

**PROBLEMA 6.** Probar que la familia de parábolas

$$y = ax^2 \quad (1)$$

se cortan ortogonalmente con la familia de las elipses

$$x^2 + 2y^2 = c \quad (2)$$

**Solución**

$$y = ax^2 \Rightarrow y' = 2ax$$

$$x^2 + 2y^2 = c \Rightarrow 2x + 4y y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{2y}$$

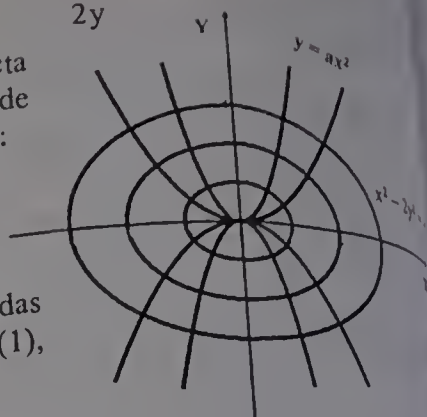
Sea  $P = (x, y)$  un punto donde se intersecta un miembro de la primera familia con uno de la segunda. Las pendientes en este punto son:

$$m_1 = 2ax \quad y \quad m_2 = -\frac{x}{2y}$$

Ahora, considerando que las coordenadas del punto  $P = (x, y)$  satisface la ecuación (1), tenemos,

$$m_1 m_2 = (2ax) \left( -\frac{x}{2y} \right) = -\frac{ax^2}{y} = -\frac{y}{y} = -1$$

Luego, las familias se cortan ortogonalmente.



### PROBLEMA 7.

Probar el teorema de la función inversa: Si  $f$  es diferenciable en un intervalo abierto  $I$  en el cual  $f'$  es continua y no se anula entonces

- $f$ , en todo  $I$ , tiene inversa  $f^{-1}$ .
- $f^{-1}$  es diferenciable y para cada  $x$  en  $f(I)$ , se cumple que:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

### Solución

- Si  $f'$  es continua y no se anula en  $I$ , entonces

$$f'(z) > 0, \forall z \in I \quad \text{ó} \quad f'(z) < 0, \forall z \in I,$$

ya que  $f'$ , de tomar valores positivos y negativos, por el teorema del valor intermedio, existiría un  $c$  en  $I$  tal que  $f'(c) = 0$ . Pero esto contradice la hipótesis.

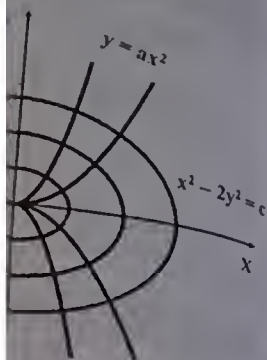
Por un resultado simple, que veremos más adelante (teorema 5.7), en el primer caso,  $f$  es creciente en  $I$ . En segundo caso,  $f$  es decreciente en  $I$ . Sabemos que, cualquiera de los casos,  $f$  es inyectiva y, por lo tanto,  $f$  tiene inversa en  $I$ .

- Sea  $y = f^{-1}(x)$ ,  $x_0$  un elemento cualquiera de  $f(I)$  y sea  $y_0 = f^{-1}(x_0)$ .

Se tiene que:  $x = f(y)$ ,  $x_0 = f(y_0)$   
Ahora,

$$(f^{-1})'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$





Como  $f$  es diferenciable en  $I$ ,  $f$  es continua en  $I$ . Por lo tanto,  $f^{-1}$  es continua. Por otro lado, por ser  $f^{-1}$  continua, se tiene que:

$$x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow y \rightarrow y_0$$

Regresando a (1), tenemos:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} \\ &= \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} \end{aligned}$$

$f$  es diferenciable en  
continua y no se anula,

se cumple que:

### PROBLEMAS PROPUESTOS 4.1

En los problemas del 1 al 23, derivando implícitamente, hallar  $\frac{dy}{dx}$ . Las letras

$a, b, c$  y  $r$  denotan constantes.

1.  $3x^2 - 4y = 1$
2.  $xy - x^2 = 5$
3.  $y^2 = 4px$
4.  $3xy^2 - x^2y^2 = x + 1$
5.  $\frac{1}{x} + y^2 = 2x$
6.  $x^3 + \frac{1}{y} = xy$
7.  $(y^2 - 2xy)^2 = 4y - 3$
8.  $\frac{y}{x-y} - x^3 - 1 = 0$
9.  $x^2 + y^2 = r^2$
10.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
11.  $x + 2\sqrt{xy} + y = b$
12.  $x^2 - 2axy + y^2 = 0$
13.  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$
14.  $\sqrt{y} + \sqrt[3]{y} = x$
15.  $a \cos^2(x + y) = b$
16.  $\tan y = xy$
17.  $\cot(xy) = xy$
18.  $\cos(x - y) = y \sin x$
19.  $y = 1 + xe^y$
20.  $ye^y = e^{x+1}$
21.  $2^x + 2^y = 2^{x+y}$
22.  $2y \ln y = x$
23.  $\ln x + e^{-y/x} = c$
24. Sea  $f(x) = 5 - x - x^3$ .

a. Probar que  $f$  tiene inversa en  $\mathbb{R}$

b. Hallar  $(f^{-1})'(3)$

c. Hallar la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(1, 3)$

d. Hallar la recta tangente al gráfico de  $f^{-1}$  en el punto  $(3, 1)$

teorema del valor  
dice la hipótesis.

5.7), en el primer  
Sabemos que, en  
versa en  $I$ .

$f^{-1}(x_0)$ .

220

25. Sea  $g(x) = x^4 + 3x^2 - 2$ .

- Probar que  $g$  tiene inversa en  $(0, +\infty)$
- Hallar la recta tangente al gráfico de  $g$  en el punto  $(1, 2)$
- Hallar la recta tangente al gráfico de  $g^{-1}$  en el punto  $(2, 1)$

b. Hallar  $(g^{-1})'(2)$

26. Sea  $h(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ .

- Probar que  $g$  tiene inversa en  $\mathbb{R}$
- Hallar la recta tangente al gráfico de  $h$  en el punto  $(0, 0)$
- Hallar la recta tangente al gráfico de  $h^{-1}$  en el punto  $(0, 0)$

b. Hallar  $(h^{-1})'(0)$

En los problemas del 27 al 32, hallar la recta tangente a la curva en el punto indicado.

27.  $y^2 - 4x - 16 = 0$ ;  $(-3, 2)$

28.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ ;  $(-5, -2/3)$

29.  $x^2 - x\sqrt{xy} - 2y^2 = 0$ ;  $(-1, -1)$

30.  $y^4 + 6xy = 4x^4$ ;  $(-1, 2)$

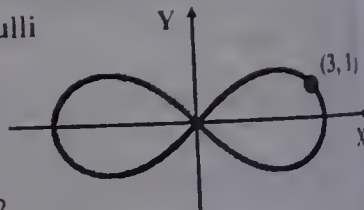
31.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{3} = 1$ ; en los puntos donde  $x = 3$ .

32.  $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n} = 2$ ; en los puntos donde  $x = a$ .

33. Hallar la recta tangente a la Lemniscata de Bernoulli

$$2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2),$$

en el punto  $(3, 1)$ .



34. Probar que la tangente a la hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  en un punto  $P = (x_0, y_0)$

tiene la siguiente ecuación  $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

35. Probar que el segmento de la tangente a la hipérbola  $xy = a^2$ , limitado por los ejes coordenados, tiene por punto medio el punto de tangencia.

36. Probar que la suma de las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados de una tangente cualquiera a la curva  $x^{1/2} + y^{1/2} = b^{1/2}$  es igual a  $b$

En los problemas 37 y 38 hallar el ángulo de intersección de las curvas dadas.

37.  $x^2 - y^2 - 4x - 1 = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$

38.  $y = x^2$ ,  $y = x^3$

39. Probar que  
ortogonal

40. Probar que  
y la circun

a. En el

b. En lo

Cuando  
productos  
se utiliza  
siguiente

1. Toma  
loga  
y m

2. Deri

3. Desj

EJEN

Soluc

Paso:

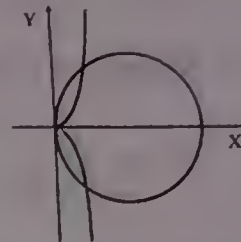
Paso

39. Probar que la elipse  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$  y la hipérbola  $x^2 - y^2 = 5$  se cortan ortogonalmente.

40. Probar que la Cisoide de Diocles,  $(2a - x)y^2 = x^3$

y la circunferencia  $x^2 + y^2 = 8ax$  se cortan:

- En el origen, ortogonalmente.
- En los otros puntos, con un ángulo de  $45^\circ$ .



## SECCION 4.2

### DERIVACION LOGARITMICA

Cuando una función tiene un aspecto complicado y está conformada por productos, cocientes, potencias o radicales, el cálculo de su derivada se simplifica si se utiliza el procedimiento llamado **derivación logarítmica**. Para esto, se siguen los siguientes pasos:

- Tomar logaritmos naturales en ambos miembros y usando las propiedades logarítmicas transformar los productos, cocientes y exponentes en sumas, restas y multiplicaciones, respectivamente.
- Derivar implícitamente.
- Despejar la derivada y simplificar.

**EJEMPLO 1.** Mediante derivación logarítmica hallar la derivada de

$$y = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-2}}$$

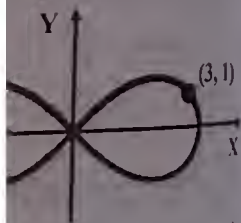
**Solución**

**Pasos 1:** Aplicamos logaritmos y simplificamos:

$$\ln y = \ln \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-2}} = 2 \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x^2-2)$$

**Paso 2.** Derivamos implícitamente

$$D_x \ln y = 2 D_x \ln(x+1) - \frac{1}{2} D_x \ln(x^2-2) \Rightarrow$$



en punto  $P = (x_0, y_0)$

$a^2$ , limitado por los

sección con los ejes

$a^2 = b^{1/2}$  es igual a  $b$ .

as curvas dadas.

$$y = x^3$$



$$\frac{1}{y} D_x y = 2 \frac{1}{x+1} D_x (x+1) - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2-2} D_x (x^2-2) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y} D_x y = 2 \frac{1}{x+1} (1) - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2-2} (2x) = \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2-2}$$

Pao 3. Despejamos la derivada y simplificamos:

$$D_x y = y \left[ \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2-2} \right] = y \left[ \frac{x^2 - x - 4}{(x+1)(x^2-2)} \right] \Rightarrow$$

$$D_x y = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-2}} \left[ \frac{x^2 - x - 4}{(x+1)(x^2-2)} \right] = \frac{(x+1)(x^2 - x - 4)}{(x^2-2)^{3/2}}$$

En la práctica, los 3 pasos dados se dan implícitamente, sin necesidad de especificarlos.

**EJEMPLO 2.** Hallar la derivada de  $y = \left( \frac{t}{1+t} \right)^t$

Solución

$$\ln y = \ln \left( \frac{t}{1+t} \right)^t = t \ln \left( \frac{t}{1+t} \right) = t \ln t - t \ln (1+t)$$

Esto es,

$$\ln y = t \ln t - t \ln (1+t)$$

Derivando respecto a  $t$ :

$$\frac{y'}{y} = t \frac{1}{t} + \ln t - \left[ t \frac{1}{1+t} + \ln (1+t) \right] = 1 + \ln t - \frac{t}{1+t} - \ln (1+t) \Rightarrow$$

$$y' = y \left( 1 - \frac{1}{1+t} + \ln \frac{t}{1+t} \right) = \left( \frac{t}{1+t} \right)^t \left( \frac{t}{1+t} + \ln \frac{t}{1+t} \right)$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 4.2

**PROBLEMA 1.** Utilizando derivación logarítmica, hallar la derivada de

$$y = \frac{(x^2-1)(x^3+2)}{\sqrt[3]{x+1}}$$

Solución

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \frac{(x^2 - 1)(x^3 + 2)}{\sqrt[3]{x+1}} = \ln [(x^2 - 1)(x^3 + 2)] - \ln \sqrt[3]{x+1} \\ &= \ln(x^2 - 1) + \ln(x^3 + 2) - \frac{1}{3} \ln(x + 1)\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}D_x \ln y &= D_x \ln(x^2 - 1) + D_x \ln(x^3 + 2) - D_x \frac{1}{3} \ln(x + 1) \\ &= \frac{1}{x^2 - 1} D_x(x^2 - 1) + \frac{1}{x^3 + 2} D_x(x^3 + 2) - \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} D_x(x + 1) \Rightarrow \\ \frac{1}{y} D_x y &= \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{3x^2}{x^3 + 2} - \frac{1}{3(x+1)}\end{aligned}$$

$$D_x y = y \left( \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{3x^2}{x^3 + 2} - \frac{1}{3(x+1)} \right) \Rightarrow$$

$$D_x y = \frac{(x^2 - 1)(x^3 + 2)}{\sqrt[3]{x+1}} \left( \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{3x^2}{x^3 + 2} - \frac{1}{3(x+1)} \right)$$

**PROBLEMA 2.** Mediante derivación logarítmica hallar la derivada de

a.  $z = x^x, x > 0$       b.  $y = (x)^{x^x} = x^{x^x}, x > 0$

Solución

a.  $z = x^x \Rightarrow \ln z = \ln x^x = x \ln x \Rightarrow \ln z = x \ln x$

Derivamos respecto a x:

$$\begin{aligned}\frac{z'}{z} &= x (\ln x)' + (x)' \ln x = x \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x \Rightarrow \\ z' &= z (1 + \ln x) \Rightarrow z' = x^x (1 + \ln x)\end{aligned}$$

b.  $y = x^{x^x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{x^x} = x^x \ln x \Rightarrow \ln y = x^x \ln x.$

Derivamos respecto a x:

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= (x^x)' \ln x + x^x (\ln x)' \\ &= [x^x (1 + \ln x)] \ln x + x^x \frac{1}{x}\end{aligned}$$

(por la parte a.)

$$\begin{aligned}
 &= x^x \left[ (1 + \ln x) \ln x + \frac{1}{x} \right] = x^x \left[ \ln x + \ln^2 x + \frac{1}{x} \right] \Rightarrow \\
 y' &= y \left( x^x \left[ \ln x + \ln^2 x + \frac{1}{x} \right] \right) = x^{x^x} \left( x^x \left[ \ln x + \ln^2 x + \frac{1}{x} \right] \right) \Rightarrow \\
 y' &= x^x x^{x^x} \left[ \frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right]
 \end{aligned}$$

**PROBLEMA 3.** Si  $x^y = y^x$ , hallar  $D_x y$

**Solución**

Aplicamos logaritmos y luego derivamos implícitamente:

$$x^y = y^x \Rightarrow \ln x^y = \ln y^x \Rightarrow y \ln x = x \ln y \Rightarrow$$

$$y D_x (\ln x) + \ln x D_x y = x D_x (\ln y) + \ln y D_x x \Rightarrow$$

$$y \frac{1}{x} + \ln x D_x y = x \frac{1}{y} D_x y + \ln y \Rightarrow \left( \ln x - \frac{x}{y} \right) D_x y = \ln y - \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$\left( \frac{y \ln x - x}{y} \right) D_x y = \frac{x \ln y - y}{x} \Rightarrow D_x y = \frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 4.2

Utilizando la técnica de la derivación logarítmica hallar la derivada de las siguientes funciones:

1.  $y = x^{x^3}$

2.  $y = x^{\sqrt{x}}, x > 0$

3.  $y = x^{\ln x}, x > 0$

4.  $y = (\ln x)^{\ln x}$

5.  $y = 2^{3^x}$

6.  $y = a^{x^a}$

7.  $y = \sqrt[x]{x}$

8.  $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$

9.  $y = (\sin x)^{\cos x}$

10.  $y = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$

11.  $y = \frac{x(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$

12.  $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2 - 1)}{(x + 1)^2}}$



## SECCION 4.3

### DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

**TEOREMA 4.2** Si  $u = u(x)$  es una función diferenciable de  $x$ , entonces

$$1. D_x \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

$$2. D_x \cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

$$3. D_x \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} D_x u$$

$$4. D_x \cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2} D_x u$$

$$5. D_x \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

$$6. D_x \csc^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

#### Demostración

Es suficiente probar las fórmulas del teorema para el caso  $u = x$ . El caso general se obtiene usando la regla de la cadena.

Sólo probaremos (1), (4) y (5). Las otras fórmulas se obtienen en forma análoga (problema propuesto 18).

En vista de que cada función trigonométrica es diferenciable y su derivada es continua, su correspondiente función inversa es diferenciable.

1. Sea  $y = \sin^{-1} x$ . Luego,  $\sin y = x$  y  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Derivando  $\sin y = x$  respecto a  $x$ :

$$D_x \sin y = D_x x \Rightarrow \cos y D_x y = 1 \Rightarrow D_x y = \frac{1}{\cos y} \quad (i)$$

Pero,  $\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y}$  y  $\cos y > 0$  en el intervalo  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ .

$$\text{Luego, } \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}.$$

Reemplazando este valor en (i):

$$D_x y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow D_x \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

4. Sea  $y = \cot^{-1} x$ . Luego,  $\cot y = x$  y  $0 < y < \pi$ .

Derivando  $\cot y = x$  respecto a  $x$ :

$$D_x \cot y = D_x x = -\csc^2 y D_x y = 1 \Rightarrow$$

$$D_x y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

5. Sea  $\sec^{-1} x = y$ . Luego,  $\sec y = x$ , donde  $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$  ó  $\pi \leq y < \frac{3\pi}{2}$

Derivando  $\sec y = x$  respecto a  $x$ :

$$D_x \sec y = D_x x \Rightarrow \sec y \tan y D_x y = 1 \Rightarrow$$

$$D_x y = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{x \tan y} \quad (\text{ii})$$

Pero,  $\tan y = \pm \sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm \sqrt{x^2 - 1}$ . Además,

$\tan y > 0$  en  $0 < y < \frac{\pi}{2}$  ó en  $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$ . Luego,  $\tan y = \sqrt{x^2 - 1}$

Reemplazando este valor en (ii):

$$D_x y = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow D_x \sec^{-1} x = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

**EJEMPLO 1.** Hallar la derivada de

a.  $y = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$     b.  $y = \tan^{-1} \sqrt{x}$     c.  $y = \operatorname{cosec}^{-1}(e^{3x})$

**Solución**

a.  $y' = D_x \left( \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x/2)^2}} D_x \left( \frac{x}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

b.  $y' = D_x \left( \tan^{-1} \sqrt{x} \right) = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} D_x \sqrt{x} = \frac{1}{1 + x} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

c.  $y' = D_x \operatorname{cosec}^{-1}(e^{3x}) = -\frac{1}{e^{3x} \sqrt{(e^{3x})^2 - 1}} D_x (e^{3x})$   
 $= -\frac{1}{e^{3x} \sqrt{e^{6x} - 1}} (3e^{3x}) = -\frac{3}{\sqrt{e^{6x} - 1}}$

**EJEMPLO 2.** Probar que la siguiente función es constante.

$$f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2 \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 4.$$

**Solución**

Recordemos el teorema de la constante: Si  $f$  es continua en un intervalo  $I$ , entonces

$$f'(x) = 0, \forall x \text{ en } I \Leftrightarrow f(x) = C, \forall x \text{ en } I$$

De acuerdo a este teorema, para probar que  $f$  es constante es suficiente probar que

$$f'(x) = 0, \forall x, \text{ tal que } 0 \leq x \leq 4.$$

Bien, tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2 D_x \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - ((x-2)/2)^2}} D_x\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2 \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x}/2)^2}} D_x\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{4 - (x-2)^2}} \left(\frac{1}{2}\right) - 2 \frac{2}{\sqrt{4 - x}} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{4 - x}} = \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} = 0 \end{aligned}$$

### PROBLEMAS PROPUESTOS 4.3

En los problemas del 1 al 13 hallar la derivada de las funciones especificadas.

1.  $y = \sin^{-1}\left(\frac{x}{9}\right)$

2.  $y = \sec^{-1}(x/3)$

3.  $y = \sin^{-1}\sqrt{x}$

4.  $y = \tan^{-1}(x^2 + 1)$

5.  $y = \cot^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

6.  $y = x\sqrt{4 - x^2} + 4 \sin^{-1}(x/2)$

7.  $y = \sqrt{1 - x^2} + x \operatorname{cosec}^{-1}(1/x)$

8.  $y = \sin^{-1}\sqrt{\sin x}$

9.  $y = \tan^{-1}\left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]$

10.  $y = \cos^{-1}(\ln x)$

11.  $y = \tan^{-1}x + \cot^{-1}x$

12.  $y = \tan(\cos^{-1}x)$

13.  $y = 2 \cos^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}x\right) + \sqrt{4x - x^2}$

En los problemas 14 y 15 hallar la derivada  $y'$ .



228

14.  $\tan^{-1}(x+y) = x$
15.  $xy = \tan^{-1}(x/y)$
16. Hallar la recta tangente a la curva  $f(x) = \tan^{-1}(3/x)$  en el punto donde  $x=3$ .
17. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = \cos^{-1}[\sqrt{2}(x-1/2)]$ , en el punto donde  $x=0$ .
18. Probar las fórmulas (2), (3) y (6) del teorema 4.2.
19. Probar que la siguiente función es constante  $y = (\cos^{-1}x + \sin^{-1}x)^n$
20. Probar que la siguiente función es constante  $f(x) = 2 \tan^{-1} \sqrt{x} - \sin^{-1} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)$ , donde  $x \geq 0$

## SECCION 4.4

### DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR, VELOCIDAD Y ACELERACION

Al derivar una función  $f$  obtenemos la función derivada  $f'$ , cuyo dominio está contenido en el dominio de  $f$ . A la derivada  $f'$  podemos volver a derivar, obteniendo otra nueva función  $(f')'$ , cuyo dominio es el conjunto de todos los puntos  $x$  del dominio de  $f'$  para los cuales  $f'$  es derivable en  $x$ ; o sea todos los puntos  $x$  del dominio de  $f'$  para los cuales existe el siguiente límite:

$$(f')'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

La función  $(f')'$  se llama segunda derivada de  $f$  y se denota por  $f''$ . Si  $f''(a)$  existe, diremos que  $f$  es dos veces diferenciable en  $a$  y que  $f''(a)$  es la segunda derivada de  $f$  en  $a$ .

Con las otras notaciones, la segunda derivada de  $y = f(x)$  se escribe así:

$$D_x^2(f(x)), \quad D_x^2(y), \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

En vista de que  $f''$  es la segunda derivada de  $f$ , a  $f'$  la llamaremos primera derivada de  $f$ .

### EJEMPLO

Solución

a.  $f'(x)$

c.  $\frac{du}{dt} =$

El p  
segund  
denota

Nu  
y así  
se les  
La  
incór  
super

Esta

E

So

I

S

**EJEMPLO 1.**

Hallar la primera y la segunda derivadas de cada una de las siguientes funciones:

a.  $f(x) = x^2$

b.  $y = x^3 - 7x^2 - 2x + 1.$

c.  $u = \frac{1}{t}.$

**Solución**

a.  $f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2.$

b.  $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 14x - 2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 14$

c.  $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{t^2}, \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}(-t^{-2}) = -(-2)t^{-3} = \frac{2}{t^3}$

El proceso de derivación de una función  $f$  podemos continuarlo más allá de la segunda derivada. Así, si derivamos  $f''$  obtenemos la **tercera derivada** de  $f$ , que se denota por  $f'''$ . Esto es,

$$f''' = (f'')'$$

Nuevamente, si a  $f'''$  la volvemos a derivar, obtenemos la **cuarta derivada** de  $f$ , y así sucesivamente. A las derivadas de una función, a partir de la derivada segunda, se les llama **derivadas de orden superior**.

La notación anterior, cuando el orden de derivación va más allá de 4, es incómoda. Para mayor facilidad, el orden de la derivada se abrevia mediante un superíndice encerrado entre paréntesis, del modo siguiente:

$$f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \quad f^{(3)} = f''', \quad f^{(4)} = f'''' , \text{ etc.}$$

Estas derivadas, con las otras notaciones, se escriben así:

$$f' = D_x(f) = \frac{df}{dx},$$

$$f'' = f^{(2)} = D_x^2(f) = \frac{d^2f}{dx^2},$$

$$f''' = f^{(3)} = D_x^3(f) = \frac{d^3f}{dx^3},$$

$$f'''' = f^{(4)} = D_x^4(f) = \frac{d^4f}{dx^4}$$

**EJEMPLO 2.** Hallar todas las derivadas de la función  $f(x) = x^3$

**Solución**

$$f'(x) = 3x^2, \quad f^{(2)}(x) = 6x, \quad f^{(3)}(x) = 6, \quad f^{(4)}(x) = 0 \text{ y } f^{(n)}(x) = 0, \text{ para } n \geq 4.$$

**EJEMPLO 3.** Hallar las derivadas hasta de orden 4 de  $y = \frac{1}{x}.$

**Solución**

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\
 2. \quad \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(-x^{-2}) = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3} \\
 3. \quad \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x^3}\right) = \frac{d}{dx}(2x^{-3}) = 2(-3)x^{-4} = -\frac{6}{x^4} \\
 4. \quad \frac{d^4y}{dx^4} &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{6}{x^4}\right) = \frac{d}{dx}(-6x^{-4}) = -6(-4)x^{-5} = \frac{24}{x^5}
 \end{aligned}$$

### VELOCIDAD

Vimos que para precisar el concepto de velocidad instantánea tuvimos que recurrir a un límite de la velocidad promedio, el cual nos condujo a la derivada. Formalicemos esta idea en la siguiente definición.

**DEFINICION.** Sea  $s = f(t)$  la función posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta. La velocidad (instantánea) del objeto en el instante  $t$  está dada por

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

La velocidad es **positiva** o **negativa** según el objeto se desplaza en el sentido positivo o negativo de la recta numérica. Si la velocidad es 0, el objeto está en reposo.

**EJEMPLO 4.** Un objeto se mueve sobre una recta de acuerdo a la ecuación  $s = 3t^3 - 8t + 7$ , donde  $s$  se mide en centímetros y  $t$  en segundos.

- Hallar la velocidad del objeto cuando  $t = 1$  y cuando  $t = 5$ .
- Hallar la velocidad promedio en el intervalo de tiempo  $[1, 5]$ .

**Solución**

a. Tenemos que  $v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t - 8$ . Luego,

$$v(1) = 6(1) - 8 = -2 \text{ cm/seg}$$

$$\text{y } v(5) = 6(5) - 8 = 22 \text{ cm/seg}$$

b. La velocidad promedio en el intervalo  $[1, 5]$  es  $\frac{s(5) - s(1)}{5 - 1} = \frac{42 - 2}{4} = 10 \text{ cm/seg}$



# ACELERACION

Derivando la función posición de un objeto en movimiento rectilíneo obtuvimos la velocidad. Ahora, tomando la función velocidad podemos calcular la aceleración promedio y la aceleración instantánea.

**DEFINICION.** Sea  $s = f(t)$  la función posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta. La aceleración (instantánea) en el instante  $t$  es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t)$$

**EJEMPLO 5.** Un objeto se mueve sobre una recta según la función posición

$$s = t^3 - 3t + 1,$$

donde  $s$  se mide en metros y  $t$  en segundos.

- ¿En qué instante la velocidad es 0?
- ¿En qué instante la aceleración es 0?
- Hallar la aceleración en el instante en que la velocidad es 0.
- ¿Cuándo el objeto se mueve hacia delante (a la derecha)?
- ¿Cuándo el objeto se mueve hacia atrás (a la izquierda)?

**Solución**

Tenemos que:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 3 \quad \text{y} \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t$$

Luego,

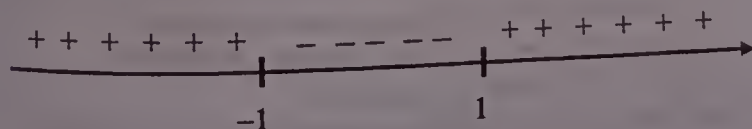
$$a. \quad v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(t+1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \quad \text{ó} \quad t = 1.$$

$$a. \quad a(t) = 0 \Leftrightarrow 6t = 0 \Leftrightarrow t = 0. \text{ Esto es, la aceleración es 0 sólo en el instante } t = 0$$

$$c. \quad a(-1) = 6(-1) = -6 \text{ m/seg}^2. \quad a(1) = 6(1) = 6 \text{ m/seg}^2.$$

$$d. \text{ El movimiento es hacia adelante } \Leftrightarrow v(t) > 0$$

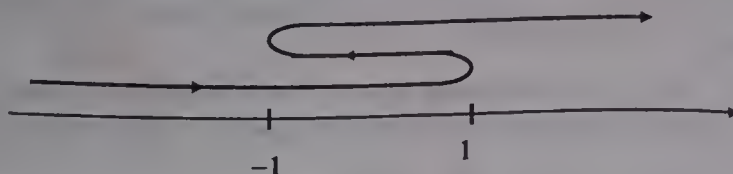
$$\Leftrightarrow 3t^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow 3(t+1)(t-1) > 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$



$$e. \text{ El movimiento es hacia atrás } \Leftrightarrow v(t) < 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow 3(t+1)(t-1) < 0 \Leftrightarrow t \in (-1, 1)$$

El siguiente dibujo muestra, esquemáticamente, el movimiento del objeto. Advertimos que el objeto se mueve sobre la recta y no sobre la curva superior.

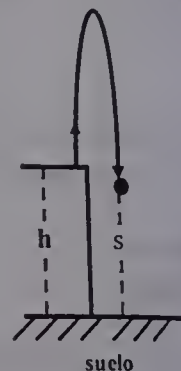


### MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE

Un movimiento de caída libre es un movimiento de aceleración constante, donde la aceleración es la aceleración de la gravedad. El valor de esta aceleración a la orilla del mar es  $g = 9,8 \text{ m/seg}^2$  en el sistema métrico o  $g = 32 \text{ pies/seg}^2$  en el sistema inglés.

Supongamos que un cuerpo es lanzado verticalmente desde una altura  $h$  metros sobre el nivel del suelo con una velocidad inicial de  $v_0 \text{ m/seg}^2$ . Si el sentido positivo es hacia arriba y si despreciamos la fricción del aire, entonces después de  $t$  segundos el objeto se encuentra a una altura de  $s$  metros sobre el suelo, donde

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h = -4,9t^2 + v_0t + h$$



En el caso de que  $s$  y la altura  $h$  se den en pies y la velocidad  $v_0$  en  $\text{pies/seg}^2$ , la fórmula correspondiente es

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h = -\frac{1}{2}(32)t^2 + v_0t + h = -16t^2 + v_0t + h$$

Observar que la aceleración es  $\frac{d^2s}{dt^2} = -g$

**EJEMPLO 6.** Una pelota es lanzada hacia arriba desde la azotea de un edificio de 58,8 m de altura y con una velocidad inicial de 19,6 m/seg.

- ¿Cuándo la pelota alcanza su máxima altura?
- ¿Cuál esta altura máxima (respecto al suelo)?
- ¿Cuándo la pelota llega al suelo?
- ¿Con que velocidad llega al suelo?

**Solución**

Tenemos que  $h = 58,8 \text{ m}$  y  $v_0 = 19,6 \text{ m/seg}$ . Luego,

$$s = -4,9t^2 + 19,6t + 58,8 \quad \text{y} \quad v(t) = -9,8t + 19,6$$

a. La pelota alcanza su máxima altura cuando:

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 19,6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{19,6}{9,8} = 2. \text{ Esto es, después de 2 segundos.}$$

b. La altura máxima es el valor de  $s$  cuando  $t = 2$ . Esto es,

$$s = -4,9(2)^2 + 19,6(2) + 58,8 = 78,4 \text{ metros}$$

c. La pelota llega al suelo cuando  $s = 0$ . Luego,

$$-4,9t^2 + 19,6t + 58,8 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t - 12 = 0 \quad (\text{dividiendo entre } -4,9)$$

$$\Rightarrow (t - 6)(t + 2) \Rightarrow t = 6 \quad \text{ó} \quad t = -2$$

La pelota llega al suelo después de 6 segundos. Desechamos  $-2$  por negativo

d. La velocidad con que llega al suelo es la velocidad en el instante 6 seg. Esto es,

$$v(6) = -9,8(6) + 19,6 = -39,2 \text{ m/seg.}$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 4.4

**PROBLEMA 1.** Hallar las tres primeras derivadas de la función

$$y = \frac{1}{ax + b}$$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{ax + b} \right) = \frac{d}{dx} (ax + b)^{-1} = -(ax + b)^{-2} \frac{d}{dx} (ax + b)$$

$$= -(ax + b)^{-2} (a) = -\frac{a}{(ax + b)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( -\frac{a}{(ax + b)^2} \right) = \frac{d}{dx} \left( -a(ax + b)^{-2} \right)$$

$$= (-2)(-a)(ax + b)^{-3} \frac{d}{dx} (ax + b) = 2a(ax + b)^{-3} (a) = \frac{2a^2}{(ax + b)^3}$$



$$\begin{aligned}\frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{2a^2}{(ax+b)^3} \right) = \frac{d}{dx} \left( 2a^2 (ax+b)^{-3} \right) \\ &= -3(2a^2)(ax+b)^{-4} \frac{d}{dx}(ax+b) = -3(2a^2)(ax+b)^{-4}(a) = -\frac{6a^3}{(ax+b)^4}\end{aligned}$$

**PROBLEMA 2.** Probar que la función  $y = (x^2 - 1)^2$  satisface la ecuación

$$(x^2 - 1)y^{(4)} + 2xy^{(3)} - 6y^{(2)} = 0$$

**Solución**

En primer lugar calculamos  $y^{(2)}$ ,  $y^{(3)}$ ,  $y^{(4)}$

$$y^{(1)} = \frac{d}{dx}(x^2 - 1)^2 = 2(x^2 - 1)(2x) = 4x^3 - 4x$$

$$y^{(2)} = \frac{d}{dx}(4x^3 - 4x) = 12x^2 - 4 \quad (1)$$

$$(2) \quad y^{(3)} = \frac{d}{dx}(12x^2 - 4) = 24x \quad y \quad (3) \quad y^{(4)} = 24$$

Reemplazando (1), (2) y (3) en la ecuación dada:

$$\begin{aligned}(x^2 - 1)y^{(4)} + 2xy^{(3)} - 6y^{(2)} &= (x^2 - 1)(24) + 2x(24x) - 6(12x^2 - 4) \\ &= 24x^2 - 24 + 48x^2 - 72x^2 + 24 = 0\end{aligned}$$

**PROBLEMA 3.** Si  $x^2 + y^2 = r^2$ , Hallar: a.  $y'$  b.  $y''$  c.  $y'''$

**Solución**

a. Derivando implícitamente  $x^2 + y^2 = r^2$ :

$$2x + 2y y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

b. Derivando implícitamente a  $2x + 2y y' = 0$ :

$$2 + 2(y')^2 + 2y y'' = 0 \Rightarrow$$

$$y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y} = -\frac{1 + (-x/y)^2}{y} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{r^2}{y^3}$$

c. Derivando implícitamente a  $2 + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$ :

$$4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 0 \Rightarrow 3y'y'' + yy''' = 0$$

$$y''' = -\frac{3y'y''}{y} = -\frac{3\left(-\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{r^2}{y^3}\right)}{y} = -\frac{3xr^2}{y^5}$$

**PROBLEMA 4.** Hallar la derivada de orden  $n$  de la función  
 $y = \sin ax$

**Solución**

Usaremos la identidad trigonométrica:  $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$

$$y^{(1)} = (\sin ax)' = (\cos ax)(ax)' = a \sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= \left[a \sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \left[a \cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)\right] \left[ax + \frac{\pi}{2}\right]' \\ &= \left[a \cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)\right] [a] = a^2 \cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = a^2 \sin\left(\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= a^2 \sin\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(3)} &= \left[a^2 \sin\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \left[a^2 \cos\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right)\right] \left[ax + 2\frac{\pi}{2}\right]' \\ &= a^2 \cos\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right) [a] = a^3 \cos\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right) = a^3 \sin\left(ax + 3\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Observando las tres primeras derivadas conjeturamos que se cumple la igualdad

$$y^{(n)} = a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right). \quad (1)$$

Probemos la validez de esta fórmula por inducción. Sólo falta verificar que se cumple para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= [y^{(n)}]' = \left[a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \left[a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)\right] \left[ax + n\frac{\pi}{2}\right]' \\ &= a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) [a] = a^{n+1} \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) \\ &= a^{n+1} \sin\left[\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = a^{n+1} \sin\left(ax + (n+1)\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Luego, (1) se cumple para todo  $n$  natural.

**PROBLEMA 5.** Hallar la derivada de orden  $n$  de la función

$$y = \frac{1+x}{1-x}$$

Solución

$$D_x \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] = \frac{(1-x)(1+x)' - (1+x)(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)(1) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = 2 \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\begin{aligned} D_x^2 \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] &= D_x \left[ 2 \frac{1}{(1-x)^2} \right] = 2 D_x \left[ (1-x)^{-2} \right] = 2(-2)(1-x)^{-3}(-1) \\ &= 2 \frac{2}{(1-x)^3} = 2 \frac{2!}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x^3 \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] &= D_x \left[ 2 \frac{2}{(1-x)^3} \right] = 2 D_x \left[ 2(1-x)^{-3} \right] = 2(2)(-3)(1-x)^{-4}(-1) \\ &= 2 \frac{2(3)}{(1-x)^4} = 2 \frac{3!}{(1-x)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x^4 \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] &= D_x \left[ 2 \frac{2(3)}{(1-x)^4} \right] = 2 D_x \left[ 2(3)(1-x)^{-4} \right] = 2(2)(3)(-4)(1-x)^{-5}(-1) \\ &= 2 \frac{2(3)(4)}{(1-x)^5} = 2 \frac{4!}{(1-x)^5} \end{aligned}$$

Observando las cuatro primeras derivadas conjeturamos que se cumple la igualdad

$$D_x^n \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] = 2 \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad (1)$$

Probemos esta fórmula por inducción. Sólo falta verificar que esta fórmula se cumple para  $n+1$ :

$$\begin{aligned} D_x^{n+1} \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] &= D_x \left[ D_x^n \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] \right] = D_x \left[ 2 \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \right] \\ &= 2 D_x \left[ n! (1-x)^{-(n+1)} \right] = 2n! [-(n+1)](1-x)^{-(n+1)-1}(-1) \\ &= 2(n+1)!(1-x)^{-(n+2)} = 2 \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}} \end{aligned}$$



**PROBLEMA 6.** Si  $y = f(u)$  y  $u = g(x)$  tienen derivadas de segundo orden, probar que:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{du^2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{du} \frac{d^2 u}{dx^2}$$

**Solución**

A la igualdad de la regla de la cadena le volvemos aplicar la misma regla:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{du} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \right) \\ &= \left( \frac{d}{dx} \frac{dy}{du} \right) \left( \frac{du}{dx} \right) + \frac{dy}{du} \left( \frac{d}{dx} \frac{du}{dx} \right) = \left( \frac{d^2 y}{du^2} \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{du}{dx} \right) + \frac{dy}{du} \frac{d^2 u}{dx^2} \\ &= \frac{d^2 y}{du^2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{du} \frac{d^2 u}{dx^2} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 7.** Si  $y = f(u)$  y  $u = g(x)$  tienen derivadas de tercer orden, probar que:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 y}{du^3} \left( \frac{du}{dx} \right)^3 + 3 \frac{d^2 y}{du^2} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{du}{dx} + \frac{dy}{du} \frac{d^3 u}{dx^3}$$

**Solución**

A la igualdad del problema anterior volvemos aplicar la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{du^2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{du} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{du^2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{du} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \\ &= \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{du^2} \right) \right) \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{d^2 y}{du^2} \frac{d}{dx} \left( \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right) + \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{du} \right) \right) \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \frac{dy}{du} \frac{d^3 u}{dx^3} \\ &= \left( \frac{d^3 y}{du^3} \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{d^2 y}{du^2} \left( 2 \frac{du}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \left( \frac{d^2 y}{du^2} \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \frac{dy}{du} \frac{d^3 u}{dx^3} \\ &= \frac{d^3 y}{du^3} \left( \frac{du}{dx} \right)^3 + 3 \frac{d^2 y}{du^2} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{du}{dx} + \frac{dy}{du} \frac{d^3 u}{dx^3} \end{aligned}$$

# PROBLEMAS PROPUESTOS 4.4

En los problemas del 1 al 6 hallar  $y''$ .

1.  $y = \sqrt{b^2 - x^2}$

2.  $y = \ln \sqrt[3]{1+x^2}$

3.  $y = (1+x^2) \tan^{-1} x$

4.  $y = \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x$

5.  $y = e^{\sqrt{x}}$

6.  $y = (\sin^{-1} x)^2$

En los problemas del 7 al 14 hallar las derivadas de segundo y tercer orden.

7.  $y = x^5 - 4x^3 - 2x + 2$

8.  $z = \frac{1}{4} x^8 - \frac{1}{3} x^6 - \frac{1}{2} x^2$

9.  $f(x) = (x-1)^4$

10.  $g(x) = (x^2 + 1)^3$

11.  $y = \sqrt{x}$

12.  $h(x) = \frac{x}{2+x}$

13.  $y = x \sin x$

14.  $y = x^3 e^{2x}$

En los problemas del 15 al 20 hallar  $y''$ .

15.  $xy = 1$

16.  $y^2 = 4ax$

17.  $x^3 + y^3 = 1$

18.  $x^2 = y^3$

19.  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

20.  $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ ,  $a$  y  $b$  constantes

21. Probar que la función  $y = x^4 + x^3$  satisface la ecuación  $2xy' - x^2 y'' = -4x^4$

22. Probar que la función  $y = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)$  satisface la ecuación  $2yy'' - 2y' = x^2$

23. Probar que la función  $y = \frac{x^4}{4} - \frac{a}{x} + b$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes, satisface la ecuación

$$\frac{1}{6} x^4 y''' - x^3 y'' + 2x^2 y' = 5a$$

En los problemas del 24 al 38 hallar la derivada de orden  $n$  de la función dada.

24.  $y = x^n$

25.  $y = x^{n-1}$

26.  $y = x^{n+1}$

27.  $y = ax^n$

28.  $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

29.  $y = (ax + b)^n$

30.  $y = \frac{1}{x}$

31.  $y = \frac{1}{1-x}$

32.  $y = \frac{1}{x-a}$

33.  $y = \cos ax$

34.  $y = \sin^2 x$

35.  $y = e^{ax}$

36.  $y = xe^x$

37.  $y = x \ln x$

38.  $y = \ln(1+x)$

En los problemas del 39 al 42 hallar  $y''$  para los valores indicados.

39.  $y = (2-x^2)^4$ ;  $x = 1$

40.  $y = x\sqrt{x^2+3}$ ;  $x = -1$

$$41. y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad x = 1$$

$$42. x^2 + 2y^2 = 6; \quad x = 2, \quad y = 1$$

En los problemas 43 y 44 se da la función de posición, con las unidades en metros y segundos. Contestar las siguientes preguntas:

- a. ¿En qué instantes la velocidad es 0?    b. ¿En qué instantes la aceleración es 0?  
 c. ¿Cuándo el objeto se mueve a la derecha?  
 d. ¿Cuándo el objeto se mueve a la izquierda?

$$43. s = t^3 - 3t^2 - 24t + 8$$

$$44. s = t^2 + \frac{54}{t}$$

En los problemas 45 y 46 se da la función de posición, con las unidades en metros y segundos. Hallar la aceleración en los puntos donde la velocidad es nula.

$$45. s = \frac{5+t^2}{2+t}$$

$$46. s = \sqrt{2t} + \frac{1}{\sqrt{2t}}$$

47. Un objeto se mueve en línea recta de acuerdo a la función  $s = t^3 - 3t^2 - 24t + 8$ . Hallar su velocidad en los instantes donde la aceleración es nula.

48. Una roca es lanzada hacia arriba desde la parte superior de una torre. La posición de la roca después de  $t$  segundos es  $s = -16t^2 + 48t + 160$  pies.

- a. ¿Cuál es la altura de la torre?    b. ¿Cuál es la velocidad inicial de la roca?  
 c. ¿Cuándo alcanza la altura máxima?    d. ¿Cuándo alcanza el suelo?  
 e. ¿A qué velocidad alcanza el suelo?

49. Si un proyectil es disparado desde el suelo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial  $v_0$ , la altura del proyectil, después de  $t$  segundos, está dada por

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t.$$

a. Probar que el proyectil alcanza su máxima altura cuando  $t = \frac{v_0}{g}$ .

b. Probar que la altura máxima es  $s = \frac{v_0^2}{2g}$ .

50. ¿Con qué velocidad inicial  $v_0$  debe dispararse un proyectil desde el suelo verticalmente hacia arriba para que alcance una altura máxima de 705,6 metros. Sugerencia: Ver el problema 49.

51. Desde lo alto de un acantilado es lanzada una piedra verticalmente hacia abajo, en dirección al mar, con una velocidad inicial  $v_0$ . Si el sentido positivo es hacia abajo, la posición de la roca después de  $t$  segundos es  $s = 4,9t^2 + v_0t$  metros. La roca llega al agua después de 4 segundos y con una velocidad de 58,8 m/seg. Hallar la altura del acantilado.

52. Desde lo alto de un acantilado se dejan caer dos rocas (velocidad inicial nula), una tras otra con 3 segundos de diferencia. Probar que las rocas se separan con una velocidad de 3g metros por segundo.



## SECCION 4.5

## FUNCIONES HIPERBOLICAS Y SUS INVERSAS

Las funciones hiperbólicas se definen en términos de las funciones  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ .  
 Las funciones trigonométricas están relacionadas con el círculo trigonométrico:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

razón por la cual a estas funciones se las conoce con el nombre de funciones circulares.

Las funciones hiperbólicas están relacionadas con la hipérbola:

$$x^2 - y^2 = 1,$$

de donde derivan su nombre.

Las funciones hiperbólicas, al igual que las trigonométricas, son seis: seno hiperbólico (sinh), coseno hiperbólico (cosh), tangente hiperbólica (tanh), cotangente hiperbólica (coth), secante hiperbólica (sech) y cosecante hiperbólica (cosech).

## DEFINICION.

$$1. \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$2. \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$3. \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$4. \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$5. \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$6. \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$$

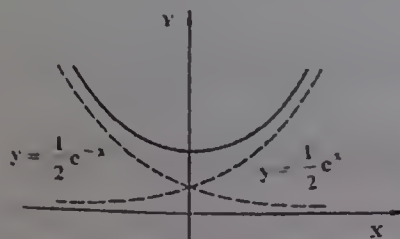
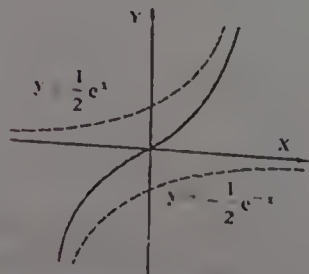
Los dominios, rangos y gráficos de estas funciones son como sigue:

$$y = \sinh x$$

$$y = \cosh x$$

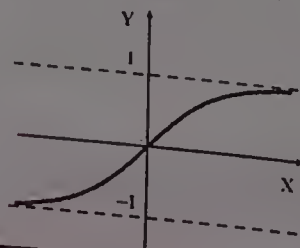
$$\text{Dom.} = \mathbb{R}, \text{ Rang.} = \mathbb{R}$$

$$\text{Dom.} = \mathbb{R}, \text{ Rang.} = [1, +\infty)$$



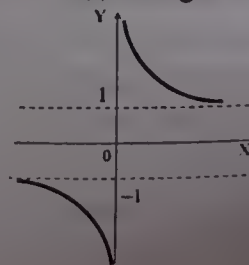
$$y = \tanh x$$

$$\text{Dom.} = \mathbb{R}, \text{ Rang.} = (-1, 1)$$



$$y = \coth x$$

$$\text{Dom.} = \mathbb{R} - \{0\}, \text{ Rang.} = \mathbb{R} - [-1, 1]$$



# INVERSA

nes  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$   
trigonométrico:

funciones circulares.

seis: seno hiperbólico  
cotangente hiperbólica  
)

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x$$

$$\sinh x$$

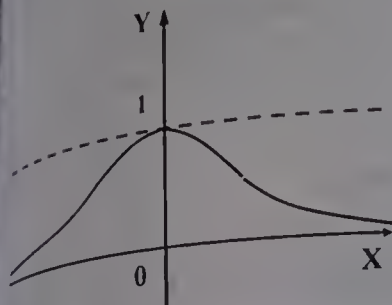
$$= \frac{1}{\sinh x}$$

que:

$$- [-1, 1]$$

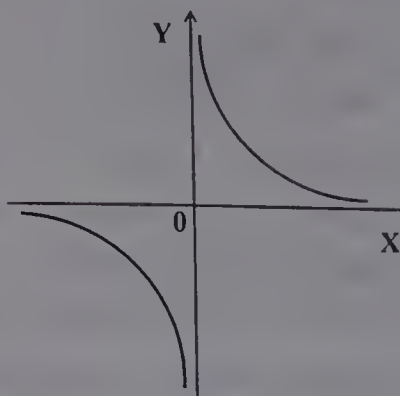
$$y = \operatorname{sech} x$$

$$\operatorname{Dom.} = \mathbb{R}, \operatorname{Rang.} = (0, 1]$$



$$y = \operatorname{cosech} x$$

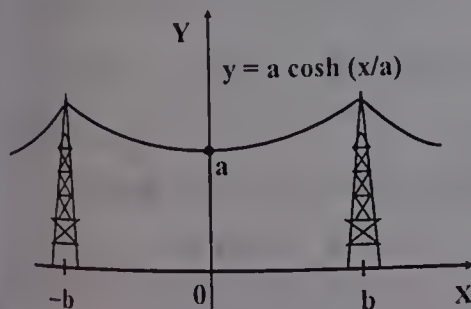
$$\operatorname{Dom.} = \mathbb{R} - \{0\}, \operatorname{Rang.} = \mathbb{R} - \{0\}$$



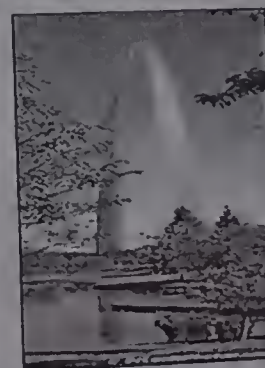
Una de las aplicaciones más conocidas de las funciones hiperbólicas es la descripción de la **catenaria** (de catena, palabra latina que significa cadena). La catenaria es la curva que forma un cable flexible suspendido de dos puntos a la misma altura. La ecuación de esta curva es  $y = a \cosh (x/a)$ .

El arco Gateway de San Luis, Missouri es una de las estructuras más notables y elegantes de los Estados Unidos. Da la falsa impresión que es un arco de parábola y que es más alto que ancho. En realidad es una catenaria al revés, hecha de acero inoxidable hueco, que tiene 630 pies de alto y 630 pies de ancho. Fue terminado en 1.965. El arco es 75 pies más alto que el monumento a Washington y 175 pies más alto que la Estatua de la Libertad. La ecuación de este arco es

$$y = 693,86 - (68,767) \cosh (3x/299)$$



La catenaria



Arco Gateway  
San Luis, Missouri  
Una catenaria invertida

Las funciones hiperbólicas se comportan de una manera muy similar a las funciones trigonométricas. Las siguientes identidades nos muestran parte de esta similitud.

# IDENTIDADES HIPERBOLICAS

## TEOREMA 4.3

Se cumple:

$$1. \sinh(-x) = -\sinh x$$

$$3. \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$5. 1 - \coth^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$$

$$6. \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$7. \sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$$

$$8. \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$9. \cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$10. \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

$$2. \cosh(-x) = \cosh x$$

$$4. 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$11. \cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

## Demostración

Estas igualdades siguen inmediatamente de la definición de las funciones hiperbólicas. Aquí sólo probaremos 3, 4 y 10. La igualdad 6 la probamos en el problema resuelto 3. Las otras, las dejamos como ejercicios al lector.

$$\begin{aligned} 3. \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{4e^x e^{-x}}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

4. Si en 3 dividimos entre  $\cosh^2 x$ , obtenemos:

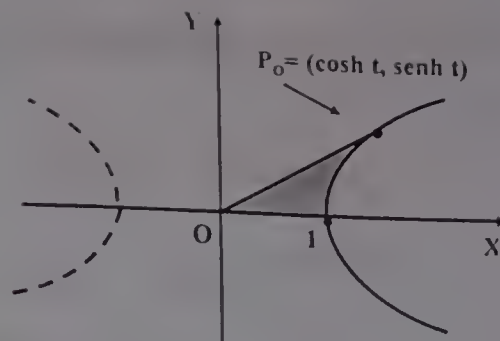
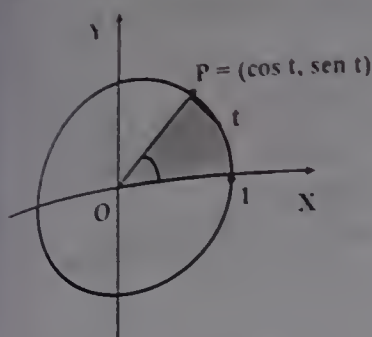
$$\frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \Rightarrow 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

10. De la identidad 3 obtenemos:  $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ . Reemplazando este valor de  $\cosh^2 x$  en 9:

$$\cosh(2x) = 1 + 2\sinh^2 x \Rightarrow \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

La identidad 3 nos permite comparar las funciones trigonométricas con las hiperbólicas. Tomamos la circunferencia (círculo trigonométrico)  $x^2 + y^2 = 1$ , la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$  y un número real  $t > 0$ .





El punto  $P = (\cos t, \sin t)$  se encuentra sobre el círculo trigonométrico, ya que  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ . En este caso,  $t$  puede interpretarse como la medida, en radianes, del ángulo  $POX$ .

Por otro lado, el punto  $P_0 = (\cosh t, \sinh t)$  está sobre la hipérbola, ya que de acuerdo a la identidad 3,  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ . En este caso,  $t$  no representa ningún ángulo. Sin embargo, existe una propiedad común para  $t$  en ambos casos: Se prueba que el área del sector circular determinado por  $t$  en el círculo trigonométrico es igual al área de la región sombreada en la figura de la hipérbola. Esta área común es  $A = \frac{t}{2}$ . Este resultado lo probaremos en el próximo curso.

### DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS

**TEOREMA 4.4** Si  $u = u(x)$  es una función diferenciable de  $x$ , entonces

1.  $D_x \sinh u = \cosh u D_x u$
2.  $D_x \cosh u = \sinh u D_x u$
3.  $D_x \tanh u = \operatorname{sech}^2 u D_x u$
4.  $D_x \coth u = -\operatorname{cosech}^2 u D_x u$
5.  $D_x \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u D_x u$
6.  $D_x \operatorname{cosech} u = -\operatorname{cosech} u \coth u D_x u$

#### Demostración

Probamos sólo 1 y 3. Las otras se prueban en forma análoga.

$$1. D_x \sinh x = D_x \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{D_x e^x - D_x e^{-x}}{2} = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} \\ = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$3. D_x \tanh x = D_x \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\cosh x D_x \sinh x - \sinh x D_x \cosh x}{\cosh^2 x} \\ = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

**EJEMPLO 1.** Si  $y = \ln \tanh 2x$ , probar que  $D_x y = 4 \operatorname{cosech} 4x$ .

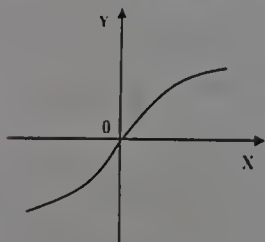
**Solución**

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x (\ln \tanh 2x) = \frac{D_x \tanh 2x}{\tanh 2x} = \frac{\operatorname{sech}^2 2x D_x 2x}{\tanh 2x} = \frac{2 \operatorname{sech}^2 2x}{\tanh 2x} \\ &= 2 \operatorname{sech}^2 2x \frac{1}{\tanh 2x} = 2 \frac{1}{\cosh^2 2x} \frac{\cosh 2x}{\sinh 2x} = 2 \frac{1}{\sinh 2x \cosh 2x} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{2} \sinh 4x} = \frac{4}{\sinh 4x} = 4 \operatorname{cosech} 4x \end{aligned}$$

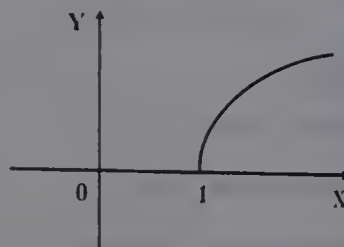
### FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS

Mirando las gráficas de las funciones hiperbólicas vemos que cuatro son inyectivas. Las no inyectivas son  $y = \cosh x$  e  $y = \operatorname{sech} x$ . De estas dos funciones, restringimos sus dominio a  $[0, +\infty)$  para lograr inyectividad. De este modo, conseguimos las funciones inversas de las seis funciones hiperbólicas. Aquí están las gráficas de estas inversas.

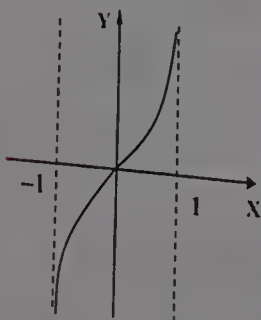
$$\sinh^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



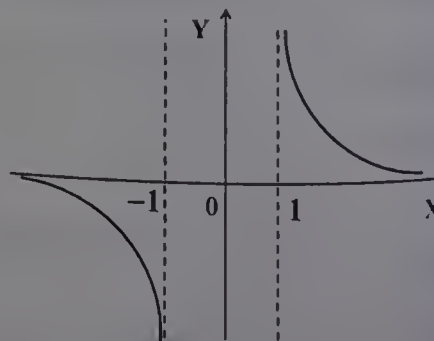
$$\cosh^{-1}: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$



$$\tanh^{-1}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$



$$\coth^{-1}: (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$



$$= 4 \operatorname{cosech} 4x.$$

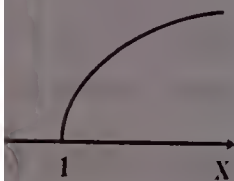
$$\frac{2x D_x 2x}{\sinh 2x} = \frac{2 \operatorname{sech}^2 2x}{\tanh 2x}$$

$$\frac{2x}{x} = 2 \frac{1}{\sinh 2x \cosh 2x}$$

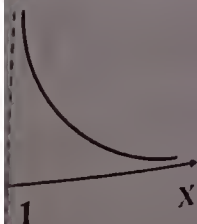
## INVERSA

as vemos que cuatro son  
x. De estas dos funciones.  
ectividad. De este modo,  
hiperbólicas. Aquí están las

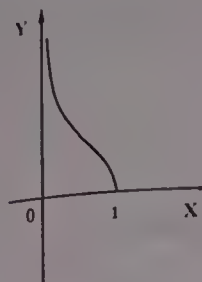
$$[1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$



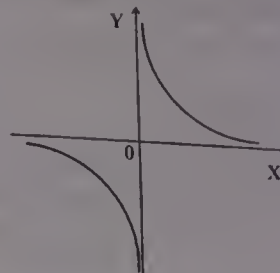
$$(1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$



$$\operatorname{sech}^{-1}: (0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$$



$$\operatorname{cosech}^{-1}: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$



El siguiente teorema nos presenta a las funciones hiperbólicas inversas en términos de la función logaritmo natural.

### TEOREMA 4.5

$$1. \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad 2. \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$$

$$3. \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1 \quad 4. \coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1$$

$$5. \operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad 0 < x \leq 1$$

$$6. \operatorname{cosech}^{-1} x = \ln \left( \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|} \right), \quad x \neq 0$$

### Demostración

Ver el problema resuelto 5.

## DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS

**TEOREMA 4.6** Si  $u = u(x)$  es una función diferenciable de  $x$ , entonces

$$1. D_x \sinh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} D_x u \quad 2. D_x \cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$$

$$3. D_x \tanh^{-1} u = \frac{1}{1 - u^2} D_x u \quad 4. D_x \coth^{-1} u = \frac{1}{1 - u^2} D_x u$$

$$5. D_x \operatorname{sech}^{-1} u = -\frac{1}{u \sqrt{1 - u^2}} D_x u \quad 6. D_x \operatorname{cosech}^{-1} u = -\frac{1}{|u| \sqrt{1 + u^2}} D_x u$$



### Demostración

Probaremos sólo 1, las otras se dejan como ejercicio para el lector.

1. Lo haremos de 2 formas.

#### Método 1

Si  $y = \sinh^{-1} x$ , entonces  $x = \sinh y$ .

Derivamos implícitamente respecto a  $x$  esta última igualdad:

$$D_x x = D_x \sinh y \Rightarrow 1 = \cosh y D_x y \Rightarrow D_x y = \frac{1}{\cosh y} \Rightarrow$$

$$D_x \sinh^{-1} x = \frac{1}{\cosh y} \quad (a)$$

Por otro lado, de la identidad  $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$  y de  $\cosh y \geq 0$  obtenemos que:

$$\cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + x^2}$$

Reemplazando este valor en (a) obtenemos lo deseado:

$$D_x \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

#### Método 2

De acuerdo a la igualdad 1 del teorema 4.5:

$$\begin{aligned} D_x \sinh^{-1} x &= D_x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} D_x (x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left( \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 2.** Si  $y = \operatorname{sech}^{-1}(\cos x)$ , hallar  $D_x y$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x \operatorname{sech}^{-1}(\cos x) = - \frac{1}{\cos x \sqrt{1 - \cos^2 x}} D_x \cos x \\ &= - \frac{1}{\cos x \sqrt{\sin^2 x}} (-\sin x) = \frac{1}{\cos x} = \sec x \end{aligned}$$

# PROBLEMAS RESUELTOS 4.5

**PROBLEMA 1.** Hallar la derivada de:

a.  $y = \tanh^{-1}(\tan x)$

b.  $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \coth^{-1}x + \frac{x}{2}$

Solución

$$a. D_x y = \frac{1}{1 - \tan^2 x} \sec^2 x = \frac{1}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x$$

$$b. D_x y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \frac{1}{1 - x^2} + x \coth^{-1}x + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + x \coth^{-1}x + \frac{1}{2} = x \coth^{-1}x$$

**PROBLEMA 2.**

Una línea eléctrica se sostiene sobre dos postes que están a 30 m. de distancia uno del otro. El cable toma la forma de la catenaria

$$f(x) = 25 \cosh(x/25) - 13$$

a. Hallar pendiente de la curva en el punto donde se encuentra con el poste derecho.

b. Hallar el ángulo  $\theta$  que forma la línea eléctrica con el poste.

Solución

a. Se tiene que:

$$f'(x) = 25 \sinh(x/25) \frac{1}{25} = \sinh(x/25)$$

La pendiente en el punto indicado es:

$$m = f'(15) = \sinh(15/25)$$

$$= \sinh(0,6) = \frac{e^{0,6} - e^{-0,6}}{2} = 0,6367$$

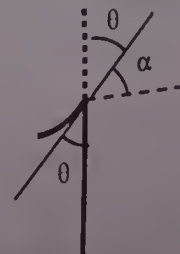
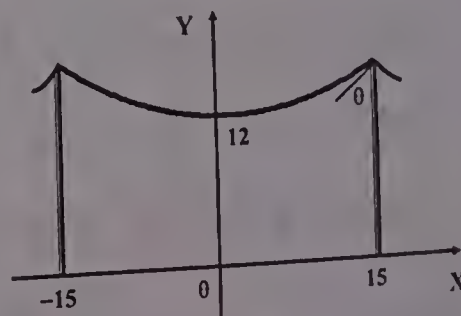
b. Si  $\alpha$  es el ángulo de inclinación de la recta

tangente en el punto indicado, entonces

$$\alpha = \tan^{-1}(0,6367) = 0,567 \text{ rad.} = \frac{180}{\pi}(0,567) = 32,48^\circ$$

Luego, el ángulo que forma la curva con el poste es:

$$\theta = 90^\circ - 32,48^\circ = 57,52^\circ$$



**PROBLEMA 3.** Probar las siguientes identidades:

a.  $\cosh x + \sinh x = e^x$

b.  $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

c.  $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

Solución

a.  $\cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x$

b.  $\cosh x - \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2e^{-x}}{2} = e^{-x}$

c.  $\sinh(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \frac{1}{2} [e^x e^y - e^{-x} e^{-y}]$

$$= \frac{1}{2} [(\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y) - (\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y)]$$

$$= \frac{1}{2} [2\sinh x \cosh y + 2\cosh x \sinh y]$$

$$= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

**PROBLEMA 4.** Probar las igualdades dadas en el teorema 4.5:

1.  $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$       2.  $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ,  $x \geq 1$

3.  $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ,  $|x| < 1$       4.  $\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ ,  $|x| > 1$

5.  $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$ ,  $0 < x < 1$

6.  $\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln \left( \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \right)$ ,  $x \neq 0$

Solución

Probamos 1, 3 y 6. Las otras tres se resuelven de manera análoga.

1. Sea  $y = \sinh x$ . Luego,  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . Despejamos  $x$  en términos de  $y$ :

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Rightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

Resolvemos esta ecuación de segundo grado:



$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Como,  $\sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{y^2} = y$ , tenemos  $y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$ ,  $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$ .

Como  $e^x > 0$ , escogemos la raíz positiva. Esto es,  $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ .

Tomando logaritmo:  $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

Cambiando de variables:  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

$$3. \text{ Sea } y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(e^x - e^{-x})/2}{(e^x + e^{-x})/2} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Despejamos  $x$  en términos de  $y$ :

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Rightarrow e^{2x} - 1 = y(e^{2x} + 1) \Rightarrow e^{2x} - 1 = ye^{2x} + y \Rightarrow$$

$$e^{2x} - ye^{2x} = 1 + y \Rightarrow e^{2x}(1 - y) = 1 + y \Rightarrow e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y}$$

Tomando logaritmo y luego, cambiando de variables:

$$2x = \ln \frac{1 + y}{1 - y} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

6. Sea  $y = \operatorname{cosech} x$ . Luego,

$$y = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{(e^x - e^{-x})/2} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

Despejamos  $x$  en términos de  $y$ :

$$y = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} \Rightarrow y(e^{2x} - 1) = 2e^x \Rightarrow ye^{2x} - 2e^x - y = 0 \Rightarrow$$

$$e^x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4y^2}}{2y} \Rightarrow e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + y^2}}{y}$$

Como  $e^x > 0$ , debemos escoger el valor positivo de  $\frac{1 \pm \sqrt{1 + y^2}}{y}$ . Para esto,

analizamos dos casos:  $y < 0$ ,  $y > 0$

Si  $y < 0$ , el cociente  $\frac{1 \pm \sqrt{1 + y^2}}{y}$  es positivo si el numerador es negativo. y esto

sucede cuando tomamos como numerador a  $1 - \sqrt{1 + y^2}$ . Luego,

$$e^x = \frac{1 - \sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{y} - \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{-y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{|y|}$$

Si  $y > 0$ , el cociente  $\frac{1 \pm \sqrt{1+y^2}}{y}$  es positivo si el numerador es positivo, y esto

sucede cuando tomamos como numerador a  $1 + \sqrt{1+y^2}$ . Luego,

$$e^x = \frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{|y|}$$

En cualquiera de los dos casos hemos conseguido que:

$$e^x = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{|y|}$$

Tomando logaritmo y cambiando de variables, obtenemos que

$$y = \ln \left( \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \right)$$

### PROBLEMAS PROPUESTOS 4.5

En los problemas del 1 al 10, hallar la derivada  $y' = D_x y$  de la función dada.

1.  $y = \tan^{-1}(\cosh x)$

2.  $y = e^{\sinh 2x}$

3.  $y = x^{\tanh x}, x > 0$

4.  $y = \frac{1}{2} \tanh \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \tanh^3 \frac{x}{2}$

5.  $y = e^{ax} \cosh bx$

6.  $y = 4 \sqrt{\frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}}$

7.  $y = (\operatorname{cosech}^{-1} x)^2$

8.  $y = \sinh^{-1} \frac{x^2}{a^2}$

9.  $y = \tanh^{-1}(\sec x)$

10.  $y = \tan^{-1} x + \tanh^{-1} x$

11. Probar las siguientes identidades dadas en el teorema 4.3:

a.  $\sinh(-x) = -\sinh x$     b.  $\cosh(-x) = \cosh x$     c.  $1 - \coth^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$

d.  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

$$\frac{y^2}{y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{|y|}$$

numerador es positivo, y esto

$y^2$ . Luego,

$$\frac{\sqrt{1+y^2}}{|y|}$$

que

5

y de la función dada.

$$\frac{1}{6} \tanh^3 \frac{x}{2}$$

$\frac{1}{x}$

$$\text{th}^2 x = -\text{cosech}^2 x$$

12. Probar las identidades:

a.  $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$

b.  $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$

c.  $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$

d.  $\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$

e.  $\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$

f.  $\sinh 3x = 3 \sinh x + 4 \sinh^3 x$

13. Probar las igualdades 2, 3, 4, 5 y 6 del teorema 4.5.

## SECCION 4.6

### RAZON DE CAMBIO

Razón de cambio es otro nombre que se le da a la derivada cuando ésta es vista como el límite de un cociente (razón) incremental. Por definición, si  $x_0$  es un punto del dominio de la función  $y = f(x)$ , entonces

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ donde } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ y } \Delta x = x - x_0$$

El incremento  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  mide el cambio experimentado por  $y = f(x)$  cuando cambia de  $x_0$  a  $x_0 + \Delta x$ . El cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

es la razón de cambio promedio de  $y$  respecto a  $x$ , cuando  $x$  cambia de  $x_0$  a  $x_0 + \Delta x$ . El límite de este cambio promedio cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  es la razón de cambio instantáneo de  $y$  respecto a  $x$  en  $x_0$ . Pero éste no es otra cosa que la derivada  $f'(x_0)$ . En resumen:

Si  $y = f(x)$ , la razón de cambio (instantánea) de  $y$  respecto a  $x$  en  $x_0$  es  $f'(x_0)$ .

Esta nueva interpretación de la derivada como una razón de cambio amplía el panorama de sus aplicaciones. El mundo en que vivimos es un mundo dinámico y cambiante. La población aumenta, los recursos naturales disminuyen, la inflación baja o sube, la producción baja o sube, etc. De estos fenómenos, que pueden ser cuantificados mediante una función, es importante conocer su correspondiente razón de cambio. Así, a un ingeniero le interesa saber la razón con que sale el agua de una represa; a un demógrafo o biólogo le interesa saber la tasa de crecimiento de una población (humana o de insectos); etc. Conocemos ya dos razones de cambio: la



velocidad y la aceleración. La velocidad es la razón de cambio de la distancia respecto al tiempo y la aceleración es la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo.

**EJEMPLO 1.**

- Sea  $V$  el volumen de un cubo de  $x$  cm. de arista. Esto es  $V = x^3$ .
- Hallar la razón de cambio promedio de  $V$  cuando  $x$  cambia de 5 a 5,1
  - Hallar la razón de cambio de  $V$  cuando  $x = 5$ .

**Solución**

- a. Tenemos que  $x_0 = 5$ ,  $\Delta x = 5,1 - 5 = 0,1$ . Luego,

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} = \frac{V(5 + 0,1) - V(5)}{0,1} = \frac{(5,1)^3 - 5^3}{0,1} = 76,51 \text{ cm}^3$$

- b. Nos piden  $V'(5)$ . Bien,

$$V'(5) = 3x^2 \Rightarrow V'(5) = 3(5)^2 = 75 \text{ cm}^3$$

En Economía se usa el término **marginal** para referirse a la razón de cambio. Así, el costo marginal es la razón de cambio (derivada) de la función costo.

**EJEMPLO 2.**

Una empresa estima que el costo de producir  $x$  artículos es

$$C(x) = 0,5x^2 + 6x + 2.000$$

- Hallar la función costo marginal.
- Hallar el costo marginal al nivel de producción de 100 artículos.

**Solución**

a.  $C'(x) = x + 6$

b.  $C'(100) = 100 + 6 = 106$

### RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

Supongamos que tenemos dos variables, digamos  $x$  e  $y$ , que ambas son funciones del tiempo:  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$  y que estas variables estén relacionadas mediante una ecuación  $F(x, y) = 0$ . Derivando implícitamente esta ecuación respecto al tiempo, se obtiene otra ecuación que relaciona las razones de cambio  $\frac{dx}{dt}$  y  $\frac{dy}{dt}$ . Por este motivo diremos que  $\frac{dx}{dt}$  y  $\frac{dy}{dt}$  son **razones de cambio relacionadas**. En esta situación, si se conoce una de ellas, es posible encontrar la otra.

### ESTRATEGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

Se sugiere los siguientes pasos en la solución de un problema de razones de cambio relacionadas. Estos pasos pueden tener variaciones ocasionales.

cambio de la distancia  
a velocidad respecto al

ista. Esto es  $V = x^3$ .  
cuando  $x$  cambia de

5.

$$\frac{3 - 5^3}{0,1} = 76,51 \text{ cm}^3$$

zón de cambio. Así,  
osto.

áticulos es

n de 100 artículos.

$$0 + 6 = 106$$

bas son funciones  
das mediante una  
ecto al tiempo, se

y  $\frac{dy}{dt}$ . Por este

onadas. En esta

DE

a de razones de  
les.

Paso 1. Construir una figura que ilustre el problema, indicando las constantes y las variables.

Paso 2. Identificar la información que se pide. Además, escribir los datos que se proporcionan.

Paso 3. Escribir las ecuaciones que relacionan a las variables y las constantes.

Paso 4. Derive (implícitamente) la ecuación hallada en el paso 3.

Paso 5. Sustitúyase, en la ecuación que resulta al derivar, todos los datos pertinentes al momento particular para el que se pide la respuesta.

### EJEMPLO 3.

Una bailarina de ballet de 1,60 m. de estatura se encuentra ensayando en una habitación que está alumbrada por un foco colocado en el centro a 4 m. de altura. Si en determinado instante la bailarina se aleja del centro a razón de 45 m/min. ¿A razón de cuántos metros por minuto crece su sombra en ese instante?

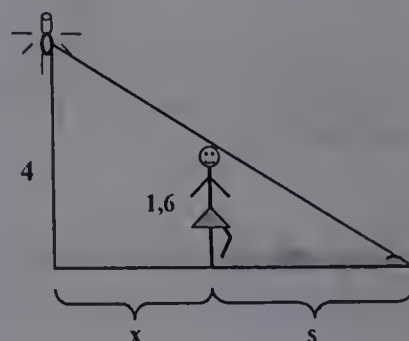
Solución

Paso 1. Construcción de una figura.

Paso 2. Identificar la información que se pide.  
Sea  $t_0$  el instante en el que la bailarina se aleja a 45 m/min. o sea cuando

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0} = 45 \text{ m/min.}$$

Se pide hallar  $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0}$ , donde  $s$  es la longitud de la sombra.



Paso 3. Por semejanza de triángulos se tiene que

$$\frac{s}{s+x} = \frac{1,6}{4} \Rightarrow s = \frac{2}{3}x \quad (1)$$

Paso 4. Derivamos la ecuación (1):  $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3} \frac{dx}{dt}$

Paso 5. En la ecuación anterior, tomando  $t = t_0$  se tiene:

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{2}{3} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0} \Rightarrow \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{2}{3} (45 \text{ m/min.}) = 30 \text{ m/min.}$$

Esto es, en el instante  $t_0$  la sombra crece a razón de 30 m/min.

En la práctica, los 5 pasos enunciados anteriormente, no se especifican, quedando sobreentendidos.

**EJEMPLO 4.**

Los extremos de una escalera de 5 m de longitud están apoyados sobre una pared vertical y sobre un piso horizontal. Si al empujarla por la base se logra que ésta se aleje de la pared a razón de 20 m/seg. ¿Con qué rapidez baja el extremo superior de la escalera cuando la base está a 3 m de la pared?

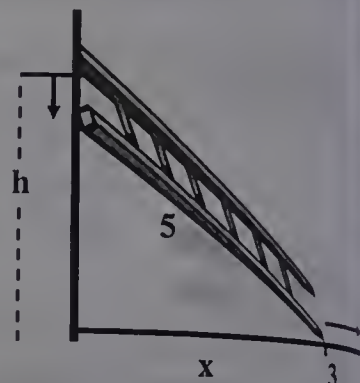
**Solución**

Sea  $x$  la distancia de la pared al extremo inferior de la escalera.

Sea  $h$  la altura desde el suelo al extremo superior de la escalera.

Nos piden hallar la rapidez con que baja el extremo superior de la escalera cuando la base está a 3 m de la pared. En otros términos, nos piden la razón de cambio de  $h$  respecto al tiempo cuando  $x = 3$ . Es decir, nos piden:

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{x=3}$$



Como dato nos dan la razón con que la base de la escalera se aleja de la pared. Es decir nos dan

$$\frac{dx}{dt} = 20/\text{seg}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$h^2 + x^2 = 5^2 \quad (1)$$

Derivamos implícitamente esta ecuación respecto a  $t$ . En la ecuación resultante, sustituimos los datos que son válidos para el momento en que  $x = 3$ .

$$2h \frac{dh}{dt} + 2x \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{x}{h} \frac{dx}{dt} \quad (2)$$

Pero,  $\frac{dx}{dt} = 20$  m/seg. Además, cuando  $x = 3$ , de (1) se tiene que

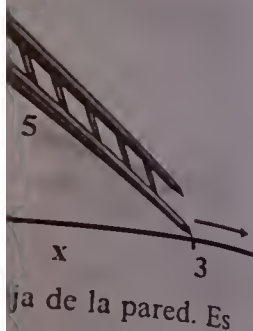
$$h = \sqrt{5^2 - x^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

Reemplazando estos valores en (2):

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{x=3} = -\frac{3}{4} (20 \text{ m/seg}) = -15 \text{ m/seg.}$$



gitud están apoyados  
ontal. Si al empujarla  
pared a razón de 20  
terior de la escalera

**EJEMPLO 5.**

Un avión vuela horizontalmente a una altura constante de 4 Km. y a una velocidad constante de 300 Km/hora. La trayectoria pasa por una estación de radar desde donde el operador observa al avión. Hallar la velocidad con que cambia el ángulo de inclinación  $\theta$  de la línea de observación en el instante en que la distancia horizontal del avión a la estación de radar es de 3 Km.

**Solución**

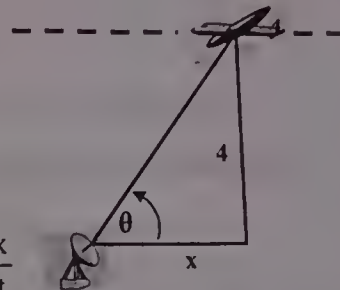
Sea  $x$  la distancia horizontal del avión al radar.

Se tiene que:

$$\cot \theta = \frac{x}{4}, \text{ o bien } \theta = \cot^{-1}(x/4)$$

Derivando respecto a  $t$ :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{1+(x/4)^2} \left( \frac{1}{4} \right) \frac{dx}{dt} = \frac{-4}{16+x^2} \frac{dx}{dt}$$



Nos dicen que  $\frac{dx}{dt} = -300$  Km/h, donde el signo negativo significa que la distancia  $x$  es decreciente.

Ahora, cuando  $x = 3$ :

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{x=3} = \frac{-4}{16+3^2} (-300) = 48 \text{ rad/h}$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 4.6

**PROBLEMA 1.**

Un barco navega con dirección norte a razón de 12 Km./h. Otro barco navega con dirección Este a 16 Km./h. El primero pasa por la intersección de las trayectorias a las 3.30 P. M. y el segundo a las 4 P. M. ¿Cómo está cambiando la distancia entre los barcos,

a. A las 3:30 P. M.?

b. A las 5 P. M.?

**Solución**

Comenzamos a computar el tiempo desde el instante en que el segundo barco pasa por la intersección de las trayectorias. Esto es,  $t = 0$  a las 4 PM. En este instante el primer barco se encuentra a  $12(1/2) = 6$  Km. al norte de la intersección. Después de transcurrir  $t$  horas el primer barco se encuentra a  $6 + 12t$  Km. de la intersección, y el segundo a  $16t$  Km.

Sea  $d(t)$  la distancia entre los barcos  $t$  horas después de las 4 P. M. Se tiene que a las 3:30 P. M.,  $t = -\frac{1}{2}$  y a las 5 P. M.,  $t = 1$ .

Se pide hallar:

a.  $d'(-1/2)$  y b.  $d'(1)$

Por Pitágoras se tiene que:

$$d^2(t) = (6 + 12t)^2 + (16t)^2 \Rightarrow$$

$$d^2(t) = 400t^2 + 144t + 36$$

Derivando la última ecuación con respecto al tiempo  $t$ :

$$2d(t) d'(t) = 800t + 144 \Rightarrow d'(t) = \frac{400t + 72}{\sqrt{400t^2 + 144t + 36}}$$

a. Ahora, a las 3:30 PM.  $t = -\frac{1}{2}$ . Luego

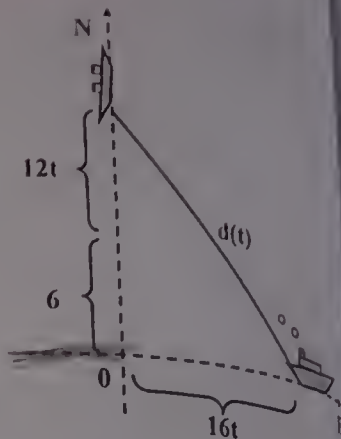
$$d'(-1/2) = \frac{400(-1/2) + 72}{\sqrt{400(-1/2)^2 + 144(-1/2) + 36}} = -16 \text{ Km./h.}$$

Esto es, a las 3:30 PM. la distancia entre los barcos está cambiando a razón de  $-16$  Km./h. (el signo negativo significa que en el instante dado la distancia está decreciendo).

b. A las 5 P. M.  $t = 1$ . Luego,

$$d'(1) = \frac{400(1) + 72}{\sqrt{400(1)^2 + 144(1) + 36}} = 19,60 \text{ Km./h.}$$

A las 5 P. M. la distancia entre los barcos está cambiando a razón de  $19,60$  Km./h.



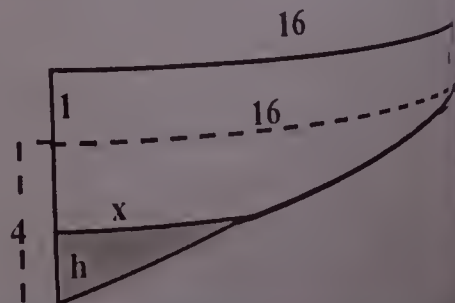
### PROBLEMA 2.

Una piscina tiene 16 m. de largo, 12 m. de ancho y una profundidad de 1 m. en un extremo y 5 m. en el otro, teniendo como fondo un plano inclinado. Se vierte agua en la piscina a razón de  $4 \text{ m}^3/\text{min}$ . ¿Con qué velocidad se eleva el nivel de agua cuando éste es de 1 m. en el extremo más profundo?

Solución

Sea  $h$  el nivel del agua y sea  $x$  el largo de la superficie del agua cuando está a nivel  $h$ . Se pide encontrar

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=1}$$



Además, si  $V$  es el volumen del agua en la piscina, nos dicen que éste está creciendo a razón de  $4 \text{ m}^3/\text{min}$ . Esto es, nos dicen que

$$\frac{dV}{dt} = 4 \text{ m}^3/\text{min}.$$

Bien, por semejanza de triángulos:

$$\frac{x}{16} = \frac{h}{4} \Rightarrow x = 4h \quad (1)$$

Por otro lado, el volumen del agua de la piscina es:

$$V = \frac{xh}{2}(12) = 6xh$$

Reemplazando (1) en esta igualdad:  $V = 24h^2$

Derivando esta ecuación respecto a  $t$ :  $\frac{dV}{dt} = 48h \frac{dh}{dt}$

Recordando que  $\frac{dV}{dt} = 4 \text{ m}^3/\text{min}$ . y particularizándola para  $h = 1$ , se tiene:

$$4 = 48(1) \left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=1} \Rightarrow \left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=1} = \frac{1}{12}$$

El nivel del agua, cuando éste está a 1 m. de altura, crece a razón de  $1/12 \text{ m/min}$ .

zón de -16  
ancia está

### PROBLEMA 3.

Un ciclista está corriendo en una pista circular a razón de  $360 \text{ m/min}$ . En el centro de la pista alumbra un foco el cual proyecta la sombra del ciclista sobre una pared que es tangente a la pista en un punto  $P$ . ¿Con qué velocidad se mueve la sombra en el instante en que el ciclista ha recorrido  $1/12$  de la pista desde  $P$ ?

#### Solución

Sean:

$r$  = el radio de la pista

$s$  = la longitud del recorrido del ciclista a partir del punto  $P$ .

$S$  = la longitud del recorrido de la sombra sobre la pared.

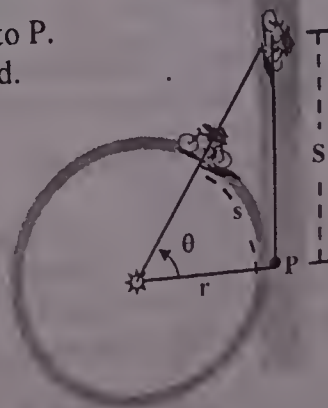
Nos piden  $\frac{dS}{dt}$  cuando  $s = \frac{1}{12}$  de la pista desde  $P$ ,

y nos dicen que  $\frac{ds}{dt} = 360 \text{ m/min}$ .

Se tiene que:

$$0 = \frac{s}{r} \text{ radianes, } S = r \tan \theta \Rightarrow S = r \tan \left( \frac{s}{r} \right)$$

Derivando la última ecuación respecto a  $t$ :



6 Km./h.

ho y una  
teniendo  
piscina a  
nivel del  
do?



$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= r \sec^2\left(\frac{s}{r}\right) \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{r}\right) = r \left(\frac{1}{r}\right) \sec^2\left(\frac{s}{r}\right) \frac{ds}{dt} \\ &= \sec^2\left(\frac{s}{r}\right) \frac{ds}{dt} \quad (1)\end{aligned}$$

Pero, cuando  $s = \frac{1}{12}$  de la pista desde P se tiene que:

$$s = \frac{1}{12} (2\pi r) = \frac{1}{6} \pi r \Rightarrow \frac{s}{r} = \frac{\pi}{6}$$

Luego, cuando  $s = \frac{1}{12}$  de la pista, de (1), se tiene:

$$\frac{dS}{dt} = \sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right) (360) = \left(2/\sqrt{3}\right)^2 (360 \text{ m/min}) = 480 \text{ m/min.}$$

#### PROBLEMA 4.

Un abrevadero tiene 10 pies de largo y tiene por extremos dos trapecios de 4 pies de altura y bases de 4 pies y 8 pies. Se vierte agua al abrevadero a razón de 24 pies<sup>3</sup>/min. ¿Con qué rapidez crece el nivel del agua cuando el agua tiene 2 pies de profundidad?

#### Solución

Sean:

$h$  = altura del agua en el instante  $t$  ( $t$  en minutos)

$b$  = el ancho de la superficie del agua al nivel  $h$ .

$V$  = el volumen del agua cuando ésta tiene nivel  $h$ .

Nos piden  $\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=2}$

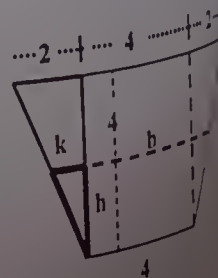
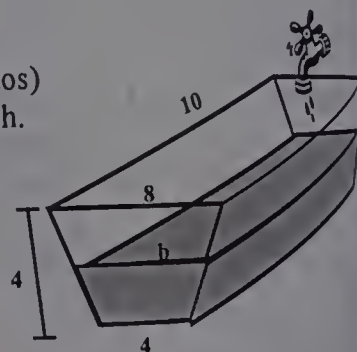
Nos dicen que  $\frac{dV}{dt} = 24 \text{ pies}^3/\text{min.}$

Halleemos  $V$ . Sabemos que  $V = 10A$ , donde  $A$  es el área de una cara lateral. Como esta cara es un trapecio, se tiene

$$A = \frac{1}{2}(b+4)h \quad (1)$$

Sacamos aparte el trapecio que conforma la cara del frente, al cual lo hemos agrandado para obtener una mejor visualización. Los dos triángulos remarcados son semejantes. Luego,

$$\frac{k}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow k = \frac{h}{2}$$



ten p. del 40 que  $k = \frac{h-4}{2}$ . Luego,

$$\frac{h-4}{2} = \frac{h}{2} \Rightarrow h = h + 4$$

Reemplazando este valor  $h$  en (1) obtenemos:  $A = \frac{1}{2}(h+4+4)h = \frac{1}{2}(h+8)h$   
Entonces, el volumen del agua es

$$V = 10\left(\frac{1}{2}(h+8)h\right) = 5h^2 + 40h$$

Derivando respecto a  $t$

$$\frac{dV}{dt} = (10h + 40) \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{10h + 40} \frac{dV}{dt}$$

Reemplazando cuando  $h = 2$

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=2} = \frac{1}{10(2) + 40} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=2} = \frac{1}{60} (24 \text{ pies}^3 / \text{min}) = 0,4 \text{ pies}^3 / \text{min}.$$

**PROBLEMA 5.** Un tanque tiene la forma de un cono invertido de 8 m de radio y 24 m de altura. Se vierte agua al tanque a razón de 40 m<sup>3</sup>/hora y a la vez se saca agua para regar. El nivel del agua está subiendo a razón de 4 m/hora cuando éste tiene 3 m de altura. ¿Con qué rapidez sale el agua en ese instante?

**Dados:**

1-  $t$

2- el tiempo medido en horas.

3- el radio  $r$  en metros de la superficie del agua en el instante  $t$ .

4- la altura del nivel del agua.

5- el volumen del agua en el instante  $t$ .

6- la cantidad de agua que ha salido  
del tanque en el instante  $t$ .

Se pide hallar  $\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=3}$

Se tiene que  $\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=3} = 4 \text{ m/hora}.$

Se sabe que:



Razón de cambio de  $V$  = Razón de entrada del agua - Razón de salida

Esto es,

$$\frac{dV}{dt} = 40 - \frac{dS}{dt} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 40 - \frac{dV}{dt} \Rightarrow \left. \frac{dS}{dt} \right|_{h=3} = 40 - \left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=3} \quad (1)$$

Pero, el volumen del agua es

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (2)$$

Por semejanza de triángulos se tiene

$$\frac{r}{h} = \frac{8}{24} \Rightarrow r = \frac{1}{3} h \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2):  $V = \frac{1}{27} \pi h^3$

Derivando respecto a  $t$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{9} \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

En particular, cuando  $h = 3$ , se tiene

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=3} = \frac{1}{9} \pi h^2 \left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=3} = \frac{1}{9} \pi (3)^2 (4 \text{ m/hora}) = 4\pi \text{ m}^3/\text{hora}$$

Reemplazando este resultado en (1):

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{h=3} = 40 - \left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=3} = 40 - 4\pi \approx 27,43 \text{ m}^3/\text{h}.$$

#### PROBLEMA 6.

Se tiene un tanque semiesférico de 5 m. de radio, el cual está lleno de agua. Se comienza a vaciar el tanque abriendo una pluma situada en el fondo. Por la pluma salen 3.500 litros/hora. ¿Con qué velocidad baja el nivel del agua cuando éste tiene 1,25 m. de altura? Se sabe que el volumen de un casquete esférico de altura

$$h \text{ en una esfera de radio } r \text{ es } V = \pi r h^2 - \frac{1}{3} \pi h^3.$$

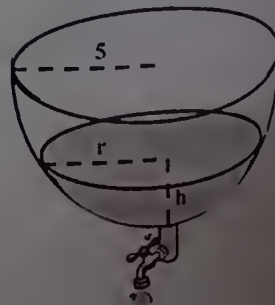
**Solución**

Nos piden hallar  $\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=1,25}$

Sabemos que  $3.500 \text{ litros/h} = 3,5 \text{ m}^3/\text{h}$

Nos dicen que  $\frac{dV}{dt}$  es constante y que

$$\frac{dV}{dt} = 3.500 \text{ litros/h} = -3,5 \text{ m}^3/\text{h}.$$



El volumen de

Derivamos es

$$\frac{dV}{dt}$$

En esta últim

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=1,25}$$

#### PROBLEMA

**Solución**

Sea  $T$  el p  
a la sombra  $S$   
La pelota

O sea, la  
después de

Nos piden

Los trián  
Luego,

Pero,  $h =$

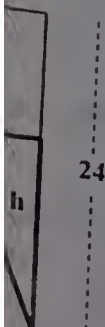
En cons

Del



salida

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=3} \quad (1)$$



24

3/hora

/h.

lio, el cual está  
endo una pluma  
hora. ¿Con qué  
ne 1,25 m. de  
férico de altura

El volumen de agua, tomando en cuenta que  $r = 5$  m, es

$$V = 5\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$$

Derivamos esta función respecto al tiempo  $t$  ( $t$  en horas)

$$\frac{dV}{dt} = 10\pi h \frac{dh}{dt} - \pi h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h(10-h)} \frac{dV}{dt}$$

En esta última igualdad, particularizando para  $h = 1,25$ , tenemos:

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=1,25} = \frac{1}{\pi(1,25)(10-1,25)} (-3,5) \approx -0,1019 \text{ m/h.}$$

### PROBLEMA 7.

Un bombillo ilumina desde el extremo superior de un poste de 48 pies de altura. Desde un punto situado a 64 pies de altura se suelta una pelota de acero, cuya trayectoria está a 15 pies de distancia del bombillo. Hallar la velocidad con que se mueve la sombra de la pelota en el instante en que ésta golpea el piso. La posición de la pelota, después de  $t$  segundos, es  $s = 16t^2$ .

**Solución**

Sea  $T$  el punto donde la pelota golpea el piso. Sea  $x$  la distancia desde el punto  $T$  a la sombra  $S$ .

La pelota golpea el suelo cuando

$$s = 64 \Rightarrow 16t^2 = 64 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = 2$$

O sea, la pelota golpea el suelo 2 seg.

después de soltarla.

Nos piden hallar:  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=2}$

Los triángulos  $STP$  y  $BAP$  son semejantes. Luego,

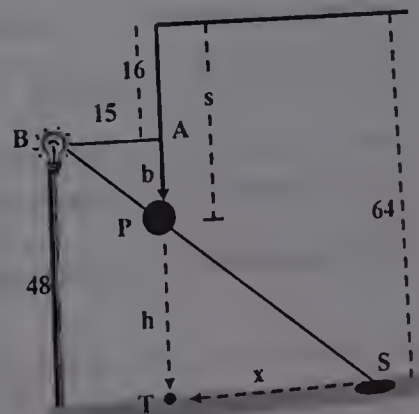
$$\frac{x}{15} = \frac{h}{b} \Rightarrow x = 15 \frac{h}{b}$$

Pero,  $h = 64 - s$  y  $b = s - 16$ .

En consecuencia,

$$x = 15 \frac{64 - s}{s - 16}$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo,



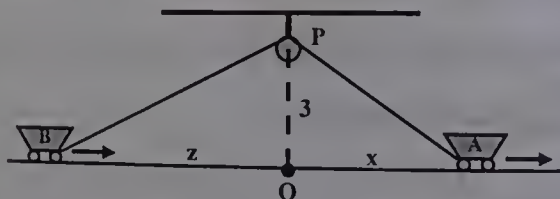
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 15 \frac{(s-16) \left( -\frac{ds}{dt} \right) - (64-s) \left( \frac{ds}{dt} \right)}{(s-16)^2} = -15 \frac{48}{(s-16)^2} \frac{ds}{dt} \\ &= -15 \frac{48}{(16t^2-16)^2} (32t) = -15 \frac{48}{(16)^2 (t^2-1)^2} (32t) = -\frac{90t}{(t^2-1)^2}\end{aligned}$$

Ahora, para  $t = 2$  se tiene

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=2} = -\frac{90(2)}{(2^2-1)^2} = -20 \text{ pies/seg.}$$

**PROBLEMA 8.**

Un cable de 14 metros de longitud que pasa por una polea P y enlaza dos carritos. El punto O está en el suelo, directamente debajo de la polea y a 3 metros de ésta. El carrito A es halado alejándolo del punto O a una velocidad de 40 m/min. ¿Con qué velocidad se acerca el carrito B al punto O en el instante en que el carrito A está a 4 metros de O.

**Solución**

Sean  $x$  y  $z$  las distancias de los carritos A y B al punto O, respectivamente.

Nos dicen que  $\frac{dx}{dt} = 40$  m/min y nos piden  $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{x=4}$

Los carritos A y B, el punto O y la polea P forman dos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas están cubiertas por el cable.

Las longitudes de las hipotenusas son  $\sqrt{z^2 + 3^2}$  y  $\sqrt{x^2 + 3^2}$ . Luego,

$$\sqrt{z^2 + 9} + \sqrt{x^2 + 9} = 14 \quad (1)$$

Derivando respecto a  $t$ :

$$\frac{2z}{2\sqrt{z^2+9}} \frac{dz}{dt} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -\frac{x\sqrt{z^2+9}}{z\sqrt{x^2+9}} \frac{dx}{dt} \quad (2)$$

Si  $x = 4$ , de (1) obtenemos:

$$\frac{ds}{dt}$$

$$) = -\frac{90t}{(t^2 - 1)^2}$$

$$\sqrt{z^2 + 9} + \sqrt{4^2 + 9} = 14 \Rightarrow \sqrt{z^2 + 9} + 5 = 14 \Rightarrow \sqrt{z^2 + 9} = 9 \Rightarrow z = 6\sqrt{2}$$

Luego, reemplazando  $x = 4$  e  $z = 5\sqrt{2}$  en (2)

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{x=4} = -\frac{4(9)}{6\sqrt{2}(5)} (40 \text{ m/min}) = -\frac{48}{\sqrt{2}} = -24\sqrt{2} \approx -33,94 \text{ m/min}$$

El signo negativo de la velocidad anterior significa que distancia del carrito B al punto O es decreciente.

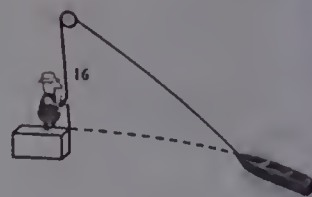
### PROBLEMAS PROPUESTOS 4.6

- El consumo anual de gasolina de cierto país es  $C(t) = 32,8 + 0,3t + 0,15t^2$  donde  $C(t)$  es dado en millones de litros y  $t$  es dado en años computados al iniciarse el año 2.004. Hallar la tasa de consumo anual al iniciarse el año 2.010.
- Se ha determinado que dentro de  $t$  años la población de una comunidad será de  $P(t) = 12 - \frac{20}{t+3}$  miles de habitantes. Hallar:
  - La tasa de crecimiento después de 7 años.
  - La tasa porcentual después de 7 años (tasa porcentual =  $100 \frac{P'(t)}{P(t)}$ ).
- Se arroja una piedra a un estanque y produce olas circulares cuyos radios crecen a razón de 0,5 m/seg. Hallar la razón con que aumenta el área del círculo encerrado por una ola cuando el radio de ésta es de 3 m.
- Un tanque de agua tiene la forma de un cono invertido de 15 m. de altura y 5 m. de radio. Si se le está llenando de agua a razón de  $6\pi \text{ m}^3$  por minuto. ¿Con qué rapidez crece el nivel del agua cuando éste tenga 6 m. de profundidad?
- Los extremos de una escalera de 20 m. están apoyados sobre una pared vertical y un piso horizontal. Si el extremo inferior de la escalera se aleja de la pared a una velocidad de 6 m/min. ¿A qué velocidad se mueve el extremo superior cuando la parte inferior está a 12 m. de la pared?
- Un barco navega con dirección Norte a razón de 6 Km./h. Otro barco navega con dirección Este a 8 Km./h. A las 11 A. M. el segundo barco cruzó la ruta del primero en un punto en el cual éste pasó 2 horas antes. ¿Cómo está cambiando la distancia de los barcos a las 10 A. M.?
- Desde la parte superior de un poste de 7,2 m. alumbra un bombillo. Un policía de 1,80 m. de altura se aleja caminando desde el poste, a una velocidad de 48 m/min. ¿Con qué velocidad crece su sombra?

(2)

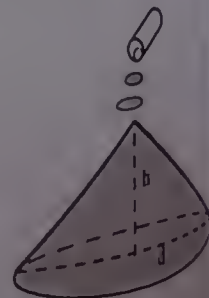


8. Se estaciona un bote en el muelle halándolo con una polea que está a 16 pies encima de la cubierta del bote. Si la polea enrolla la cuerda a razón de 48 pies/min., hallar la velocidad del bote cuando quedan 20 pies de cuerda.



9. Una partícula se mueve sobre la parábola  $y = x^2 + 6x$ . Hallar la posición de la partícula cuando la razón de cambio de la coordenada  $y$  es 4 veces la razón de cambio de la coordenada  $x$ .
10. Cada lado de un triángulo equilátero mide  $x$  cm. y aumenta a razón de 10 cm./min. ¿Con que rapidez aumenta el área del triángulo cuando  $x = 20$  cm.?
11. Las dimensiones de un cilindro circular recto están variando. En un cierto instante, el radio y la altura son 8 cm. y 20 cm., respectivamente. Si el volumen permanece constante y el radio aumenta a razón de 3 cm./seg., hallar la variación de la altura en ese instante.
12. El gas de un globo esférico se escapa a razón de 360 pies<sup>3</sup>/min. Hallar:
- La rapidez con que disminuye el radio en el instante en que éste es de 3 pies.
  - La rapidez con que disminuye el área de la superficie en el instante en que el radio es de 3 pies. Se sabe que el área de la superficie esférica es  $S = 4\pi r^2$ .
13. Sean  $V$ ,  $S$  y  $r$  el volumen, el área de la superficie y el radio de una esfera respectivamente. Probar que:  $\frac{dV}{dt} = \frac{r}{2} \frac{dS}{dt}$ . Se sabe que:  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$  y  $S = 4\pi r^2$ .
14. En cada uno de los extremos de un cilindro circular recto de radio  $r$  y altura  $h$  se coloca una semiesfera de radio  $r$ . El radio aumenta a razón de 0,5 m/min. Si el volumen permanece constante, hallar la razón de variación de la altura en el instante en que  $r = 4$  m. y  $h = 6$  m.
15. Un avión vuela horizontalmente a una altura constante de 900 m. de altura y con velocidad constante. La trayectoria pasa sobre una estación de radar desde donde el operador observa el avión. Cuando el ángulo de inclinación de la línea de observación es de  $\pi/3$ , este ángulo está cambiando a razón de  $\frac{1}{45}$  rad/seg. Hallar la velocidad del avión.

16. En una planta de materiales de construcción una cinta transportadora deposita arena en el piso a razón de 3 m<sup>3</sup>/min. La arena forma un cono cuyo diámetro de la base es 3 veces la altura. Hallar con que rapidez cambia la altura del cono cuando ésta es de 2 m.



17. Un tanque un triángulo tanque nivel Sugere altura mitad

18. Una ancho unifor dista horiz pisci m<sup>3</sup>/t agua de la

19. Un trun m. raze el r de Re

20. Un lad a l Ha la en

21. Un E ra de es

22. U in co 2 H P l

la posición de la  
veces la razón de

a a razón de 10  
x = 20 cm.?

lo. En un cierto  
te. Si el volumen  
hallar la variación

hallar:

e es de 3 pies.

stante en que el  
s  $S = 4\pi r^2$ .

de una esfera

$r^3$  y  $S = 4\pi r^2$ .

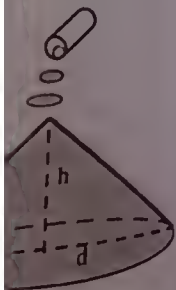
r y altura h se

5 m/min. Si el  
a altura en el

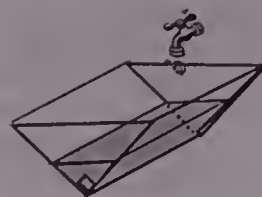
e altura y con

r desde donde  
e la línea de

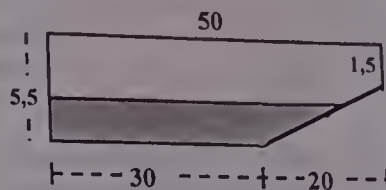
d/seg. Hallar



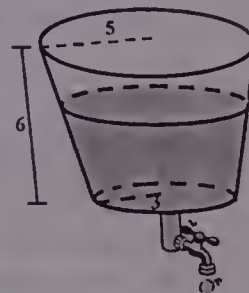
17. Un tanque tiene 5 m. de largo. Su sección transversal es un triángulo rectángulo isósceles. Se vierte agua al tanque a razón de  $15 \text{ m}^3/\text{hora}$ . ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando éste tiene 0,5 m. de profundidad? Sugerencia: En un triángulo rectángulo isósceles, la altura correspondiente al ángulo recto es igual a la mitad de la hipotenusa.



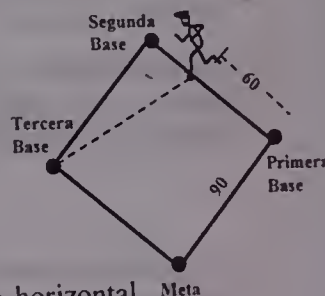
18. Una piscina tiene 50 m. de largo, 25 m. de ancho y su profundidad aumenta uniformemente de 1,5 m. a 5,5 m. en una distancia horizontal de 20 m., continuando horizontalmente los 30 m. restantes. La piscina se está llenando a razón de  $120 \text{ m}^3/\text{hora}$ . ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua en el instante en que éste está a 3 m. de la parte más profunda?



19. Un tanque tiene la forma de un cono circular recto truncado de 6 m. de altura, de 5 m. de radio mayor y 3 m. de radio menor. El tanque se está desaguando a razón de  $16,9\pi \text{ m}^3/\text{hora}$ . Hallar la rapidez con que baja el nivel del agua cuando éste tiene 4 m. El volumen  $V$  de un cono circular recto truncado de altura  $h$  radios  $r$  y  $R$  en los extremos es  $V = \frac{\pi}{3} h(r^2 + R^2 + rR)$

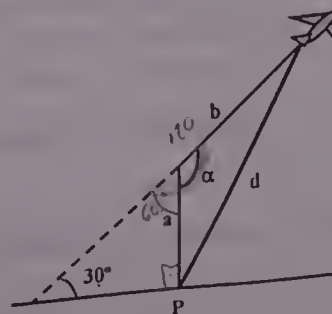


20. Un campo de béisbol es un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador está corriendo de la primera base a la segunda con una velocidad de 17 pies/seg. Hallar la velocidad con que se acerca el jugador a la tercera base en el instante en que éste se encuentra a 60 pies de la primera base.



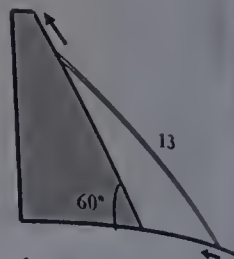
21. Un edificio de 60 m. proyecta su sombra sobre el piso horizontal. El ángulo que forman los rayos solares con el piso disminuye a razón de  $15^\circ$  por hora. En determinado instante del día la sombra del edificio es de 80 m. Hallar la razón en que cambia la sombra en ese instante.

22. Un avión se eleva con un ángulo de inclinación de  $30^\circ$  y a una velocidad constante de  $600 \text{ Km./hora}$ . El avión pasa a 2 Km. por encima de un punto  $P$  en el suelo. Hallar la razón de cambio de la distancia de  $P$  al avión 1 minuto más tarde. Sugerencia: ley de los cosenos,  $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ .



266

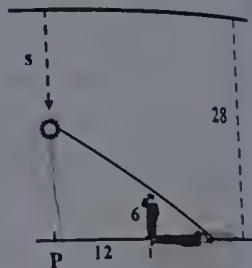
23. Una escalera de 13 m. de longitud está apoyada sobre un talud inclinado a  $60^\circ$  respecto de la horizontal. La base es empujada hacia el talud a razón de 2,9 m/seg. Hallar la rapidez con que se desplaza el extremo superior de la escalera cuando la base está a 5 m. del talud. Sugerencia: Ver la ley de los cosenos en el problema anterior.



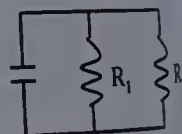
24. Un faro está situado a 2 Km. de una playa recta y su luz gira a razón de 2 revoluciones por minuto. Hallar la rapidez con que se mueve el rayo de luz a lo largo de la playa en el momento en que éste pasa por un punto situado a 1 Km del punto frente al faro.

25. Un bombillo alumbra desde el extremo superior de un poste de 60 pies de altura. Desde un punto situado a la misma altura se suelta una pelota de acero, cuya trayectoria está a 20 pies de distancia del bombillo. Hallar la velocidad con que se mueve la sombra 0,5 segundo después de soltarla. Recordar que la posición de la pelota, después de  $t$  segundos, es  $s = 16t^2$ .

26. Un policía de 6 pies de altura está haciendo guardia a 12 pies del punto P que está directamente debajo de una lámpara que cuelga a 28 pies sobre el suelo. La lámpara comienza a caer por lo cual la sombra del policía comienza a crecer. Se sabe que la longitud de la trayectoria de la linterna es  $s = 16t^2$  pies en  $t$  segundos. ¿Con qué velocidad crece la sombra cuando  $t = 1$ ?



27. Dos resistencias,  $R_1$  y  $R_2$ , están conectadas en paralelo, como indica la figura. Se sabe que la resistencia total  $R$  es tal que:



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$R_1$  cambia a razón de 0,5 ohms/seg y  $R_2$  cambia a razón de 0,3 ohms/seg. ¿Cómo cambia  $R$  cuando  $R_1 = 60$  ohms y  $R_2 = 80$  ohms?

28. Sabiendo que un trozo de hielo esférico se derrite a una razón proporcional al área de su superficie,

a. Probar que la razón con que se contrae su radio es constante.

b. Si, además se sabe que después de una hora el hielo que queda es un  $1/8$  de la cantidad inicial, hallar el tiempo que tardará en derretirse completamente. Sugerencia: Si  $r_0$  es el radio inicial y  $\frac{dr}{dt} = k$ , entonces

$$r = kt + r_0.$$



## SECCION 4.7

### APROXIMACIONES LINEALES Y DIFERENCIALES

#### APROXIMACION LINEAL

Sea  $y = f(x)$  una función diferenciable en  $a$ . La recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  tiene por ecuación:

$$L: y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Comparando la gráfica de  $f$  y la recta tangente observamos que, para los  $x$  cercanos a  $a$ , los puntos  $(x, f(x))$  de la gráfica de  $f$  están próximos a los puntos  $(x, f(a) + f'(a)(x - a))$  de la recta tangente. Por consiguiente, para los puntos  $x$  próximos a  $a$ , se cumple que:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (1)$$

A esta aproximación se le llama **aproximación lineal** o **aproximación tangencial** de  $f$  en  $a$  y la función lineal

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (2)$$

es la **linearización** de  $f$  en  $a$ .

**EJEMPLO 1.** a. Hallar la linearización de la función  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $x = 4$

b. Usar la linearización encontrada para aproximar:

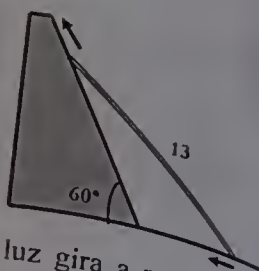
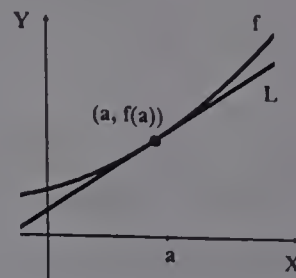
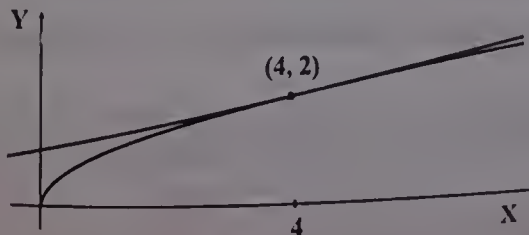
$$\sqrt{3,95} \quad \text{y} \quad \sqrt{4,02}$$

**Solución**

a. Buscamos:  $L(x) = f(4) + f'(4)(x - 4)$ . Se tiene:

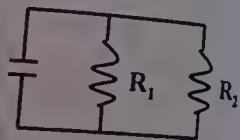
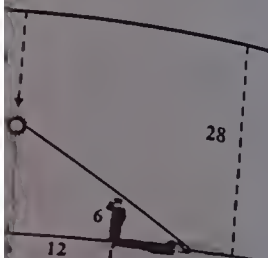
$$f(4) = \sqrt{4} = 2 \quad \text{y} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Luego, la linearización buscada es: } L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) = \frac{x}{4} + 1$$



su luz gira a razón de 2  
mueve el rayo de luz a lo  
un punto situado a 1 Km.

oste de 60 pies de altura.  
na pelota de acero, cuya  
lar la velocidad con que  
ecordar que la posición



n de 0,3 ohms/seg,

proporcional al

nte.  
queda es un 1/8 de  
rá en derretirse

$$\frac{dr}{dt} = k, \text{ entonces}$$

b. La aproximación lineal es  $\sqrt{x} \approx \frac{x}{4} + 1$ . Luego,

$$\sqrt{3,94} \approx \frac{3,94}{4} + 1 = 0,985 + 1 = 1,985$$

$$\sqrt{4,02} \approx \frac{4,02}{4} + 1 = 1,005 + 1 = 2,005$$

Mi calculadora dice que  $\sqrt{3,94} = 1,984943324$  y que  $\sqrt{4,02} = 2,004993766$

### DIFERENCIALES

Sea  $y = f(x)$  una función diferenciable. Según la notación de Leibniz, el símbolo  $\frac{dy}{dx}$  representa a la derivada de  $y$  respecto a  $x$ . Ahora introducimos el concepto de diferencial que dará significado propio tanto a  $dx$  como a  $dy$  en tal forma que  $\frac{dy}{dx}$  pueda ser vista como un cociente de  $dy$  sobre  $dx$ .

Si  $\Delta x$  es cualquier incremento de  $x$ , entonces

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (3)$$

es el correspondiente incremento de  $y$ . Sabemos que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Luego, si  $\Delta x$  es pequeño, la razón incremental  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  es una aproximación a la

derivada  $f'(x)$ . Este hecho lo expresamos así  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$ . De aquí obtenemos:

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x \quad (4)$$

Esta expresión nos dice que cuando  $\Delta x$  es pequeño, la expresión  $f'(x)\Delta x$  está próximo al incremento de  $\Delta y$ . Por este motivo es conveniente fijar la atención en esta expresión. A continuación le damos un nombre y nos ocupamos de ella.

**DEFINICION.** Sea  $y = f(x)$  una función diferenciable y  $\Delta x$  un incremento de  $x$ . Llamaremos:

a. Diferencial de  $x$ , denotada por  $dx$ , es el incremento  $\Delta x$ . Esto es,

$$dx = \Delta x$$

b. Diferencial de  $y$ , denotada por  $dy$  o  $df$ , a

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

Notar que  $dy$  es función de dos variables,  $x$  y  $\Delta x$ .

**EJEMPLO 2.**Si  $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ , hallara.  $dy$ b. Evaluar  $dy$  cuando  $x = 2$  y  $dx = 0,03$ 

Solución

$$a. \quad dy = \frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + x + 3) dx = (3x^2 - 4x + 1) dx$$

$$= 2,004993766$$

b. Cuando  $x = 2$  y  $dx = 0,03$ , se tiene

$$dy = [3(2)^2 - 4(2) + 1] 0,03 = 0,15$$

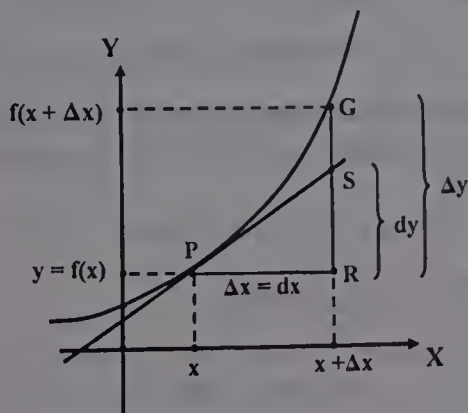
**OBSERVACION.**

Si en  $dy = f'(x) dx$  exigimos que  $dx \neq 0$ , podemos dividir ambos lados por  $dx$  para obtener  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ . Esto nos dice

que el símbolo  $\frac{dy}{dx}$ , que es la derivada de  $y$  respecto a  $x$ , puede ser pensado como el cociente de la diferencial  $dy$  entre la diferencial  $dx$ .

**REPRESENTACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL**

La figura nos muestra una representación geométrica de la diferencial.



La recta  $\overline{PS}$  es la recta tangente al gráfico de  $y = f(x)$  en el punto  $P = (x, y)$ . La pendiente de esta tangente es  $f'(x)$ . Por lo tanto,

$$\overline{RS} = f'(x) dx = dy.$$

Por otro lado,  $G$  es el punto  $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$  y el segmento  $\overline{RG}$  es igual a  $\Delta y$ . Se ve que para  $dx = \Delta x$  pequeño se tiene nuevamente la expresión (4):

$$\Delta y \approx dy = f'(x) dx \quad (4)$$



**EJEMPLO 3.**

Sea  $y = f(x) = x^2 + 4x - 3$ . Hallar,  $\Delta y$ ,  $dy$  y  $\Delta y - dy$

a. Para cualquier  $x$  y cualquier  $\Delta x$

b. Para  $x = 2$  y  $dx = 0,01$

**Solución**

$$\begin{aligned} \text{a. } \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) - 3 - (x^2 + 4x - 3) \\ &= 2x\Delta x + 4\Delta x + (\Delta x)^2 = 2(x + 2)\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

$$dy = f'(x)dx = (2x + 4)dx = 2(x + 2)dx$$

$$\Delta y - dy = (\Delta x)^2$$

b. Si  $x = 2$ ,  $\Delta x = dx = 0,01$ , reemplazando en (a), tenemos

$$\Delta y = 2(2 + 2)(0,01) + (0,01)^2 = 0,08 + 0,0001 = 0,0801$$

$$dy = 2(2 + 2)(0,01) = 0,08$$

$$\Delta y - dy = (0,01)^2 = 0,0001.$$

### APROXIMACION LINEAL EN TERMINOS DE LA DIFERENCIAL

Tenemos la aproximación lineal:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (1)$$

Ahora queremos expresar esta fórmula en términos de la diferencial. Para esto, hacemos  $x = a + \Delta x$ , de modo que  $\Delta x = x - a$ . Luego, reemplazando en (1) obtenemos:

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x, \text{ o bien } f(a + \Delta x) \approx f(a) + dy$$

Por ultimo, cambiando  $a$  por  $x$ , se tiene:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy \quad (5)$$

Esta fórmula también se puede obtener fácilmente de las fórmulas (3) y (4). Sin embargo, preferimos la deducción que hemos hecho, porque ella nos indica que ambas fórmulas, la (1) y la (5), expresan la misma aproximación y, por lo tanto, las dos nos conducen al mismo resultado.

**EJEMPLO 4.**

Usando diferenciales hallar un valor aproximado de  $\sqrt[3]{65}$ .

**Solución**

Consideremos la función

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x}. \text{ Su diferencial es:}$$

$$\Delta y - dy$$

$$dy = f'(x)dx = \frac{1}{3x^{2/3}} dx$$

Reemplazando estos valores en la expresión (5) tenemos:

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3x^{2/3}} dx$$

El número entero más próximo a 65 que tiene raíz cúbica exacta es 64. Luego, haciendo  $x = 64$  y  $\Delta x = dx = 1$  en la expresión anterior tenemos:

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64 + 1} \approx \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3(64)^{2/3}} (1) = 4 + \frac{1}{48} \approx 4,0208333$$

Se sabe que  $\sqrt[3]{65}$ , con 7 cifras decimales, es 4,0207258. La aproximación que hemos encontrado es exacta hasta la tercera cifra decimal.

### ESTIMACION DE ERRORES

La diferencial tiene aplicación en la estimación de los efectos causados por los errores cometidos al medir ciertas magnitudes. Sea  $x$  la variable cuyo valor es estimado con cierto error posible. Sea  $y = f(x)$  otra variable que es función de  $x$ . Al calcular  $y = f(x)$  a partir de  $x$  también se cometerá un error. Si el valor correcto es  $x + dx$ , entonces el error de medición es  $dx$ . Por otro lado, el valor correcto de la variable  $y$  es  $f(x + dx)$ , y el valor calculado con error es  $f(x)$ . Luego, el error cometido en la variable  $y$ , llamado el error de propagación, es

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x).$$

En consecuencia, si el error  $dx$  es pequeño, que es lo esperado, el error  $\Delta y$  puede ser aproximado por la diferencial  $dy = f'(x)dx$ . Esto es

$$\text{Error de } y = \Delta y \approx dy = f'(x) dx$$

No es igual cometer un error de 1 cm. al medir un metro que cometer el mismo error al medir 10 metros. Para distinguir estas situaciones se define el error relativo y el error porcentual.

**DEFINICION.** Si  $\Delta y$  es el error de  $y$ , entonces

1. El error relativo de  $y$  es el cociente  $\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}$

2. El error porcentual de  $y$  es  $100 \frac{\Delta y}{y} \approx 100 \frac{dy}{y}$

ERENCIAL

ncial. Para esto,  
plazando en (1)

) + dy

(3) y (4). Sin  
nos indica que  
or lo tanto, las

$$\sqrt[3]{65}.$$

En general, el valor exacto del error cometido no es conocido, ya que de serlo, sería muy fácil corregirlo. Lo común es que se conozca un margen del error; es decir, un número  $\varepsilon > 0$  tal que

$$|dx| \leq \varepsilon$$

**EJEMPLO 5.**

Se ha encontrado un tumor en forma esférica en el cuerpo de cierta persona. Se calculó que el radio del tumor es de 2 cm. con un margen de error de 0,05 cm.

- Estimar el margen de error al calcular el volumen del tumor.
- Estimar el margen de error relativo.
- Estimar el margen de error porcentual.

**Solución**

- El volumen de una esfera de radio  $r$  está dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{y, por tanto,} \quad dV = 4\pi r^2 dr$$

El margen de error al medir el radio es 0,05 cm. Luego,

$$|dr| \leq 0,05 \quad \text{y} \quad |\Delta V| \approx |dV| = |4\pi r^2 dr| \leq 4\pi (2)^2(0,05) \approx 2,51 \text{ cm}^3$$

Esto es, una estimación del margen de error al calcular el volumen con los datos dados es  $2,51 \text{ cm}^3$ .

$$\text{b. } \left| \frac{\Delta V}{V} \right| \approx \left| \frac{dV}{V} \right| = \left| \frac{4\pi r^2 dr}{(4/3)\pi r^3} \right| = \frac{3|dr|}{r} \leq 3 \frac{0,05}{2} = 0,075$$

$$\text{c. } \left| 100 \frac{\Delta V}{V} \right| \approx \left| 100 \frac{dV}{V} \right| \leq 100(0,075) = 7,5\%$$

**TEOREMA 4.7**

Si  $u$  y  $v$  son funciones diferenciables de  $x$  y  $c$  es una constante, entonces

$$1. dc = 0$$

$$2. d(cu) = c du$$

$$3. d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$4. d(uv) = u dv + v du$$

$$5. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

$$6. du^n = nu^{n-1} du$$

**Demostración**

Cada una de estas igualdades viene de las correspondientes fórmulas de derivación. Aquí probaremos (4) y (5), dejando las otras como ejercicio para el lector.

- Sabemos por definición que:

$$du = \frac{du}{dx} dx \quad \text{y} \quad dv = \frac{dv}{dx} dx$$



cido, ya que de serlo,  
gen del error; es decir,

en el cuerpo de cierta  
s de 2 cm. con un

lumen del tumor.

dr

0,05)  $\approx 2,51 \text{ cm}^3$

umen con los datos

75

es una constante,

du

dv + v du

$\int du$

as fórmulas de  
jercicio para el

Por otro lado, por la regla de la derivada de un producto, sabemos que:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Luego,

$$d(uv) = \left( u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \right) dx = u \frac{dv}{dx} dx + v \frac{du}{dx} dx = u dv + v du$$

5. Por regla de la derivada de un cociente sabemos que:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Luego,

$$d \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} dx = \frac{v \frac{du}{dx} dx - u \frac{dv}{dx} dx}{v^2} = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

**EJEMPLO 6.**

Hallar dy si  $y = \frac{e^{2x}}{x^2 + 1}$

**Solución**

$$\begin{aligned} dy &= \frac{(x^2 + 1)d(e^{2x}) - e^{2x}d(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} \quad (\text{por 5}) \\ &= \frac{(x^2 + 1)(2e^{2x}dx) - e^{2x}(2xdx)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2e^{2x}(x^2 - x + 1)}{(x^2 + 1)^2} dx \end{aligned}$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 4.7

**PROBLEMA 1.**

Hallar dy si  $y^3 + 3xy + x^3 = 4$

**Solución**

Aplicando las propiedades de la diferencial enunciadas en el teorema 4.7 tenemos:

$$d(y^3) + d(3xy) + d(x^3) = d(4) \Rightarrow 3y^2 dy + 3x dy + 3y dx + 3x^2 dx = 0 \Rightarrow$$

$$3(y^2 + x)dy = -3(x^2 + y)dx \Rightarrow dy = -\frac{x^2 + y}{y^2 + x} dx$$

**PROBLEMA 2.**

Sea  $A$  el área de un cuadrado cuyo lado mide  $x$ . Esto es,  $A = x^2$

- Hallar  $\Delta A$ ,  $dA$  y  $\Delta A - dA$
- Mostrar gráficamente a  $A$ ,  $\Delta A$ ,  $dA$  y  $\Delta A - dA$

**Solución**

$$\text{a. } \Delta A = (x + dx)^2 - x^2 = 2x dx + (dx)^2$$

$$dA = 2x dx, \quad \Delta A - dA = (dx)^2$$

- Dibujemos los cuadrados de lados  $x$  y  $(x + dx)$ .  
Las áreas de los rectángulos formados son:

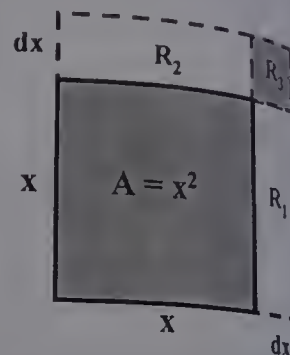
$$R_1 = x dx, \quad R_2 = x dx \quad \text{y} \quad R_3 = (dx)^2$$

Luego,

$$\Delta A = 2x dx + (dx)^2 = R_1 + R_2 + R_3$$

$$dA = 2x dx = x dx + x dx = R_1 + R_2$$

$$\Delta A - dA = R_3$$



**PROBLEMA 3.**

Aproximar el valor de  $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 0,08\right)$  mediante:

- Aproximación lineal
- Aproximación con la diferencial.

**Solución**

Sea  $f(x) = \sin^2 x$ . Se tiene que:

$$f(\pi/4) = \sin^2(\pi/4) = (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \Rightarrow f'(\pi/4) = \sin(2\pi/4) = \sin(\pi/2) = 1$$

- Sabemos que:  $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ . Tomando  $a = \frac{\pi}{4}$  se tiene:

$$f(x) \approx f(\pi/4) + f'(\pi/4)(x - \pi/4) = \frac{1}{2} + 1(x - \pi/4)$$

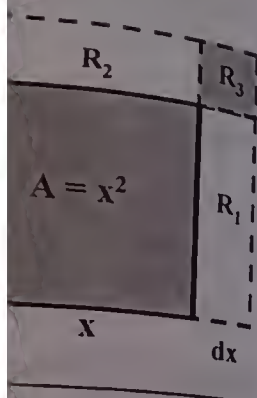
Luego, la aproximación lineal de  $f(x) = \sin^2 x$  en  $a = \frac{\pi}{4}$  es:

$$\sin^2 x \approx x + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Ahora, para  $x = \frac{\pi}{4} + 0,08$ , se tiene:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 0,08\right) \approx \left(\frac{\pi}{4} + 0,08\right) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + 0,08 = 0,508$$

de  $x$ . Esto es,  $A = x^2$   
y  $\Delta A - dA$



mediante:  
n la diferencial.

en  $(\pi/2) = 1$

tiene:

$\pi/4$ )

$$+ 0,08 = 0,508$$

b. Sabemos que:  $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)dx$ .

Luego, para  $x = \frac{\pi}{4}$  y  $dx = \Delta x = 0,08$  se tiene:

$$f(\pi/4 + \Delta x) \approx f(\pi/4) + f'(\pi/4)dx = \frac{1}{2} + 1(0,08) \Rightarrow$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 0,08\right) \approx \frac{1}{2} + 1(0,08) = 0,508$$

Universidad Yacambí  
BIBLIOTECA  
Procesos Técnicos

**PROBLEMA 4.** Se quiere calcular el volumen de un cubo a partir de su arista en tal forma que el margen de error sea de 6 %. Estimar el margen de error porcentual con que debe medirse la arista.

Solución

Si  $V$  es volumen del cubo y  $x$  es la arista, entonces

$$V = x^3, \quad dV = 3x^2 dx \quad \text{y} \quad \frac{dV}{V} = \frac{3x^2 dx}{x^3} = 3 \frac{dx}{x}$$

Luego,

$$\left| 100 \frac{dV}{V} \right| \leq 6 \Rightarrow \left| 100 \left( 3 \frac{dx}{x} \right) \right| \leq 6 \Rightarrow \left| 100 \frac{dx}{x} \right| \leq 2$$

Por tanto, el margen de error porcentual de la arista debe ser de 2 %

**PROBLEMA 5.** El periodo de un péndulo es el tiempo que demora para dar una oscilación completa y este viene dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde  $L$  es la longitud del péndulo,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $T$  se mide en segundos. El péndulo de un reloj, debido al calor, se ha dilatado y su longitud ha aumentado 0,4 %.

- Calcular el porcentaje aproximado del cambio del periodo.
- Calcular el error aproximado del reloj en un día.

Solución

a. Nos dicen que:  $100 \frac{dL}{L} = 0,4$ . Además:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{L} \Rightarrow dT = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \left( \frac{dL}{2\sqrt{L}} \right) = \frac{\pi dL}{\sqrt{g} \sqrt{L}}$$

Luego,



$$100 \frac{dT}{T} = 100 \frac{\pi dL / \sqrt{g} \sqrt{L}}{2\pi \sqrt{L} / \sqrt{g}} = 100 \frac{dL}{2L} = \frac{1}{2} \left( 100 \frac{dL}{L} \right) = \frac{1}{2} (0,4) = 0,2\%$$

b. En cada segundo, el reloj tiene un error aproximado del 0,2 %, o sea, de 0,002 segundos. Luego, en un día, el error aproximado es de:  
 $24(60(60)(0,002)) = 172,8$  segundos = 2,88 minutos

### PROBLEMAS PROPUESTOS 4.7

En los problemas del 1 al 3 hallar: a.  $\Delta y$ , b.  $dy$  c.  $\Delta y - dy$

1.  $y = x^2 - 1$       2.  $y = e^x$       3.  $y = \ln x$

En los problemas del 4 y 5 calcular: a.  $\Delta y$  b.  $dy$  c.  $\Delta y - dy$ , para los valores de  $x$  y  $dx$  dados.

4.  $y = x^2 - 4x$ ,  $x = -1$ ,  $dx = 0,03$       5.  $y = 10^x$ ,  $x = 1$ ,  $dx = -0,01$

En los problemas del 6 al 9 se proporcionan aproximaciones lineales de la funciones dadas en  $a = 0$ . Verificar que estas aproximaciones son correctas.

6.  $\sqrt{x+3} \approx \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}x$

7.  $\sin x \approx x$

8.  $\tan x \approx x$

9.  $e^x \approx 1 + x$

En los problemas del 10 al 15 hallar  $dy$

10.  $y = e^{-3x^2}$

11.  $y = \sqrt{1-x^2}$

12.  $y = 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

13.  $x^2 + y^2 = 25$

14.  $x^2 + 2\sqrt{xy} - y^2 = 1$

15.  $y = \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}$

16. Probar que para valores pequeños de  $|\Delta x|$  se cumple que

$$\sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

En los problemas del 16 al 21 hallar un valor aproximado de la expresión indicada.

17.  $\sqrt{80}$

18.  $\sqrt[4]{82}$

19.  $\sqrt[3]{218}$

20.  $\sqrt{2 + \sqrt[3]{8,2}}$

21.  $\tan^{-1}(e^{0,08})$

22.  $\ln 1,07$

$$= \frac{1}{2}(0,4) = 0,2\%$$

%, o sea, de 0,002

dy

para los valores

$$dx = -0,01$$

es lineales de la  
correctas.

$\approx x$

+ x

$$\frac{x-1}{x+1}$$

$$\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{a}{x}}$$

e la expresión

18

,07

23. Aproximar el valor de  $\cos^4(\pi/4 + 0,01)$
24. Aproximar el valor de  $\sin(60^\circ 1')$ . Sugerencia:  $60^\circ 1' = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{60}\left(\frac{\pi}{180}\right)$
25. Un cubo de metal tiene 12 cm. de arista. La arista aumenta en 0,2 cm.
  - a. Aproximar con la diferencial el incremento del volumen.
  - b. Hallar el valor exacto del incremento.
  - c. Aproximar con la diferencial el incremento del área total.
  - d. Hallar el incremento exacto del área total.
26. Se tiene un tubo de hierro de 8 m. de largo, 6 cm. de radio y 0,4 cm. de espesor. Usando la diferencial aproximar el volumen de hierro del tubo. El volumen de un cilindro circular recto es  $V = \pi r^2 h$ , donde  $r$  es el radio y  $h$  la altura.
27. Se quiere calcular el área  $A$  de una esfera a partir del radio  $r$  mediante la fórmula  $A = 4\pi r^2$  y en tal forma que el margen de error sea de 5 %. Estimar el margen de error porcentual con que debe medirse el radio.
28. Al medir el radio de una esfera se obtiene 4m. Esta medida es segura hasta 0,01 m.
  - a. Estimar el margen de error al calcular el volumen de la esfera.
  - b. Estimar el margen de error porcentual.
29. Al medir una circunferencia mayor de una esfera se obtiene 72 cm. con un margen de error de 0,5 cm.
  - a. Estimar el margen de error al calcular el área de la esfera.  $A = 4\pi r^2$
  - b. Estimar el margen de error relativo al calcular el área.
  - c. Estimar el margen de error al calcular el volumen de la esfera.  $V = (4/3)\pi r^3$
  - d. Estimar el margen de error relativo al calcular el volumen.

Sugerencia:  $C = 2\pi r$  y  $dC = 2\pi dr$
30. Un cateto de un triángulo rectángulo mide exactamente 30 cm. Al medir el ángulo opuesto a este cateto se obtiene  $60^\circ$ , con un margen de error de  $0,5^\circ$ .
  - a. Estimar el margen de error al calcular la hipotenusa.
  - b. Estimar el margen de error porcentual al calcular la hipotenusa.
31. Se estima que el próximo mes, se venderán 8.000 unidades de cierto producto. Esta estimación tiene un margen de error de 3%. La función ganancia es
 
$$G(x) = 5x - 0,0002x^2 \text{ dólares,}$$

donde  $x$  es el número de unidades vendidas por mes.

  - a. Calcular la ganancia que dejarán los 8.000 artículos
  - b. Estimar el margen de error de la ganancia con el cálculo anterior.
  - c. Estimar el margen de error relativo.
  - d. Estimar el margen de error porcentual.

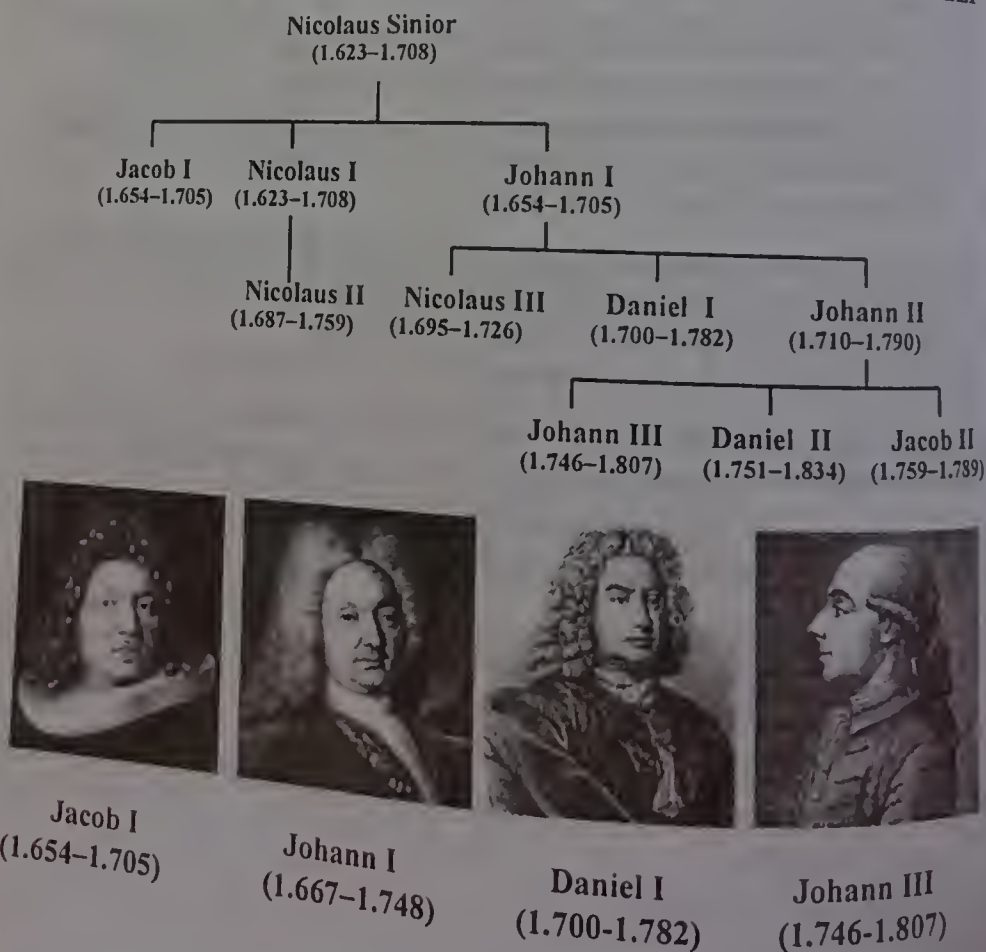
## BREVE HISTORIA DE LA FAMILIA BERNOULLI

La familia Bernoulli es caso extraordinario y único en la Historia de la Matemática. Ella aportó a la ciencia alrededor de una docena de brillantes matemáticos de primera línea, a lo largo de tres generaciones. La dinastía se levanta sobre dos columnas, configuradas por los hermanos Jacob y Johann, quienes fueron los más distinguidos seguidores de Leibniz en la línea de Cálculo. Son hijos de Nicolaus Bernoulli, un comerciante de Basilea, Suiza.

Jacob tuvo la cátedra de Matemáticas y Física en la Universidad de Basilea, desde 1.687 hasta su muerte. Johann aprendió Matemáticas guiado por Jacob, quien era 12 años mayor. En 1.695, a Johann le ofrecieron y aceptó la cátedra de Matemáticas en la universidad de Groningen (Holanda), donde estuvo hasta el año 1.705. Regresó a Basilea y ocupó la cátedra que quedó vacante a la muerte de Jacob. Su hijo Nicolás y Daniel fueron amigos de Leonardo Euler, con quien, cuando jóvenes, recibían clases de matemáticas de Johann.

El apellido Bernoulli aparece, con frecuencia, ligado a muchos resultados claves de las Matemáticas. Así, en el estudio de las curvas encontramos la *Lemniscata de Bernoulli*; en las ecuaciones diferenciales, la *ecuación de Bernoulli*; en la teoría de series, Los números de Bernoulli, etc. Estos y otros resultados no son contribuciones de un solo hombre, sino de varios miembros de la familia Bernoulli.

### ARBOL GENEALOGICO (Matemático) DE LA FAMILIA BERNOULLI





## BERNOULLI

en la Historia de la docena de brillantes. La disnatía se levantó Johann, quienes fueron Cálculo. Son hijos de

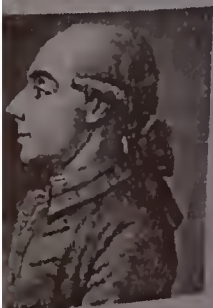
sidad de Basilea, desde o por Jacob, quien era ttedra de Matemáticas el año 1.705. Regresó te de Jacob. Su hijos uien, cuando jóvenes,

s resultados claves de os la Lemniscata de oulli; en la teoría de resultados no son familia Bernoulli.

## LA BERNOULLI

Johann II  
(1.710-1.790)

II Jacob II  
(1.759-1.789)



Johann III  
(1.746-1.807)

# 5

## APLICACIONES DE LA DERIVADA

GUILLAUME F. A. M. DE L'HÔPITAL  
(1.661-1.704)

5.1 MAXIMOS Y MINIMOS

5.2 TEOREMA DEL VALOR MEDIO

5.3 MONOTONIA, CONCAVIDAD Y CRITERIOS  
PARA EXTREMOS LOCALES

5.4 FORMAS INDETERMINADAS. REGLA DE  
L'HÔPITAL

5.5 TRAZADO CUIDADOSO DEL GRAFICO DE UNA  
FUNCION

5.6 PROBLEMAS DE OPTIMIZACION

5.7 METODO DE NEWTON-RAPHSON

G. F. A.  
MARQUES DE L'HÔPITAL  
(1.661 – 1.704)



Guillaume François Antoine Marqués de L'Hôpital nació en París el año 1.661, dentro de una familia noble y acomodada. Cuando joven pretendió hacer una carrera militar. Debido a su corta visión tuvo que abandonar su preteusión, para dedicarse a la Matemática. Fue discípulo y amigo de un famoso matemático de aquella época, el suizo Johann Bernoulli (1.667–1.748). En 1.692 publicó el primer libro de cálculo de la historia: "*Analyse des Infiniment petit*" (Análisis de los infinitamente pequeños). En este texto aparece un método para calcular el límite de un cociente donde ambos límites, numerador y denominador, son nulos. Este método lo ha hecho famoso gracias a que le dieron el nombre de "Regla de L'Hôpital". J. Bernoulli sostuvo que él fue el creador de esta famosa regla. La veracidad de esta afirmación recién fue comprobada en 1.922, cuando en la biblioteca de Berna se encontró el texto del curso de Cálculo que dictaba Bernoulli, en el cual aparece la regla.

### ACONTECIMIENTOS IMPORTANTES

Durante la vida de L'Hôpital, en América y en el mundo hispano sucedieron los siguientes hechos notables: La poetisa mejicana Sor Inés de la Cruz (1.651-1.695) publica sus obras poéticas, obras que fueron fuertemente influenciadas por el Gongorismo. En 1.664, los ingleses, bajo el mando del duque de York, toman Nueva Amsterdam y le cambian el nombre a Nueva York. En 1.671 el pirata inglés Henry Morgan saquea e incendia la ciudad de Panamá. En 1.682 el cúaquero William Penn funda Pensilvania. Ese mismo año, el francés Robert Cavalier de la Salle llega a la desembocadura del río Misisipi, tomó posesión de la región y la nombró Luisiana, en honor a su rey, Luis XIV.

Las dis  
problemas  
industrial  
siempre, b  
problemas  
función. T

DEFINI

EJEM

a. El m  
infir

b. El

c. El

d. L

## SECCION 5.1

### MAXIMOS Y MINIMOS

Las distintas actividades a que se dedica el hombre le plantean continuamente problemas de optimización. El comerciante busca maximizar sus ganancias; el industrial busca minimizar sus costos de producción, un conductor cualquiera, casi siempre, busca la distancia o el tiempo mínimo de recorrido, etc. Algunos de estos problemas se reducen a encontrar el valor máximo o el valor mínimo de una función. Tales problemas son llamados problemas de optimización.

#### EXTREMOS ABSOLUTOS

**DEFINICION.** Sea  $c$  un punto del dominio de la función  $f$ . Diremos que:

- a.  $f(c)$  es el valor máximo de  $f$ , el máximo absoluto de  $f$  o, simplemente, el máximo de  $f$ , si

$$f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in \text{Dom}(f).$$

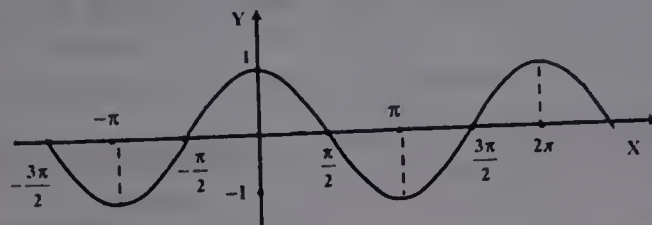
- b.  $f(c)$  es el valor mínimo de  $f$ , el mínimo absoluto de  $f$  o, simplemente, el mínimo de  $f$ , si

$$f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in \text{Dom}(f).$$

- c.  $f(c)$  es un valor extremo de  $f$  si  $f(c)$  es un máximo o un mínimo.

#### EJEMPLO 1.

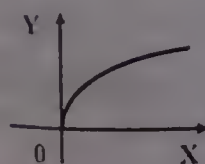
- a. El máximo  $f(x) = \cos x$  es 1 y el mínimo es  $-1$ . Estos valores son alcanzados infinitas veces. En efecto:  $\cos 2n\pi = 1$  y  $\cos (2n+1)\pi = -1$  para todo entero  $n$ .



- b. El mínimo de  $g(x) = \sqrt{x}$  que es  $g(0) = \sqrt{0} = 0$ ; pero  $g$  no tiene máximo.

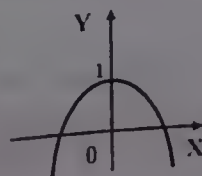
- c. El máximo de  $h(x) = 1 - x^2$  es  $h(0) = 1$ ; pero  $h$  no tiene mínimo.

- d. La función  $f(x) = \frac{1}{x}$  no tiene máximo ni mínimo.



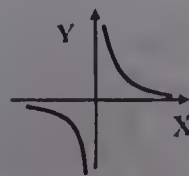
$$g(x) = \sqrt{x}$$

Max = no tiene, Min = 0



$$h(x) = 1 - x^2$$

Max = 1, Min = no tiene



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Max = no tiene, Min = no tiene

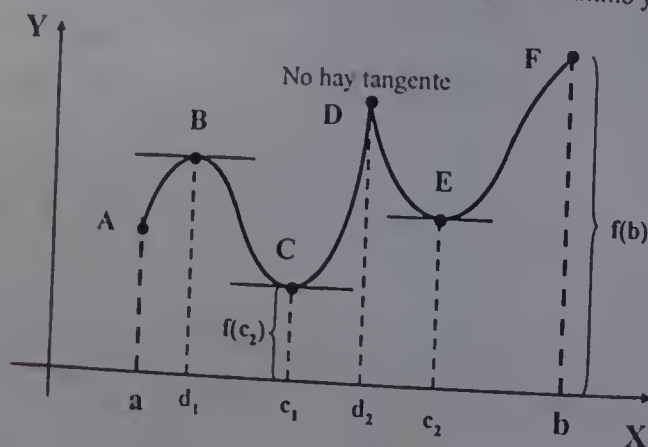


Los ejemplos anteriores nos muestran que algunas funciones tienen valores extremos, otras sólo uno y otras, ninguno. Necesitamos algunos criterios que nos aseguren la existencia de extremos. Aquí tenemos uno de los más simples, conocido con el nombre de teorema del valor extremo. La demostración de éste no está al alcance de nuestro texto, por lo cual la omitimos.

**TEOREMA 5.1** Teorema del valor extremo.

Si  $f$  es una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces  $f$  tiene máximo y mínimo en  $[a, b]$ ; es decir, existen dos puntos  $c$  y  $d$  en el intervalo  $[a, b]$  tales que  $f(c)$  es el valor máximo y  $f(d)$  es el valor mínimo de  $f$ .

**EJEMPLO 2.** El siguiente gráfico es el de una función continua  $f$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Determinar su máximo y su mínimo.



**Solución**

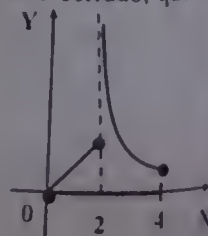
El punto más alto del gráfico es el punto F y el más bajo es el punto C. Luego, el máximo de  $f$  es  $f(b)$  y el mínimo es  $f(c_1)$ .

**EJEMPLO 3.** Hallar una función, con dominio un intervalo cerrado, que no tenga máximo.

**Solución**

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2}, & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Dom  $f = [0, 4]$   $f$  no tiene máximo. Observar que  $f$  no cumple la hipótesis del teorema del valor extremo ya que es discontinua en 2.



## EXTREMOS RELATIVOS

En gráfico del ejemplo 2, los puntos B y D son tales que, aunque no son los más altos del gráfico, son los más altos comparados con los puntos vecinos. Analogamente, los puntos C y E son los más bajos de su vecindario. Esta observación nos lleva al concepto de extremos locales o extremos relativos.

### DEFINICION.

Sea  $c$  un punto del dominio de la función  $f$ . Diremos que:

a.  $f(c)$  es un **máximo local** o un **máximo relativo** de  $f$ , si existe un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $c$  y se cumple que

$$f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in I.$$

b.  $f(c)$  es un **mínimo local** o un **mínimo relativo** de  $f$ , si existe un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $c$  y se cumple que:

$$f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in I.$$

c.  $f(c)$  es un **extremo local** o un **extremo relativo** de  $f$  si  $f(c)$  es un máximo local o un mínimo local.

Observar que, de acuerdo a esta definición,  $c$  es un punto interior del intervalo  $[a, b]$ , o sea, si  $a < c < b$ . Observar también que si  $f(c)$  es un extremo absoluto en un intervalo  $[a, b]$  y si  $a < c < b$ , entonces  $f(c)$  también es un extremo local. Esto no sucede si  $f(a)$  o  $f(b)$  es un extremo absoluto.

Observando los puntos B, C, D, y E la gráfica del ejemplo 2, que corresponden a extremos locales, se puede conjeturar que las rectas tangentes en estos puntos son horizontales (pendiente nula) o que no tienen rectas tangentes (la derivada no existe). A continuación formalizamos y demostramos esta conjetura.

### DEFINICION.

Un **número crítico** de una función  $f$  es un número  $c$  en el dominio de  $f$  tal que  $f'(c) = 0$  o  $f'(c)$  no existe.

En este caso, el punto  $(c, f(c))$  es un **punto crítico**.

### TEOREMA 5.2

#### Teorema de Fermat

Si  $f$  tiene un extremo local en  $c$ , entonces  $c$  es un número crítico.

#### Demostración

Si  $f'(c)$  no existe, el teorema se cumple. Supongamos que  $f'(c)$  existe. Debemos probar que  $f'(c) = 0$ .

#### Caso 1. $f(c)$ es máximo local

Como existe  $f'(c)$ , debemos tener que:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad (1)$$

Por ser  $f(c)$  un máximo local, existe un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $c$  tal que para los  $c+h$  que están en el intervalo  $I$ , se cumple:

iones de la Derivada

ones tienen los dos  
os algunos criterios  
uno de los más  
o. La demostración  
os.

lo cerrado  $[a, b]$ ,  
]; es decir existen  
e  $f(c)$  es el valor

continua  $f$  en el  
o y su mínimo.

(b)

X

to C. Luego, el

errado, que no



$$f(c+h) \leq f(c) \text{ y, por tanto, } f(c+h) - f(c) \leq 0$$

Luego, para  $h > 0$  se tiene:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \quad (2)$$

Ahora, para  $h < 0$ , tomando en cuenta (2), se tiene

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

De (1), (3) y (4) obtenemos que  $f'(c) = 0$ .

Caso 2.  $f(c)$  es mínimo local.

Sea  $g(x) = -f(x)$ . Como  $f(c)$  es un valor mínimo de  $f$ , entonces  $g(c) = -f(c)$  es máximo de  $g$ . Por el caso 1,  $g'(c) = 0$ . Por tanto,  $f'(c) = -g'(c) = -0 = 0$ .

**OBSERVACION.** La proposición recíproca al teorema de Teorema de Fermat no es cierta. En efecto, los siguientes dos ejemplos son contraejemplos.

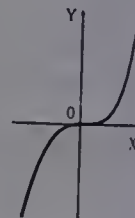
**EJEMPLO 4.** Sea la función:  $f(x) = x^3$ . Demostrar que 0 es número crítico. Observar que  $f(0) = 0$  no es un extremo local.

Solución

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$$

Luego 0 es número crítico de  $f$ .

Mirando el gráfico se ve que  $f$  no tiene un extremo local en 0.



**EJEMPLO 5.** Hallar los números críticos de la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$$

Solución

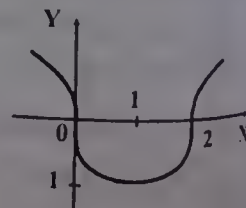
Hallemos la derivada de  $f$ :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x} \Rightarrow f(x) = (x^2 - 2x)^{1/3} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 2x)^{-2/3}(2x - 2) = \frac{2}{3} \frac{x - 1}{(x(x - 2))^{2/3}}$$

Ahora,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$





$$f(c) \leq 0$$

(2)

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

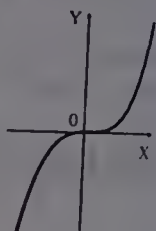
ne

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

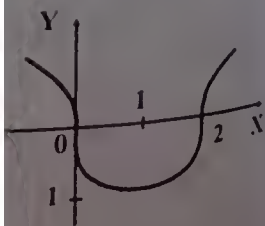
le  $f$ , entonces  $g(c) = -f(c)$   
 $f'(c) = -g'(c) = -0 = 0$ .

a de Teorema de Fermat  
 entes dos ejemplos son

es número crítico.  
 o local.



en 0.



Además, vemos que  $f'(x)$  no está definida en  $x=0$  ni en  $x=2$ . Luego, los números críticos de  $f$  son 1, 0 y 2.

Observar en el gráfico que  $f(1) = 1$  es un mínimo local (y absoluto). Sin embargo, ni  $f(0) = 0$  ni  $f(2) = 0$  son extremos locales.

### ESTRATEGIA PARA HALLAR LOS VALORES EXTREMOS EN INTERVALOS CERRADOS FINITOS

De los dos teoremas anteriores obtenemos la siguiente estrategia para hallar los valores extremos de una función continua  $f$  en un intervalo cerrado  $[a, b]$ .

Paso 1. Hallar los puntos críticos de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ .

Paso 2. Evaluar  $f$  en  $a$ , en  $b$  y en los puntos críticos.

El mayor de los valores del paso 2 es el máximo; y el menor, es el mínimo.

**EJEMPLO 6.** Hallar los extremos absolutos de la siguiente función en el intervalo  $[1, 9]$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 3$$

Solución

Paso 1. Hallar los puntos críticos de  $f$  en el intervalo  $[1, 9]$ :

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-6) = 0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ó } x=6$$

Por tanto, los puntos críticos de  $f$  son 2 y 6 y ambos están en  $[1, 9]$

Paso 2. Evaluamos  $f$  en la frontera de  $[1, 9]$  y en los puntos críticos.

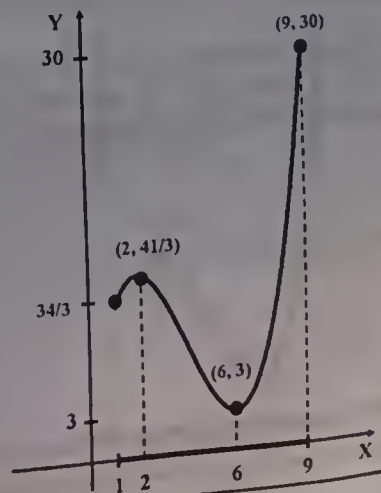
$$f(1) = \frac{1^3}{3} - 4(1)^2 + 12(1) + 3 = \frac{34}{3},$$

$$f(9) = \frac{9^3}{3} - 4(9)^2 + 12(9) + 3 = 30$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} - 4(2)^2 + 12(2) + 3 = \frac{41}{3},$$

$$f(6) = \frac{6^3}{3} - 4(6)^2 + 12(6) + 3 = 3$$

Luego, el máximo es  $f(9) = 30$  y el mínimo,  $f(6) = 3$ .



**EJEMPLO 7.** Hallar los extremos de la siguiente función en el intervalo  $[0, 4]$

$$g(x) = 3 - \sqrt[3]{(x-3)^2}$$

**Solución**

Paso 1. Hallemos los puntos críticos de  $g$  en el intervalo  $[0, 4]$ :

$$g(x) = 3 - (x-3)^{2/3} \Rightarrow g'(x) = -\frac{2}{3}(x-3)^{-1/3} \Rightarrow$$

$$g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-3}}$$

$g'$  no está definida en  $x = 3$  y no se anula en ningún punto. Luego,  $g$  tiene un único punto crítico que es 3 y éste está en el intervalo  $[0, 4]$ .

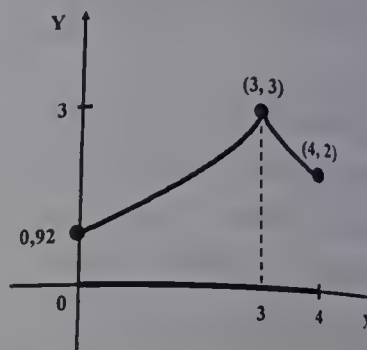
Paso 2. Evaluamos  $g$  en la frontera de  $[0, 4]$  y en los puntos críticos:

$$g(0) = 3 - \sqrt[3]{(0-3)^2} = 3 - \sqrt[3]{9} \approx 0,9199$$

$$g(4) = 3 - \sqrt[3]{(4-3)^2} = 3 - 1 = 2$$

$$g(3) = 3 - \sqrt[3]{(3-3)^2} = 3$$

Luego, el máximo es  $g(3) = 3$  y el mínimo,  $g(0) = 3 - \sqrt[3]{9} \approx 0,9199$ .



### PROBLEMAS PROPUESTOS 5.1

En los problemas del 1 al 8 graficar la función y, solamente observando el gráfico, determinar el máximo y mínimo absolutos. Para graficar, usar las técnicas de traslación y reflexión, explicadas en la sección 1.1.

1.  $f(x) = 4 - x^2$

2.  $g(x) = |2 - x| - 1$

3.  $h(x) = |4 - x^2|$

4.  $f(x) = -x^3 - 2$

5.  $g(x) = \frac{1}{x-1}$ , en  $(1, 3)$

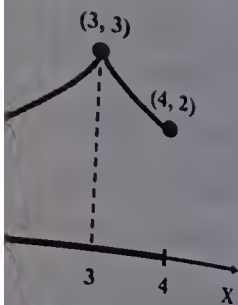
6.  $g(x) = \frac{1}{x-1}$ , en  $[4/3, 3]$

7.  $h(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{si } x < 1 \\ \ln x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ , en  $[-4, 4]$

8.  $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x < 1 \\ 4-x^2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ , en  $[-1, 2]$

En los problemas del 9 al 14 hallar los números críticos de la función dada

en el intervalo  $[0, 4]$



$\approx 0,9199$ .

observando el  
ficar, usar las

$$-x^2|$$

$$\frac{1}{-1}, \text{ en } [4/3, 3]$$

$$\frac{1}{\geq 1}, \text{ en } [-1, 2]$$

ión dada

$$9. f(x) = x^2(3x - 8)^{2/3}$$

$$10. g(x) = x + \sen x$$

$$11. h(x) = |x^3 - 8|$$

$$12. f(x) = [x]$$

$$13. h(x) = xe^{-x}$$

$$14. g(x) = \sen^2 x + \cos x, \text{ en } [-1, 2\pi]$$

En los problemas del 15 al 22 determinar el máximo y el mínimo absolutos de la función en el intervalo cerrado indicado.

$$15. f(x) = \frac{x}{1+x} \text{ en } [1, 3]$$

$$16. f(x) = \frac{x}{1+x^2} \text{ en } [-2, 3]$$

$$17. f(x) = \tan x - x \text{ en } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$18. f(x) = 1 - (x - 3)^{2/3} \text{ en } [-5, 4]$$

$$19. f(x) = \sen x + \cos x \text{ en } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$20. f(x) = \cos^2 x + \sen x \text{ en } [0, \pi]$$

$$21. g(x) = e^{-x} \sen x \text{ en } [0, 2\pi]$$

$$22. f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \text{ en } [1, e]$$

23. Probar que la función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0,$$

tiene exactamente un número crítico en  $\mathbb{R}$ .

24. Probar que la función cúbica

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0,$$

puede tener dos, uno o ningún número crítico en  $\mathbb{R}$ . Sugerencia: ¿Cuántas raíces puede tener una ecuación de segundo grado?

25. Probar que un polinomio de grado  $n$  puede tener a lo más  $n - 1$  números críticos en  $\mathbb{R}$ .

## SECCION 5.2

### TEORMA DEL VALOR MEDIO

**DEFINICION.** Sea  $f$  una función. Diremos que:

a.  $f$  es diferenciable en un intervalo abierto  $(a, b)$  si  $f$  es diferenciable en todo punto de  $(a, b)$ . Esto es,

$$\exists f'(x), \forall x \in (a, b)$$

b.  $f$  es diferenciable en un intervalo cerrado  $[a, b]$  si  $f$  es diferenciable en el intervalo abierto  $(a, b)$  y tiene derivada por la derecha en  $a$  y por la izquierda en  $b$ .

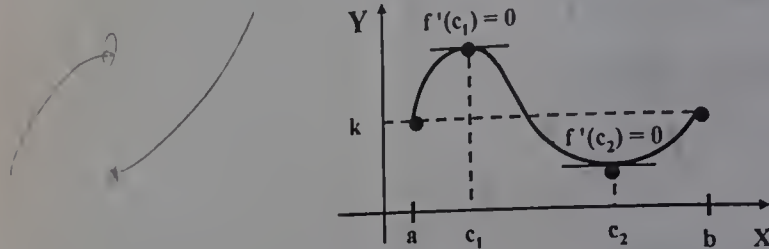


Por supuesto, también se tiene diferenciabilidad en un intervalo semiabierto, la cual se define de manera obvia.  
Es fácil ver, que si  $f$  es diferenciable en un intervalo  $I$ ,  $f$  es continua en  $I$ .

**TEOREMA 5.3** Teorema de Rolle.  
Si  $f$  es una función que cumple:

1.  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .
2.  $f$  es diferenciable en el intervalo abierto  $(a, b)$ .
3.  $f(a) = f(b)$

Entonces  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .



**Demostración**

Sea  $f(a) = f(b) = k$

**Caso 1.**  $f$  es la función constante  $f(x) = f(a) = f(b) = k, \forall x \in [a, b]$ .

En este caso, tenemos que  $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$ . Por tanto, cualquier número  $c \in (a, b)$  cumple con  $f'(c) = 0$ .

**Caso 2.**  $f$  no es constante. Luego, existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) \neq k$ .

Como  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , por el teorema del valor extremo,  $f$  tiene máximo y mínimo en  $[a, b]$ .

Si  $f(x_0) > k$  y  $f(c_1)$  es el máximo de  $f$  en  $[a, b]$ , entonces  $f'(c_1) = 0$  y  $f(c) \geq f(x_0) > k$ . Luego,  $c_1 \neq a$  y  $c_1 \neq b$  y, por tanto,  $c_1 \in (a, b)$ .

Si  $f(x_0) < k$  y  $f(c_2)$  es el mínimo de  $f$  en  $[a, b]$ , entonces  $f'(c_2) = 0$  y  $f(c_2) \leq f(x_0) < k$ . Luego,  $c_2 \neq a$  y  $c_2 \neq b$  y, por tanto,  $c_2 \in (a, b)$ .

*Michel Rolle (1.652–1.719). Matemático francés. Inicialmente, trabajó en París en un modesto empleo de escribano de notarias. En 1.699 fue electo como miembro de la Real Academia de Ciencias. Hizo contribuciones al Álgebra y a la Geometría. Pero es más conocido por el teorema que ahora lleva su nombre, el cual apareció en su libro *Traité d'algèbre* publicado en 1.690.*

**TEOREMA 5.4**

**Teorema del Valor Medio (de Lagrange)**

Sea  $f$  una función tal que:

1.  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .
2.  $f$  es diferenciable en el intervalo abierto  $(a, b)$ .

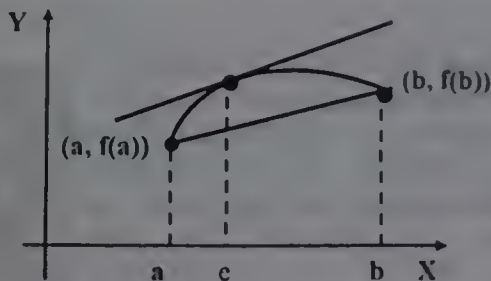
Entonces  $\exists c \in (a, b)$  tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad \text{o bien} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geométricamente, este teorema nos dice lo siguiente:

La recta secante que pasa por los puntos  $P_1 = (a, f(a))$  y  $P_2 = (b, f(b))$  tiene por pendiente  $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  y la pendiente de la recta tangente en el punto  $(c, f(c))$  es  $f'(c)$ .

Luego, el teorema dice que, si el gráfico de una función continua tiene una tangente en cada punto entre  $a$  y  $b$ , entonces existe por lo menos un  $c$  entre  $a$  y  $b$ , tal que la recta tangente en el punto  $(c, f(c))$  es paralela a la recta secante.



**Demostración**

La recta que pasa por  $P_1 = (a, f(a))$  y  $P_2 = (b, f(b))$  tiene por ecuación

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Introducimos la nueva función

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

que es la diferencia entre la función  $f$  y la recta anterior.

Veamos que  $g$  satisface las hipótesis del teorema de Rolle:

1. La función  $g$  es continua en  $[a, b]$ , ya que  $g$  es la suma de dos funciones continuas en  $[a, b]$ , que son  $f$  y el polinomio

$$p(x) = -f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

2. La función  $g$  es diferenciable en  $(a, b)$ , ya que  $f$  y el polinomio  $p(x)$  también lo son. Además,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (1)$$

$$3. g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (a - a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) = 0$$

Las hipótesis del teorema de Rolle se han cumplido, luego,  $\exists c \in (a, b)$  tal que

$$g'(c) = 0 \quad (2)$$

Si en (1) tomamos  $x = c$ , obtenemos

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (3)$$

De (2) y (3) se tiene

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

**Joseph Louis Lagrange (1.736–1.813)** Nació en Turín (Italia), pero de ascendencia francesa. Es uno de los dos matemáticos más notables del siglo XVIII. El otro es Leonardo Euler. A los 19 años creó el **Cálculo de Variaciones**. Sucedió a Euler en la dirección de la Academia de Ciencias de Berlín. En París fue nombrado profesor de las recién fundadas instituciones: **Escuela Normal** y de la **Escuela Politécnica**. Fue miembro de la comisión que creó el **Sistema Métrico Decimal**. En 1.778 publicó una de las más importantes de sus obras: **Mecánica Analítica**.



### EJEMPLO 1.

Hallar todos los números  $c$  que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para la función  $f(x) = 1 + x + x^2 - 2x^3$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .

**Solución**

En primer lugar vemos que la función  $f$ , por ser un polinomio, es continua y diferenciable en todo  $\mathbb{R}$  y, en particular, en el intervalo  $[-1, 1]$ . Nos piden encontrar los  $c \in (-1, 1)$  tales que:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \quad (1)$$



Pero,

$$f(-1) = 3, \quad f(1) = 1 \quad \text{y} \quad f'(x) = 1 + 2x - 6x^2$$

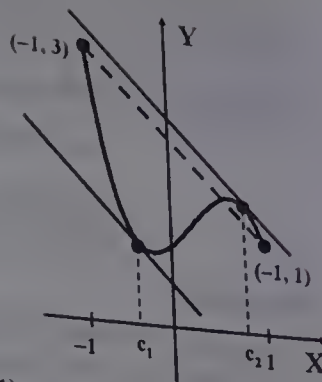
Luego, reemplazando estos valores en (1):

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \Rightarrow 1 + 2c - 6c^2 = \frac{1 - 3}{2}$$

$$\Rightarrow 2 + 2c - 6c^2 = 0 \Rightarrow 3c^2 - c - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \approx -0,434 \quad c_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \approx 0,768$$

Vemos que ambas raíces están en el intervalo  $(-1, 1)$ .



En términos de velocidades, el teorema del valor medio dice que la velocidad promedio, en algún instante, coincide con la velocidad instantánea. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

### EJEMPLO 2.

Dos casetas policiales A y B distan entre sí 147 Km. Un automóvil pasa por la caseta A a las 2 P. M. y por la caseta B a las 3:30 P. M. Un oficial de tránsito de la caseta B, que sabía Cálculo, le dijo al conductor: "Ciudadano, Ud. sabe que en esta carretera la máxima velocidad permitida es 90 Km/h y Ud. se excedió. Tengo que levantarle una infracción" Demuestre que el oficial tenía razón.

### Solución

Sea  $s = f(t)$  la función de desplazamiento del conductor, donde el tiempo lo medimos en horas a partir de las 12 M. Suponemos que esta  $f$  es diferenciable. Sabemos que la derivada  $f'(t)$  es la velocidad instantánea en el instante  $t$ .

La velocidad promedio del automóvil en el recorrido comprendido entre las dos casetas es:

$$\frac{f(3.5) - f(2)}{3.5 - 2} = \frac{147}{1.5} = 98 \text{ Km/h}$$

Pero, por el teorema del valor medio, existe un instante  $t_0$ , entre las 2 P. M. y las 3:30 P. M. tal que:

$$\frac{f(3.5) - f(2)}{3.5 - 2} = f'(t_0) \Rightarrow f'(t_0) = 98 \text{ Km/h}$$

Luego, en el instante  $t_0$  el conductor excedió la velocidad máxima permitida.

Una aplicación importante, del teorema del valor medio es el siguiente resultado, en el cual hablamos de un intervalo  $I$ . Este intervalo puede ser de cualquier tipo: abierto, cerrado, semiabierto, infinito, etc.

**TEOREMA 5.5** Teorema de la Constante.

Sea  $f$  una función continua en un intervalo  $I$ .

$$f'(x) = 0, \forall x \in I \Leftrightarrow f(x) = C, \forall x \in I,$$

donde  $C$  es una constante.

**Demostración**

Una parte del teorema ya no es novedad. En efecto, ya sabemos que si  $f$  es una función constante, entonces su derivada  $f'$  es la función constante 0. Por tanto, aboquémonos a probar la parte recíproca.

Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos puntos cualesquiera del intervalo  $I$  tales que  $x_1 < x_2$ .

Por hipótesis  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in I$ . En particular,  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  en  $[x_1, x_2]$ . Luego,  $f$  es diferenciable en  $[x_1, x_2]$  y por el teorema 5.1,  $f$  también es continua en  $[x_1, x_2]$ . Se han satisfecho las hipótesis del teorema del valor medio, luego existe  $c \in (x_1, x_2)$  tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

$$\text{Pero, } f'(c) = 0. \text{ Luego, } f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

Como  $x_1$  y  $x_2$  son dos puntos cualesquiera de  $I$ , entonces  $f$  es constante en  $I$ .

**EJEMPLO 4.** Demuestre que  $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

**Solución**

Sea  $f(x) = \sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ . Se tiene:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Luego, por el teorema anterior, existe una constante  $C$  tal que  $f(x) = C$ .

Hallamos esta constante: Tomando  $x = 0$  se tiene:

$$C = f(0) = \sin^{-1}0 + \cos^{-1}0 = \pi/2 + 0 = \pi/2$$

$$\text{Luego, } \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2$$

**TEOREMA 5.6** Teorema de la diferencia constante.

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones diferenciables en un intervalo  $I$ .

$$f'(x) = g'(x), \forall x \in I, \Rightarrow f(x) = g(x) + C, \forall x \in I,$$

donde  $C$  es una constante.

**Demostración**

$$\text{Sea } h(x) = f(x) - g(x).$$

La función  $h$  es diferenciable en  $I$ , ya que  $f$  y  $g$  lo son. Además,

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0, \forall x \in I.$$

Luego, por el teorema anterior, existe una constante  $C$  tal que

$$h(x) = C, \forall x \in I \Rightarrow f(x) - g(x) = C, \forall x \in I \Rightarrow f(x) = g(x) + C, \forall x \in I$$

En la línea del teorema de Rolle y del teorema del valor medio contamos con el siguiente teorema, que generaliza los dos anteriores.

**TEOREMA 5.7** Teorema del valor medio de Cauchy.

Sea  $f$  y  $g$  dos funciones tal que:

1.  $f$  y  $g$  son continuas en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .
2.  $f$  y  $g$  son diferenciables en el intervalo abierto  $(a, b)$

Entonces  $\exists c \in (a, b)$  tal que:

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$$

Si  $g(a) \neq g(b)$ , entonces la igualdad anterior puede escribirse así:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 9.

El teorema del valor medio es un caso particular del teorema de Cauchy. En efecto, si en este último teorema tomamos  $g(x) = x$ , tenemos que

$$g(b) - g(a) = b - a \quad \text{y} \quad g'(c) = 1$$

Estas igualdades reemplazadas en la igualdad anterior nos da la igualdad del teorema del valor medio.

**EJEMPLO 3.** Hallar un  $c \in (0, 1)$  que satisfice el teorema de Cauchy para las funciones  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x^3$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

**Solución**



Es evidente que  $f$  y  $g$  son continuas en  $[0, 1]$  y diferenciables en  $(0, 1)$ . Ahora,

$$(f(2) - f(1))g'(c) = (g(2) - g(1))f'(c) \Rightarrow (2^2 - 1^2)(3c^2) = (2^3 - 1^3)(2c)$$

$$\Rightarrow 9c^2 = 14c \Rightarrow c(9c - 14) = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ ó } c = 14/9 \Rightarrow$$

$$c = 14/9 \quad (0 \notin (0, 1))$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 5.2

**PROBLEMA 1.** Probar que la ecuación  $x^3 + 3x - 2 = 0$  tiene exactamente una raíz real.

**Solución**

Sea  $f(x) = x^3 + 3x - 2$ . Esta función, por ser un polinomio, es diferenciable (y, por tanto, continua) en todo  $\mathbb{R}$ . Además,

$$f(0) = -2 \quad \text{y} \quad f(1) = 2$$

Por el teorema del valor intermedio, existe un  $a$  en el intervalo  $[0, 1]$  tal que

$$f(a) = 0 \Rightarrow a^3 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a \text{ es una raíz de la ecuación } x^3 + 3x - 2 = 0$$

Ahora probamos que  $a$  es la única raíz. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que  $b$  es otra raíz de la ecuación. Debemos tener que  $f(b) = 0$ .

Supongamos que  $a < b$ . La función  $f$  satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo  $[a, b]$ . Luego, existe un  $c$  en  $(a, b)$  tal que:

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 + 3 = 0 \Rightarrow 3c^2 = -3 \Rightarrow c^2 = -1$$

Pero la última igualdad es imposible, ya que  $c^2 > 0$ . Esto demuestra que no existe tal  $b$ .

**PROBLEMA 2.** Usando el teorema de Rolle probar que un polinomio de grado 2

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

tiene a lo más dos raíces reales.

**Solución**

Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que  $P(x)$  tiene tres raíces distintas. Sean éstas  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ . Es decir,  $P(x_1) = 0$ ,  $P(x_2) = 0$  y  $P(x_3) = 0$ .

El polinomio satisface las hipótesis del teorema de Rolle en cada uno de los intervalos  $[x_1, x_2]$  y  $[x_2, x_3]$ . Por tanto,

$\exists c_1 \in (x_1, x_2)$  y  $\exists c_2 \in (x_2, x_3)$  tales que  $P'(c_1) = 0$  y  $P'(c_2) = 0$ .

Esto significa que el polinomio  $P'(x) = 2ax + b$  tiene dos raíces. Pero esto es imposible, ya que  $P'(x)$  es un polinomio de primer grado y tiene una única raíz, que es  $x = \frac{-b}{2a}$ .

**PROBLEMA 3.** Si  $a > 0$ , probar que el siguiente polinomio tiene, a lo más, una raíz real.

$$P(x) = x^{2n+1} + ax + b$$

**Solución**

Supongamos que  $P(x)$  tiene 2 dos raíces reales. Sean estas,  $x_1$  y  $x_2$  y que  $x_1 < x_2$ .

Se tiene que  $P(x_1) = 0$  y  $P(x_2) = 0$ . Por el teorema de Rolle, existe  $c \in (x_1, x_2)$  tal  $P'(c) = 0$ . Pero,

$$P'(x) = (2n+1)x^{2n} + a \quad \text{y} \quad P'(x) = 0 \Rightarrow x^{2n} = -\frac{a}{2(n+1)}.$$

Esta ecuación, por ser  $a > 0$ , no tiene raíces reales y por tanto,  $P'(c) = 0$  es imposible. En consecuencia,  $P(x) = x^{2n+1} + ax + b$  no puede tener dos raíces reales.

**PROBLEMA 4.** Si  $f$  es diferenciable,  $f(2) = -3$  y  $1 < f'(x) < 8$  si  $2 < x < 7$ ,

probar que  $2 < f(7) < 37$

**Solución**

Aplicando el teorema del valor medio a  $f$  en el intervalo  $[2, 7]$ : Existe  $c \in (2, 7)$  tal que:

$$\frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = f'(c) \Rightarrow \frac{f(7) - (-3)}{5} = f'(c) \Rightarrow f(7) = -3 + 5f'(c) \quad (1)$$

$$\text{Pero, } 1 < f'(c) < 8 \Rightarrow 5 < 5f'(c) < 40 \quad (\text{multiplicando por } 5)$$

$$\Rightarrow 2 < -3 + 5f'(c) < 37 \quad (\text{sumando } -3)$$

$$\Rightarrow 2 < f(7) < 37 \quad (\text{de (1)})$$

**PROBLEMA 5.** Usando el teorema del valor medio probar que

$$\sin x \leq x, \quad \forall x \geq 0$$

**Solución**

Caso 1.  $x = 0$

Para este caso, la desigualdad se cumple trivialmente:  $0 = \sin 0 \leq 0$ .

Caso 2.  $x > 0$ .

La función  $f(x) = \sin x - x$  es diferenciable en todo  $\mathbb{R}$  y, por tanto, es diferenciable en el intervalo  $[0, x]$ . Por el teorema del valor medio, existe un  $c$  en el intervalo  $(0, x)$  tal que:

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \quad (1)$$

Pero,  $f(x) = \sin x - x$ ,  $f(0) = \sin 0 - 0 = 0$  y  $f'(c) = \cos c - 1$

Además,  $\cos c - 1 \leq 0 \quad (2)$

Reemplazando los valores de  $f(x)$ ,  $f(0)$  y  $f'(c)$  en (1) y considerando (2):

$$\sin x - x - 0 = (\cos c - 1)x \leq 0x \Rightarrow \sin x - x \leq 0 \Rightarrow \sin x \leq x$$

**PROBLEMA 6.** Probar que:

a.  $|\tan y - \tan x| \geq |y - x|$ ,  $\forall x, \forall y$  en  $(-\pi/2, \pi/2)$

b.  $|\tan y + \tan x| \geq |y + x|$ ,  $\forall x, \forall y$  en  $(-\pi/2, \pi/2)$

**Solución**

a. Si  $x = y$ , la desigualdad se cumple trivialmente.

Supongamos que  $x < y$ . (Se procede en forma similar si  $y < x$ )

La función  $f(\theta) = \tan \theta$  es diferenciable en  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Luego, para  $x$  e  $y$  en este intervalo, por el teorema del valor medio, existe  $c \in (x, y)$  tal que:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \Rightarrow \tan y - \tan x = \sec^2 c (y - x) \Rightarrow$$

$$|\tan y - \tan x| = |\sec^2 c| |y - x| \geq |y - x|, \quad (\sec^2 c \geq 1)$$

b. Si  $x$  está en  $(-\pi/2, \pi/2)$ ,  $-x$  también lo está. Luego, por la parte a. reemplazando  $x$  por  $-x$  y tomando en cuenta que función tangente es impar, se tiene:

$$|\tan y - \tan(-x)| \geq |y - (-x)| \Rightarrow |\tan y + \tan x| \geq |y + x|$$

**PROBLEMA 7.** Sean  $a$  y  $b$  números reales tales que  $0 < a < b$ . Probar que:

$$\frac{b-a}{b} \leq \ln \frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{a}$$

**Solución**



Aplicando el teorema del valor medio a  $f(x) = \ln x$  en  $[a, b]$ , tenemos:

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{c}, \text{ donde } a < c < b \quad (1)$$

Pero,

$$0 < a < c < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a} \quad (\text{de (1)})$$

$$\Rightarrow \frac{b - a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b - a}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{b - a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b - a}{a}$$

**PROBLEMA 8.** Probar que:

$$3 \cos^{-1} x - \cos^{-1}(3x - 4x^3) = \pi, \text{ si } |x| \leq \frac{1}{2}$$

Solución

Derivamos la función:  $f(x) = 3 \cos^{-1} x - \cos^{-1}(3x - 4x^3)$ :

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{1-9x^2+24x^4-16x^6}} \quad (1)$$

Se verifica fácilmente que 1 y -1 son raíces de  $1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6$ . Usando este resultado logramos la factorización:

$$1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6 = -(x-1)(x+1)(1-8x^2+16x^4) = (1-x^2)(1-4x^2)^2$$

Luego, regresando a (1):

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{|1-4x^2|\sqrt{1-x^2}} \quad (2)$$

$$\text{Pero, } |x| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -4x^2 \geq -1 \Rightarrow 1-4x^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow |1-4x^2| = 1-4x^2$$

Ahora, regresando a (2):

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{(1-4x^2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

En consecuencia, existe una constante C tal que  $f(x) = C$ . Pero

$$C = f(0) = 3 \cos^{-1} 0 - \cos^{-1} 0 = 3 \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

Luego,

$$3 \cos^{-1} x - \cos^{-1}(3x - 4x^2) = \pi$$

**PROBLEMA 9.** Teorema del valor medio de Cauchy

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones tal que:

1.  $f$  y  $g$  son continuas en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .
2.  $f$  y  $g$  son diferenciables en el intervalo abierto  $(a, b)$

Entonces  $\exists c \in (a, b)$  tal que:

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$$

**Solución**

Construimos una función que satisfaga las hipótesis del teorema del valor medio. Esta función es:

$$h(x) = (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x) \quad (1)$$

Como  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, b]$  y diferenciables en  $(a, b)$ , la función  $h$  también cumple estas propiedades. Luego, por el teorema del valor medio, existe un  $c \in (a, b)$  tal que:

$$h(b) - h(a) = h'(c)(b - a) \quad (2)$$

Pero,

$$h(b) = (f(b) - f(a)) g(b) - (g(b) - g(a)) f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b)$$

$$h(a) = (f(b) - f(a)) g(a) - (g(b) - g(a)) f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$h'(x) = (f(b) - f(a)) g'(x) - (g(b) - g(a)) f'(x) \quad (3)$$

Vemos que  $h(b) = h(a)$  y, por tanto, de (1) y (3) obtenemos:

$$h'(c)(b - a) = 0 \Rightarrow h'(c) = 0$$

$$\Rightarrow (f(b) - f(a)) g'(c) - (g(b) - g(a)) f'(c) = 0$$

$$\Rightarrow (f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 5.2

En los problemas del 1 al 4, verificar que la función dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo indicado. Hallar todos los puntos  $c$  que satisfacen la conclusión del teorema.

1.  $f(x) = x^3 - 4x$ ,  $[0, 2]$

2.  $g(x) = \sin x + \cos x - 1$ ,  $[0, 2\pi]$

3.  $h(x) = 8x^{2/3} - x^{5/3}$ ,  $[0, 8]$

4.  $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$ ,  $[0, 4]$

En los problemas del 5 al 10, verificar que la función dada satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo indicado. Hallar todos los puntos  $c$  que satisfacen la conclusión del teorema.

5.  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $[-1, 0]$

6.  $g(x) = \frac{1}{x} + x$ ,  $[1, 2]$

7.  $h(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$ ,  $[1, 9]$

8.  $f(x) = \ln(1+x^2)$ ,  $[0, 1]$

9.  $h(x) = \ln \cos x$ ,  $[0, \pi/3]$

10.  $g(x) = \tan^{-1}x$ ,  $[-1, 1]$

11. Probar que la ecuación  $x^5 + 10x + 4 = 0$  tiene exactamente una raíz real

12. Si  $a > 0$ , probar que la ecuación  $x^3 + ax - 1 = 0$  tiene exactamente una raíz real.

13. Probar que  $x^4 + 4x + b = 0$  tiene, a lo más, dos raíces reales.

Sugerencia: Si  $f(x) = x^4 + 4x + b$ . ¿Cuántas raíces tiene  $f'(x) = 0$ ?

14. Si  $a$  y  $b$  son constantes y  $n$  un natural, probar que la ecuación

$$x^{2n+1} + ax + b = 0$$

tiene, a lo más, tres raíces reales.

Sugerencia: Sea  $f(x) = x^{2n+1} + ax + b$ . ¿Cuántas raíces reales tiene  $f'(x) = 0$ ?

15. Si  $a$  y  $b$  son constantes y  $n$  un natural, probar que la ecuación

$$x^{2n} + ax + b = 0$$

tiene, a lo más, dos raíces reales.

Sugerencia: Sea  $f(x) = x^{2n} + ax + b$ . ¿Cuántas raíces reales tiene  $f'(x) = 0$ ?

16. Probar que la ecuación  $3\tan x + x^2 = 2$  tiene exactamente una raíz en  $[0, \pi/4]$ .

17. Si  $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ , probar que la ecuación  $P'(x) = 0$  tiene tres raíces reales.

18. Probar que un polinomio de grado 3 tiene a lo más 3 raíces reales. Sugerencia: Suponga que tiene 4 raíces y razone como en el problema resuelto 2.



19. Probar que un polinomio de grado  $n$  tiene a lo más  $n$  raíces reales. Sugerencia: Suponga que tiene  $n + 1$  raíces y razone como en el problema resuelto 3. No olvides usar inducción.

20. Si  $g(1) = 8$  y  $g'(x) \geq 3$  para todo  $x$ , ¿cuál es el menor valor posible que puede tener  $g(5)$ ?

21. Sean  $a$  y  $b$  reales y  $n$  un natural tales que  $0 < a < b$  y  $n > 1$ . Probar que:

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$$

Sugerencia: Aplicar el teorema del valor medio a  $f(x) = x^n$  en  $[a, b]$

22. Probar que  $e^x > 1 + x$ ,  $\forall x > 0$

23. a. Probar que para cualquier  $x > 1$  existe  $c \in (1, x)$  tal que

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

b. Usar la parte a. para probar que:

$$\sqrt{x} < \frac{1}{2} + \frac{x}{4}, \text{ para todo } x > 1$$

Sugerencia: Aplicar el teorema del valor medio a  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $[1, x]$ .

24. Sea  $g$  es impar y diferenciable en  $\mathbb{R}$ . Demostrar que para todo real  $a > 0$ , existe  $c \in (-a, a)$  tal que  $g'(c) = \frac{g(a)}{a}$

25. Usando el teorema del valor medio, probar que  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ .

26. Usando el teorema del valor medio, probar que  $|\tan^{-1}x - \tan^{-1}y| \leq |x - y|$ .

27. Probar que:  $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

28. Probar que:  $2 \sin^{-1}x = \cos^{-1}(1 - 2x^2)$ , para  $x \geq 0$ .

Sugerencia: Sea  $f(x) = 2 \sin^{-1}x - \cos^{-1}(1 - 2x^2)$  y probar que  $f$  es constante:

$$f(x) = C. \text{ Luego, mostrar que } C = 0$$

29. Probar que:  $2 \tan^{-1}x + \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} -\pi, & \text{si } x \leq -1 \\ \pi, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

*En los problemas del 30 al 32, verificar que la función dada satisface las hipótesis del teorema del valor medio de Cauchy en el intervalo indicado. Hallar los puntos  $c$  que satisfacen la conclusión del teorema.*

30.  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \cos x$ , en  $[0, \pi/2]$ .

31.  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ , en  $[1, e]$

32.  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{-x}$ , en  $[0, 1]$

## SECCION 5.3

### MONOTONIA, CONCAVIDAD Y CRITERIOS PARA EXTREMOS LOCALES

Sea  $f$  una función y  $I$  un intervalo. Recordemos que:

1.  $f$  es creciente en el intervalo  $I$  si para cualquier par de puntos  $x_1, x_2$  de  $I$  se cumple que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2.  $f$  es decreciente en el intervalo  $I$  si para cualquier par de puntos  $x_1, x_2$  de  $I$  se cumple que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3.  $f$  es monótona en el intervalo  $I$  si  $f$  es creciente o decreciente en  $I$ .

Contamos con un criterio que nos permitirá saber si una función es creciente o decreciente, conociendo el signo de la derivada.

#### TEOREMA 5.7 Criterio de Monotonía.

Sea  $f$  una función continua en un intervalo  $I$  y diferenciable en todo punto interior de  $I$ .

1. Si  $f'(x) > 0$  en todo punto interior de  $I$ , entonces  $f$  es creciente en  $I$ .
2. Si  $f'(x) < 0$  en todo punto interior de  $I$ , entonces  $f$  es decreciente en  $I$ .

#### Demostración

1. Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos puntos cualesquiera de  $I$ . Supongamos que  $x_1 < x_2$ . Como  $[x_1, x_2]$  está contenido en el intervalo  $I$ ,  $f$  es continua en  $[x_1, x_2]$  y es diferenciable en  $(x_1, x_2)$ . Por el teorema del valor medio, existe  $c$  en  $(x_1, x_2)$  tal que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) (x_2 - x_1).$$

$$\text{Pero } f'(c) > 0 \text{ y } x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Como  $x_1$  y  $x_2$  son dos puntos cualesquiera de  $I$ , se concluye que  $f$  es creciente en  $I$ .

2. Se procede como en 1.

**EJEMPLO 1.**

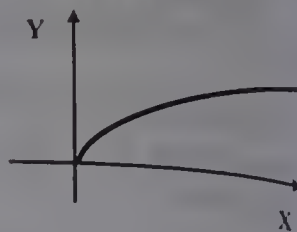
Probar que la función  $f(x) = \sqrt{x}$  es creciente en todo su dominio.

**Solución**

El dominio de  $f$  es el intervalo  $[0, +\infty)$ , en el cual  $f$  es continua. Además  $f$  es diferenciable en el intervalo  $(0, +\infty)$  y se cumple que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Luego, por la parte 1 del teorema anterior, concluimos que  $f(x) = \sqrt{x}$  es creciente en todo su dominio,  $[0, +\infty)$ .



La mayor parte de las funciones con las que trabajamos son crecientes en algunos intervalos y decrecientes en otros. A estos intervalos los llamaremos **intervalos de crecimiento y decrecimiento**, respectivamente. De acuerdo al teorema anterior, estos intervalos están comprendidos entre los puntos donde la derivada se anula o no está definida, o sea, los puntos críticos de  $f$ .

**EJEMPLO 2.**

Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$

**Solución**

Hallemos los puntos críticos de  $f$ :

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x+1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ó } x = 2$$

Ahora analizamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos:

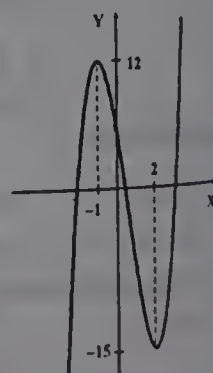
$$(-\infty, -1), (-1, 2) \text{ y } (2, +\infty):$$

$$x \in (-\infty, -1) \Leftrightarrow x < -1 \Rightarrow x+1 < 0 \text{ y } x-2 < 0 \Rightarrow$$

$$f'(x) = 6(x+1)(x-2) > 0 \Rightarrow f \text{ es creciente en el intervalo } (-\infty, -1].$$

Este resultado, así como los correspondientes a los otros intervalos, los sintetizamos en la siguiente tabla.

Aquí, la flecha ↗ indica que  $f$  es creciente y la flecha ↘ indica que  $f$  es decreciente.





$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$f'(x) = 6(-)(-) = +$		$f'(x) = 6(+)(-) = -$	$f'(x) = 6(+)(+) = +$
↗		↘	↗

La tabla dice  $f$  es: Creciente en  $(-\infty, -1]$  y en  $[2, +\infty)$ . Decreciente en  $[-1, 2]$

### CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA EXTREMOS LOCALES

El teorema anterior nos permite determinar, fácilmente, cuando un número crítico da lugar a un mínimo local, un máximo local o a ninguno de los dos casos. En el ejemplo anterior, examinemos el número crítico  $-1$ . El gráfico muestra que antes de  $-1$ , en el intervalo  $(-\infty, -1)$ ,  $f$  es creciente y después de  $-1$ , en el intervalo  $(-1, 2)$ ,  $f$  es decreciente. En consecuencia,  $f(-1) = 12$  es un máximo local. Los términos creciente y decreciente, de acuerdo al teorema anterior, podemos sustituirlos por  $f'(x) > 0$  en  $(-\infty, -1)$  y por  $f'(x) < 0$  en  $(-1, 2)$ .

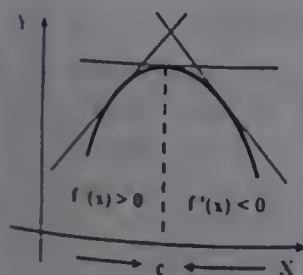
En términos precisos, tenemos el siguiente teorema.

#### TEOREMA 5.8 Criterio de la Primera Derivada para Extremos Locales.

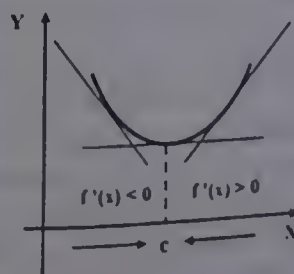
Sea  $f$  una función continua en un intervalo  $(a, b)$  y sea

$c \in (a, b)$  un punto crítico de  $f$ .

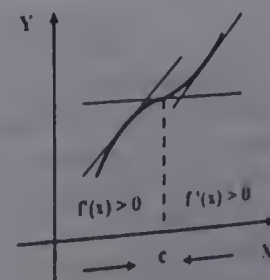
1. Si  $f'(x) > 0$  para  $x \in (a, c)$  y  $f'(x) < 0$  para  $x \in (c, b)$ , entonces  $f(c)$  es un máximo local.
2. Si  $f'(x) < 0$  para  $x \in (a, c)$  y  $f'(x) > 0$  para  $x \in (c, b)$ , entonces  $f(c)$  es mínimo local.
3. Si  $f'(x)$  tiene el mismo signo en  $(a, c)$  y en  $(c, b)$ , entonces  $f(c)$  no es un extremo local.



Máximo Local



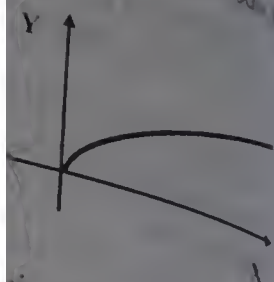
Mínimo Local



No hay Extremo Local

Ilustración

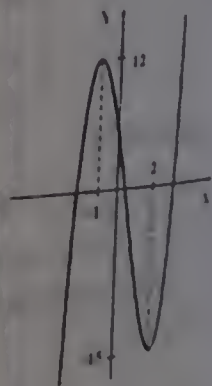
$x$  es creciente en todo



mos que  $f(x) = \sqrt{x}$  es

amos son crecientes en  
intervalos los llamamos  
amente. De acuerdo  
tre los puntos donde  
os de  $f$ .

de decrecimiento de



valo  $(-\infty, -1]$

otros intervalos

indica que  $f$  es

Las conclusiones de este teorema siguen inmediatamente del criterio de monotonía (Teorema 5.7).

**EJEMPLO 3.** Hallar los extremos locales de la función  $f(x) = x(5-x)^{2/3}$

**Solución**

**Paso 1.** Hallamos los puntos críticos:

$$f'(x) = x \left( \frac{2}{3} \right) (5-x)^{-1/3} (-1) + (5-x)^{2/3} = \frac{5(3-x)}{3\sqrt[3]{5-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5(3-x) \Rightarrow x = 3.$$

Además,  $f'(x)$  no existe en  $x = 5$ .

Luego, los puntos críticos de  $f$  son 3 y 5.

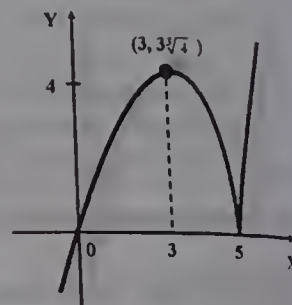
**Paso 2.** Aplicamos el criterio de la primera derivada. Para esto, analizamos el signo de la derivada en los intervalos

$$(-\infty, 3), (3, 5) \text{ y } (5, +\infty).$$

Los resultados los sintetizamos en la siguiente tabla:

$-\infty$	3	5	$+\infty$
$f'(x) = \frac{(+)}{(+)} = +$	$f'(x) = \frac{(-)}{(+)} = -$	$f'(x) = \frac{(-)}{(-)} = +$	
↗	↘	↗	

El criterio de la primera derivada nos dice que  $f(3) = 3\sqrt[3]{4}$  es un máximo local y  $f(5) = 0$  es un mínimo local.

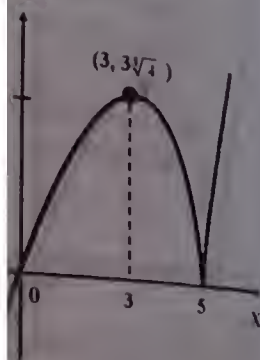


### CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXION

Las figuras siguientes, a pesar de ser los gráficos de funciones crecientes en el intervalo  $[a, b]$ , tienen una diferencia resaltante: Ellas se "doblan" en direcciones opuestas. La primera es cóncava hacia arriba y la segunda es cóncava hacia abajo. Para definir estos términos con precisión observemos sus correspondientes rectas tangentes. La gráfica que es cóncava hacia arriba siempre se mantiene encima de cualquiera de sus rectas tangentes. En cambio, la gráfica cóncava hacia abajo siempre se mantiene por debajo de cualquiera de sus tangentes. Ahora, si en lugar de las tangentes nos concentramos en sus pendientes, vemos que en las gráficas cóncavas hacia arriba, las pendientes van creciendo, mientras que en las cóncavas hacia abajo las pendientes van decreciendo. Como la pendiente está dada por la derivada, entonces concavidad hacia arriba significa derivada creciente y

mente del criterio de

$$f(x) = x(5-x)^{2/3}$$



$+\infty$   
+  
 $= 3\sqrt[3]{4}$  es un máximo

CIÓN

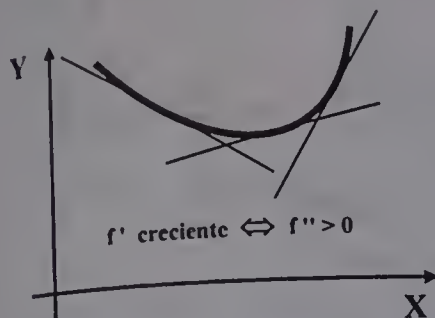
iones crecientes en el  
doblan" en direcciones  
da es cóncava hacia  
sus correspondientes  
siempre se mantiene  
gráfica cóncava hacia  
tangentes. Ahora, si en  
es, vemos que en las  
o, mientras que en las  
la pendiente está dada  
derivada creciente y

concavidad hacia abajo significa derivada decreciente. Este último resultado será nuestra definición de concavidad.

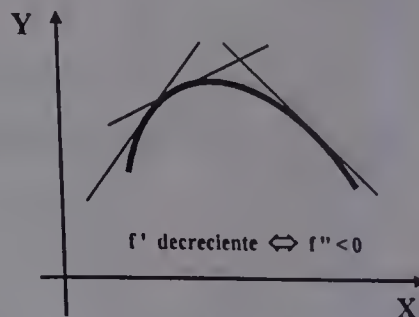
**DEFINICIÓN.**

Sea  $f$  una función diferenciable en un intervalo abierto  $I$ .

1. El gráfico de  $f$  es cóncavo hacia arriba en  $I$  si  $f'$  es creciente en  $I$ .
2. El gráfico de  $f$  es cóncavo hacia abajo en  $I$  si  $f'$  es decreciente en  $I$ .



Cóncava hacia arriba



Cóncava hacia abajo

El criterio de monotonía aplicado a la función derivada nos proporciona un criterio de concavidad. La frase: " $f$  es dos veces diferenciable en un intervalo  $I$ " significa que existe  $f''(x)$ , en todo punto  $x$  de  $I$ .

**TEOREMA 5.9**

**Criterio de concavidad.**

Sea  $f$  una función dos veces diferenciable en un intervalo abierto  $I$ .

1. Si  $f''(x) > 0$  para todo punto  $x$  interior de  $I$ , entonces el gráfico de  $f$  es cóncavo hacia arriba en  $I$ .
2. Si  $f''(x) < 0$  para todo punto  $x$  interior de  $I$ , entonces el gráfico de  $f$  es cóncavo hacia abajo en  $I$ .

**Demostración**

Simplemente se aplica el criterio de monotonía a la función derivada  $f'$ .

**EJEMPLO 4.**

Hallar los intervalos de concavidad de la siguiente función  $f$ , es decir, hallar los intervalos donde  $f$  es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

**Solución**

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$



Según el criterio de concavidad, debemos hallar los intervalos donde  $f''(x) > 0$  y donde  $f''(x) < 0$ .

Tenemos que:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad y \quad f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

Luego,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

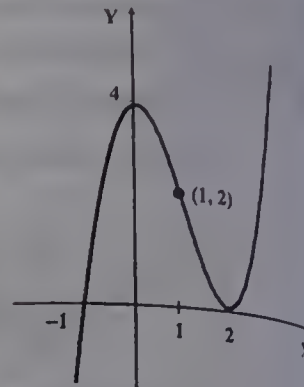
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \quad y \quad f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Para resumir tenemos la siguiente tabla.

$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x) = 6(-) = -$		$f''(x) = 6(+) = +$
∩		∪

Los símbolos  $\cup$  y  $\cap$  significan cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, respectivamente.

Luego, el gráfico de  $f$  es cóncavo hacia abajo en el intervalo  $(-\infty, 1)$ , y es cóncavo hacia arriba en el intervalo  $(1, +\infty)$ .



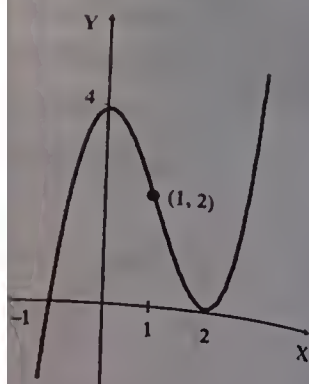
### PUNTOS DE INFLEXION Y NUMEROS CRITICOS DE SEGUNDO ORDEN

En el gráfico del ejemplo anterior el punto  $(1, 2)$  es un punto muy especial para la concavidad. Precisamente, en este punto el gráfico cambia de cóncavo hacia abajo a cóncavo hacia arriba. Por esta razón a este punto se le llama punto de inflexión. Observar que para el punto de inflexión  $(1, 2)$  se cumple que  $f''(1) = 0$ .

#### DEFINICION.

Sea  $f$  una función continua en  $c$ . Diremos que el punto  $(c, f(c))$  es un **punto de inflexión** del gráfico de  $f$  si éste es cóncavo hacia arriba a un lado de  $c$  y cóncavo hacia abajo en el otro lado.

Si  $(c, f(c))$  es un punto de inflexión de la función  $y = f(x)$ , para los  $x$  cercanos a  $c$  debe cumplirse que los signos de  $f''(x)$  antes de  $c$  y después de  $c$  deben ser distintos. En el mismo punto  $c$  la derivada  $f''(c)$  puede o no existir, pero si existe, debe cumplirse que  $f''(c) = 0$ . Luego, los candidatos a ser puntos de inflexión son los puntos donde  $f''(c) = 0$  o  $f''(c)$  no existe, o sea los números críticos de la función derivada  $f'$ , a los que llamaremos **números críticos de segundo orden de  $f$** .



ya y cóncava hacia abajo,  
intervalo  $(-\infty, 1)$ , y es

### CRÍTICOS DE

punto muy especial para  
cambia de cóncavo hacia  
o se le llama punto de  
cumple que  $f''(1) = 0$ .

os que el punto  $(c, f(c))$   
le  $f$  si éste es cóncavo  
hacia abajo en el otro

$x$ ), para los  $x$  cercanos  
después de  $c$  deben ser  
e o no existir, pero si  
latos a ser puntos de  
te, o sea los números  
múmeros críticos de de

**EJEMPLO 5.** Hallar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión del gráfico de la función

$$f(x) = -x^4 + 6x^2 - 1$$

**Solución**

**Paso 1.** Números críticos de  $f'$ :

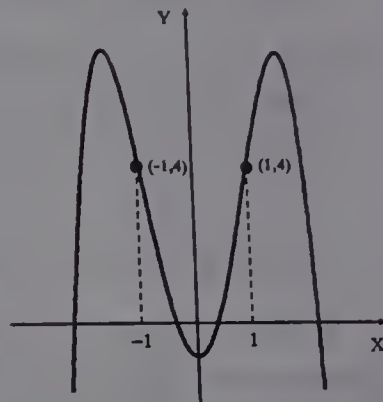
$$f'(x) = -4x^3 + 12x \Rightarrow$$

$$f''(x) = -12x^2 + 12 = -12(x+1)(x-1)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12(x+1)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1$$

Los puntos críticos de  $f'$  son  $-1$  y  $1$ .



**Paso 2.** Signo de  $f''$  en  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  y  $(1, +\infty)$ .

Tenemos la siguiente tabla:

$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f''(x) = -(-)(-) = -$	$f''(x) = -(+)(-) = +$	$f''(x) = -(+)(+) = -$	
∩	∪	∩	

Luego, el gráfico de  $f$  es cóncavo hacia abajo en los intervalos  $(-\infty, -1)$  y  $(1, +\infty)$ , y es cóncavo hacia arriba en  $(-1, 1)$ .

La tabla, además, nos indica que hay cambios de concavidad al pasar por  $-1$  y por  $1$ . En consecuencia, tenemos dos puntos de inflexión:

$$(-1, f(-1)) = (-1, 4) \quad \text{y} \quad (1, f(1)) = (1, 4).$$

**EJEMPLO 6.** Dada la función  $g(x) = \sqrt[3]{x-2} + 1$ . Hallar:

- Los números críticos de  $g'$ , o sea los números críticos de segundo orden de  $g$ .
- Los intervalos de concavidad.
- Los puntos de inflexión.

**Solución**

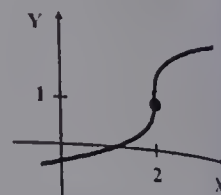
a. Puntos críticos de  $g'$ :

$$g(x) = (x-2)^{1/3} + 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3}(x-2)^{-2/3} \Rightarrow g''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^5}}$$

$g''(x)$  no se anula en ningún punto; sin embargo  $g''(x)$  no existe en 2.  
Luego,  $g'$  tiene un solo número crítico, que es 2.

b. Signos de  $g''$  en los intervalos  $(-\infty, 2)$  y  $(2, +\infty)$

$-\infty$	$2$	$+\infty$
$g''(x) = -\frac{2}{(-)} = +$	$g''(x) = -\frac{2}{(+)} = -$	
$\cup$	$\cap$	



El gráfico es cóncavo hacia arriba en  $(-\infty, 2)$  y hacia abajo en  $(2, +\infty)$ .

c. De acuerdo al resultado anterior,  $(2, f(2)) = (2, 1)$  es un punto de inflexión.

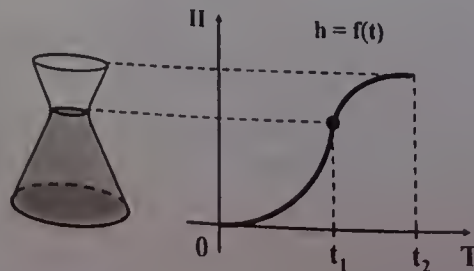
El siguiente ejemplo nos presenta los conceptos de concavidad y de punto de inflexión presentes en la vida real.

**EJEMPLO 7.** Se vierte agua a razón constante (un volumen fijo por unidad de tiempo) en el frasco mostrado en la figura. Construir un gráfico de la altura del agua en el frasco como función del tiempo:  $h = f(t)$ .

**Solución**

Sin duda que la función  $h = f(t)$  es creciente. Aún más la velocidad con que crece la altura  $h$  del agua es variable. Al inicio, debido a la forma del frasco, la velocidad  $v(t)$  con que sube el agua crece hasta llegar al cuello del frasco (cuando  $h = f(t_1)$ ). A partir de este punto, la velocidad es decreciente. En resumen:

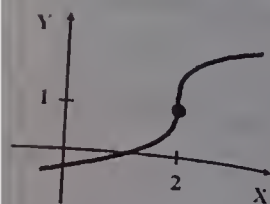
1.  $v(t)$  es creciente en  $[0, t_1]$  y, por tanto,  $v'(t) > 0$  en  $(0, t_1)$
2.  $v(t)$  es decreciente en  $[t_1, t_2]$  y, por tanto,  $v'(t) < 0$  en  $(t_1, t_2)$





$$\Rightarrow g''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^5}}$$

$g''(x)$  no existe en 2.



...a abajo en  $(2, +\infty)$ .  
...un punto de inflexión.

...concavidad y de punto de

...umen fijo por unidad de  
...ra. Construir un gráfico  
...no función del tiempo:

...as la velocidad con que  
...la forma del frasco, la  
...ello del frasco (cuando  
...e. En resumen:

... $(0, t_1)$

...en  $(t_1, t_2)$

Pero,  $v(t) = f'(t)$  y, por tanto,  $v'(t) = f''(t)$ . Luego, de (1) y (2):

$$(3) f''(t) > 0 \text{ en } (0, t_1) \quad \text{y} \quad (4) f''(t) < 0 \text{ en } (t_1, t_2),$$

de donde concluimos que el gráfico de  $h = f(t)$  es cóncavo hacia arriba en  $(0, t_1)$ , es cóncavo hacia abajo en  $(t_1, t_2)$  y que  $(t_1, f(t_1))$  es un punto de inflexión.

### CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA EXTREMOS LOCALES

La segunda derivada nos proporciona otro método simple para determinar la naturaleza de un número crítico.

**TEOREMA 5.10** Criterio de la segunda derivada para extremos locales.

Supongamos que  $f'(c) = 0$  y que  $f''$  es continua en un intervalo abierto que contiene a  $c$ .

1.  $f''(c) > 0 \Rightarrow f(c)$  es un mínimo local.

2.  $f''(c) < 0 \Rightarrow f(c)$  es un máximo local.

**Demostración**

Como  $f'(c) = 0$ ,  $c$  es número crítico.

1. Como  $f''(c) > 0$  y  $f''$  es continua en  $c$ , existe un intervalo abierto  $I$  tal que

$$f''(x) > 0, \forall x \in I.$$

Esto significa, por el criterio de concavidad, que el gráfico de  $f$  es cóncavo hacia arriba en el intervalo  $I$ . En consecuencia,  $f(c)$  es un mínimo local.

2. Como  $f''(c) < 0$  y  $f''$  es continua en  $c$ , existe un intervalo abierto  $I$  tal que

$$f''(x) < 0, \forall x \in I.$$

Esto significa, por el criterio de concavidad, que el gráfico de  $f$  es cóncavo hacia abajo en el intervalo  $I$ . En consecuencia,  $f(c)$  es un máximo local.

**EJEMPLO 8.** Determinar, aplicando el criterio de la segunda derivada, los extremos locales de

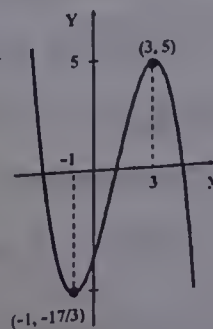
$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - 4.$$

**Solución**

Hallamos los puntos críticos:

$$f'(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -(x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ó } x = 3$$



Los puntos críticos de  $f$  son  $-1$  y  $3$ .

Aplicamos el criterio de la segunda derivada.

$$f''(x) = -2x + 2 = -2(x - 1)$$

Como  $f''(-1) = -2(-1 - 1) = 4 > 0$ , entonces  $f(-1) = -\frac{17}{3}$  es un mínimo local.

Como  $f''(3) = -2(3 - 1) = -4 < 0$ , entonces  $f(3) = 5$  es un máximo local.

### EXTREMO LOCAL ÚNICO EN UN INTERVALO ARBITRARIO

El teorema del valor extremo (teorema 5.1) garantiza la existencia de valores extremos de una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ . Desafortunadamente, no tenemos un teorema de ese calibre para intervalos que no son cerrados. Sin embargo, algo podemos conseguir si sabemos que una función continua tiene un único extremo local en un intervalo cualquiera  $I$ . El intervalo  $I$  no tiene ninguna restricción. Este puede ser abierto, cerrado, semicerrado, finito o infinito.

#### TEOREMA 5.11 Un extremo local único es un extremo absoluto.

Sea  $f$  una función continua en un intervalo  $I$ . Si  $f(c)$  es un extremo local único en  $I$ , entonces  $f(c)$  es un extremo absoluto. En términos más precisos:

- Si  $f(c)$  es un máximo local en  $I$ , entonces  $f(c)$  es un máximo absoluto de  $f$  en  $I$ .
- Si  $f(c)$  es un mínimo local en  $I$ , entonces  $f(c)$  es un mínimo absoluto de  $f$  en  $I$ .

#### Demostración

Ver el problema resuelto 3.

**EJEMPLO 9.** Hallar los extremos absolutos de  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ , en el intervalo abierto  $(0, +\infty)$ .

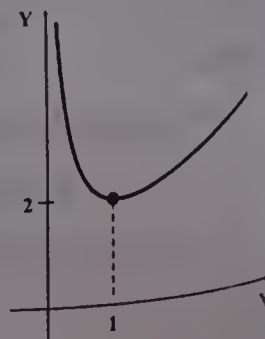
#### Solución

Números críticos:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ o } x = -1$$

Desechamos a  $-1$  por no estar en  $(0, +\infty)$ .



Apliquemos el crítico de la segunda derivada a 1:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0$$

Luego,  $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$  es un mínimo local.

Como  $f(1) = 2$  es el único número extremo local en  $(0, +\infty)$ , entonces  $f(1) = 2$  es mínimo absoluto de  $f$  en el intervalo  $(0, +\infty)$ .

$= -\frac{17}{3}$  es un mínimo local.  
5 es un máximo local.

### VALOR ARBITRARIO

la existencia de valores  
intervalo cerrado  $[a, b]$ .  
bre para intervalos que no  
sabemos que una función  
ualquiera  $I$ . El intervalo  $I$   
ado, semicerrado, finito o

mo absoluto.

intervalo  $I$ . Si  $f(c)$  es un  
es  $f(c)$  es un extremo

onces  $f(c)$  es un máximo

onces  $f(c)$  es un mínimo

$x + \frac{1}{x}$ , en el intervalo



Si el intervalo  $I$  del teorema anterior es semiabierto:  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, +\infty)$  o  $(-\infty, b]$ , es posible que  $f$  tenga los dos extremos absolutos. Es claro que, de ser así, el segundo extremo debe el valor de la función en el extremo cerrado. El siguiente ejemplo nos ilustra esta situación.

**EJEMPLO 10.** Si es posible, hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x) = 9xe^{-x},$$

en el intervalo  $[0, +\infty)$

**Solución**

Halleemos los números críticos:

$$f'(x) = -9xe^{-x} + 9e^{-x} = -9e^{-x}(x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -9e^{-x}(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$f$  tiene un único número crítico, que es  $x = 1$ , en el intervalo  $[0, +\infty)$ .

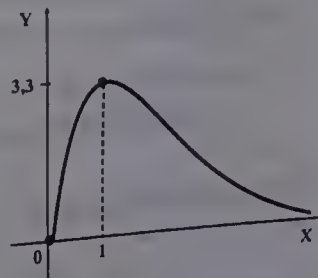
Apliquemos el criterio de la segunda derivada:

$$f''(x) = 9e^{-x}(x - 1) - 9e^{-x} = 9e^{-x}(x - 2)$$

$$f''(1) = 9e^{-1}(1 - 2) = -\frac{9}{e} < 0$$

Luego,  $f(1) = 9(1)e^{-1} = \frac{9}{e} \approx 3,3$  es un máximo local, el cual, por ser el único extremo local,  $f(1) = \frac{9}{e} \approx 3,3$  es el máximo absoluto en el intervalo  $[0, +\infty)$ .

Por otro lado, como  $0 < f(x)$  para  $x > 0$  y  $f(0) = 0$ , concluimos que  $f(0) = 0$  es el mínimo absoluto de  $f$  en  $[0, +\infty)$ .



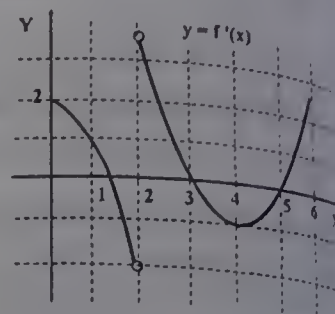


PROBLEMAS RESUELTOS 5.3

**PROBLEMA 1.**

El gráfico adjunto es el gráfico de la derivada  $f'$  de una función continua  $f$ . Determinar:

- Los intervalos de monotonía de  $f$ .
- Los números críticos de  $f$  y decidir la clase de extremo local a que dan lugar.
- Los intervalos de concavidad de  $f$ .
- Los números críticos de segundo orden de  $f$  y los puntos de inflexión.
- Esbozar el gráfico de sabiendo que  $f(0) = 3$



**Solución.**

- Vemos que  $f'(x) > 0$  en los intervalos  $(0, 1)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(5, +\infty)$  y que  $f'(x) < 0$  en los intervalos  $(1, 2)$  y  $(3, 5)$ . Luego,  $f$  es creciente en  $[0, 1]$ ,  $[2, 3]$ ,  $[5, +\infty)$  y es decreciente en  $[1, 2]$  y  $[3, 5]$ .

- Son números críticos: 1, 2, 3, y 5. En efecto:

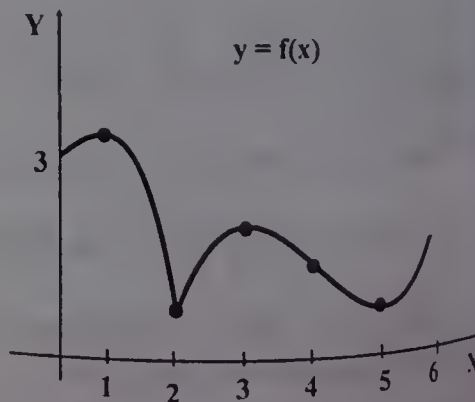
$$f'(1) = f'(3) = f'(5) = 0 \text{ y no existe } f'(2).$$

La parte a y el criterio de la primera derivada nos dicen que  $f(1)$  y  $f(3)$  son máximos locales y que  $f(2)$  y  $f(5)$  son un mínimos locales.

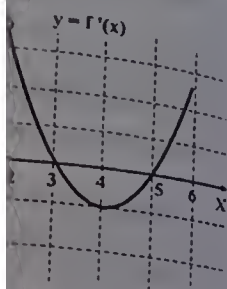
- $f'(x)$  es decreciente en  $(0, 2)$  y en  $(2, 4)$ .  $f'(x)$  es creciente en  $(4, +\infty)$ . Luego,  $f$  es cóncava hacia abajo en  $(0, 2)$  y en  $(2, 4)$ , y es cóncava hacia arriba en  $(4, +\infty)$ .

- La gráfica nos muestra que  $f'$  tiene un mínimo local en  $x = 4$  y, por tanto,  $f''(4) = 0$ . Por otro lado, como  $f'$  es discontinua en  $x = 2$ , no existe  $f''(2)$ . Luego, tenemos dos números críticos de segundo orden, 2 y 4. Sin embargo, la parte c anterior nos dice que sólo  $(4, f(4))$  es un punto de inflexión.

- La gráfica que esbozamos sólo nos muestra la forma de ella, sin mucha precisión en cuanto a las ordenadas de los puntos notables, ya que estas ordenadas son desconocidas.



derivada  $f'$  de una

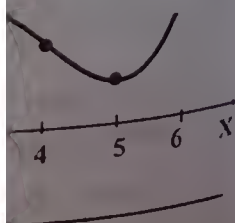


y que  $f'(x) < 0$  en  $[2, 3]$ ,  $[5, +\infty)$  y es

e  $f(1)$  y  $f(3)$  son

$(4 + \infty)$ . Luego, a hacia arriba en

$f(x)$



**PROBLEMA 2.** Dada la función  $f(x) = x^4 e^{-x}$ , hallar:

- Los números críticos.
- Los intervalos de monotonicidad.
- Los extremos locales.
- Los números críticos de segundo orden.
- Los intervalos de concavidad.
- Los puntos de inflexión.

**Solución**

a. Números Críticos e Intervalos de monotonicidad.

$$f'(x) = 4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x} = x^3(4-x)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3(4-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = 4$$

Los puntos críticos son 0 y 4.

b. Intervalos de monotonicidad:

$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x) = (-)(+)(+) = -$	$f'(x) = (+)(+)(+) = +$	$f'(x) = (+)(-)(+) = -$	
↓	↑	↓	

La función  $f$  es decreciente en  $(-\infty, 0]$  y en  $[4, +\infty)$  y es creciente en  $[0, 4]$ .

c. Extremos relativos.

El cuadro anterior y el criterio de la primera derivada nos dicen que:

$$f(0) = 0 \text{ es un mínimo local y } f(4) = 4^4 e^{-4} = \frac{256}{e^4} \approx 4,7 \text{ es un máximo local.}$$

d. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión

$$f''(x) = 12x^2 e^{-x} - 4x^3 e^{-x} - (4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x}) = x^2(x^2 - 8x + 12)e^{-x} \Rightarrow$$

$$f''(x) = x^2(x-2)(x-6)e^{-x}. \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \text{ ó } x = 6$$

Los números críticos de segundo orden son: 0, 2 y 6.

e. Intervalos de concavidad:

$-\infty$	0	2	6	$+\infty$
$f''(x) = (+)(-)(-)(+) = +$	$f''(x) = (+)(-)(-)(+) = +$	$f''(x) = (+)(+)(-)(+) = -$	$f''(x) = (+)(+)(+)(+) = +$	
∪	∪	∩	∪	

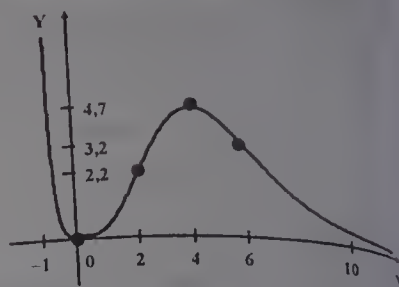
La tabla nos dice que la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba en  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 2)$  y en  $(6, +\infty)$ ; y es cóncava hacia abajo  $(2, 6)$ .

Los puntos de inflexión son:

$$(2, f(2)) = (2, 16e^{-2}) \approx (2, 2,2)$$

y

$$(6, f(6)) = (6, 1296e^{-6}) \approx (6, 3,2)$$



**PROBLEMA 3.**

Probar el teorema 5.11.

Sea  $f$  una función continua en un intervalo  $I$ . Si  $f$  tiene un extremo local único en  $I$ , entonces ese extremo local es un extremo absoluto. Aún más,

- Si  $f(c)$  es un máximo local en  $I$ , entonces  $f(c)$  es un máximo absoluto de  $f$  en  $I$ .
- Si  $f(c)$  es un mínimo local en  $I$ , entonces  $f(c)$  es un mínimo absoluto de  $f$  en  $I$ .

**Solución**

Probamos sólo la parte a. Para b se procede en forma similar.

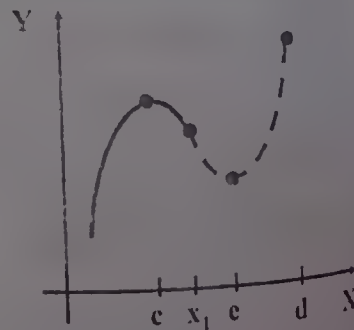
- Sea  $f(c)$  un máximo local y es el único extremo local que  $f$  tiene en el intervalo  $I$ . Por definición,  $c$  es un punto interior de  $I$ .

Procedemos por reducción al absurdo. Si  $f(c)$  no es máximo absoluto, existe un  $d$  en  $I$  tal que  $f(c) < f(d)$ . Supongamos que  $c < d$ . Por ser  $f(c)$  un máximo local, existen números  $x_1$ , entre  $c$  y  $d$ , tal que

$$f(x_1) < f(c) < f(d) \quad (1)$$

Pero, por el teorema el valor intermedio, existe un número  $e$  en el intervalo cerrado  $[c, d]$  tal que  $f(e)$  es el mínimo de  $f$  en  $[c, d]$ .

Se debe tener que  $f(e) \leq f(x_1)$  y, por (1),  $f(e) < f(c) < f(d)$ . Luego,  $c < e < d$  y  $f(e)$  es un mínimo local distinto de  $f(c)$ . Esto contradice la unicidad de  $f(c)$ .





PROBLEMAS PROPUESTOS 5.3

1. Bosquejar el gráfico de una función  $f$  que cumple:

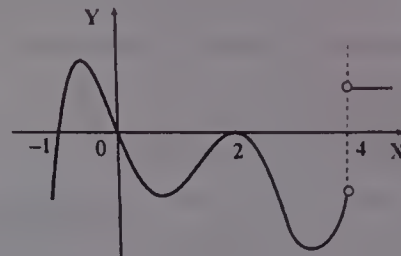
$$f(2) = -2, \quad f'(2) = 0, \quad f''(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Bosquejar el gráfico de una función  $f$  que cumple:

$$f(2) = 2, \quad \text{No existe } f'(2), \quad f''(x) > 0 \text{ si } x < 2, \quad f''(x) < 0 \text{ si } x > 2$$

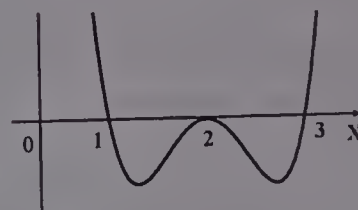
3. El dibujo adjunto es el gráfico de una la derivada  $f'$  de una función continua  $f$ . Determinar:

- Los números críticos de  $f$
- Los intervalos de monotonía.
- Los números críticos que correspondan a máximos o mínimos locales



4. El dibujo adjunto es el gráfico de la segunda derivada  $f''$  de una función  $f$ . Determinar:

- Los números críticos de segundo orden.
- Los intervalos de concavidad.
- Los números críticos de segundo orden que correspondan a puntos de inflexión



En los problemas del 5 al 18, hallar:

a. Los números críticos.

b. Los extremos locales

c. Intervalos de concavidad

d. Intervalos de monotonía.

e. Los números críticos de segundo orden

f. Puntos de inflexión.

5.  $f(x) = -2x^2 - 8x + 3$

6.  $f(x) = x^3 - 3x + 1$

7.  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 12$

8.  $g(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

9.  $h(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$

10.  $g(x) = \frac{x}{x-2}$

11.  $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$

12.  $f(x) = 2x^{1/3} + x^{2/3}$

13.  $g(x) = x |x|$

14.  $h(x) = x - \ln x$

15.  $f(x) = x e^{x^2}$

16.  $f(x) = x - 2 \sin x$ , en  $[0, 2\pi]$

17.  $g(x) = \cos^2 x - 2 \sin x$ , en  $[0, 2\pi]$

18.  $h(x) = 2x - \sin^{-1} x$ , en  $[-1, 1]$

En los problemas 19 y 20, bosquejar el gráfico de la función continua  $f$  que satisface las condiciones dadas.

19.  $f'(x) > 0$  si  $x < 0$  ó  $0 < x < 3$ ,  $f'(x) < 0$  si  $x > 3$

316

$$f'(0) = 0, f(0) = 1, f'(3) = 0, f(3) = 4$$

$$f''(x) < 0 \text{ si } x < 0 \text{ ó } 2 < x < 5, f''(x) > 0 \text{ si } 0 < x < 2 \text{ ó } x > 5$$

$$20. f'(x) > 0 \text{ si } x < 2, f'(x) < 0 \text{ si } 2 < x < 5, f'(x) = 1 \text{ si } x > 5.$$

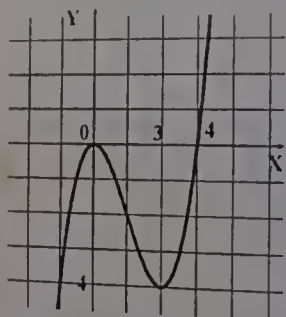
$$f(0) = f(4) = 0, f(2) = 2. \text{ No existen } f'(2) \text{ y } f'(5).$$

$$f''(x) < 0 \text{ si } x < 0 \text{ ó } 4 < x < 5, f''(x) > 0 \text{ si } 0 < x < 2 \text{ ó } 2 < x < 4$$

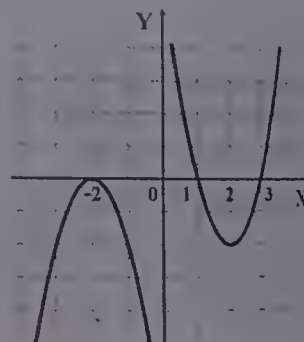
En los problemas 21 y 22, se dan las gráficas de la derivada  $f'$  de una función continua  $f$ . Determinar:

- Los números críticos de  $f$ .
- Los intervalos de monotonía de  $f$ .
- Los números críticos que dan lugar a extremos locales.
- Los números críticos de segundo orden de  $f$ .
- Los intervalos de concavidad de  $f$ .
- Los números críticos de segundo orden que dan lugar a puntos de inflexión.
- Esbozar el gráfico.

21.



22.



En los problemas 23 y 24 se tiene jarrones en los cuales se vierte agua a una razón constante. En cada caso, esbozar la gráfica de la función altura del agua como función del tiempo,  $h = f(t)$ . Mostrar la concavidad y los puntos de inflexión.

23.



24.



En los problemas del 21 al 26, hallar los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado.

$$25. h(x) = 4x^3 - 3x^4, \quad (-\infty, +\infty)$$

$$24. g(x) = 4 - 2(x - 1)^{2/3} \text{ en } [0, +\infty)$$

$$27. g(x) = x \ln x, \quad (0, e)$$

$$28. h(x) = (x + 1)e^{-x} \quad (-\infty, +\infty)$$

29. Probar que una función cúbica  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tiene uno y sólo un punto de inflexión.

30. Si la función cúbica  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tiene por raíces a  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ , probar que la abscisa del punto de inflexión es  $x = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$

Sugerencia:  $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ .

31. Si  $f$  y  $g$  son cóncavas hacia arriba en el intervalo  $I$ , probar que  $f + g$  es cóncava hacia arriba en  $I$ .

32. Si  $f$  es positiva y cóncava hacia arriba en un intervalo  $I$ , probar que la función  $g(x) = [f(x)]^2$  es cóncava hacia arriba.

33. Sean  $f$  y  $g$  positivas y cóncavas hacia arriba en el intervalo  $I$ , probar:

a. Si  $f$  y  $g$  son crecientes, entonces  $fg$  es cóncava hacia arriba en  $I$ .

b. Si  $f$  y  $g$  son decrecientes, entonces  $fg$  es cóncava hacia arriba en  $I$ .

## SECCION 5.4

### FORMAS INDETERMINADAS. REGLA DE L'HÔPITAL

Un límite de una función  $F(x)$  toma una forma indeterminada en  $x = a$  si al evaluar  $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$  mediante las leyes de los límites, (ley de la suma, del cociente,

etc.), se obtiene una de las siguientes expresiones:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

Estas expresiones se llaman formas indeterminadas.

Así,

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \text{ tiene la forma indeterminada } \frac{0}{0} \text{ en } x = 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \text{ tiene la forma indeterminada } \frac{\infty}{\infty} \text{ en } x = +\infty.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) \text{ tiene la forma indeterminada } \infty - \infty \text{ en } x = 0.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\cot x} \text{ tiene la forma indeterminada } 1^\infty \text{ en } x = 0.$$



A continuación estudiaremos cada una de estas formas indeterminadas. Las fundamentales son dos  $= \frac{0}{0}$  y  $\frac{\infty}{\infty}$ .

A la indeterminada  $0/0$  ya la hemos encontrado en el capítulo 3, y la hemos resuelto recurriendo a procedimientos algebraicos. En esta parte presentamos otra técnica, conocida como la regla de L'Hôpital, la cual nos ayuda a resolver todas las antes mencionadas.

**TEOREMA 5.6** Regla de L'Hôpital. Indeterminadas  $\frac{0}{0}$  y  $\frac{\infty}{\infty}$

Si

1.  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables y  $g'(x) \neq 0$  cerca de  $a$ , excepto posiblemente en  $a$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$   
ó

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$

3. Existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (finito o infinito)

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El teorema también es válido para límites laterales o infinitos. Es decir, se puede reemplazar  $x \rightarrow a$  por  $x \rightarrow a^+$ ,  $x \rightarrow a^-$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$

La forma  $\frac{\infty}{\infty}$  es una manera abreviada para resumir cuatro casos:

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty} \text{ y } \frac{-\infty}{-\infty}.$$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 11 para el caso  $0/0$ . Omitimos el caso  $\infty/\infty$ .

**EJEMPLO 1.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{\ln x + x - 1}$

**Solución**

Verifiquemos que se cumplen las hipótesis de la regla de L'Hôpital.

1. Las funciones  $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$  y  $g(x) = \ln x + x - 1$  son diferenciables en una vecindad de 1 (cerca de 1) y

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1 \text{ y, por tanto, } g'(x) \neq 0 \text{ cerca de 1.}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x^2 + 2x - 2) = 1 - 1 + 2 - 2 = 0. \quad \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x + x - 1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$$

Luego, el límite dado es una indeterminada del tipo  $\frac{0}{0}$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{D_x(x^3 - x^2 + 2x - 2)}{D_x(\ln x + x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x + 2}{1/x + 1} = \frac{3(1)^2 - 2(1) + 2}{1/1 + 1} = \frac{3 - 2 + 2}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

La regla de regla de L'Hôpital nos dice que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{\ln x + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{D_x(x^3 - x^2 + 2x - 2)}{D_x(\ln x + x - 1)} = \frac{3}{2}$$

**NOTA.** En el ejemplo anterior hemos sido minuciosos: Hemos verificado todas las hipótesis de la regla de L'Hôpital. En los ejemplos y problemas que siguen, con el ánimo de simplificar la exposición, sólo nos ocuparemos de la hipótesis 2, para reconocer el tipo de indeterminada. La verificación de las otras hipótesis queda a cargo del lector.

**EJEMPLO 2.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\tan x}{\cot 2x}$

**Solución**

Tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \cot 2x = -\infty. \text{ Este límite es un caso } \frac{+\infty}{-\infty}$$

Aplicando la regla de regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\tan x}{\cot 2x} &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{D_x \tan x}{D_x \cot 2x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sec^2 x}{-2 \operatorname{cosec}^2 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{1/\cos^2 x}{-2/\sin^2 2x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sin^2 2x}{-2 \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{4 \sin^2 x \cos^2 x}{-2 \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (-2 \sin^2 x) = -2 (\sin(\pi/2))^2 = -2 (1)^2 = -2 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 3.** Probar que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$ , donde  $p > 0$

Este resultado muestra que cualquier potencia positiva  $x^p$  de  $x$ , domina a la función logarítmica  $y = \ln x$ . En otras palabras, la función  $y = \ln x$  tiende a  $+\infty$  más lentamente que cualquier potencia positiva  $x^p$  de  $x$ .

**Solución**

Tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p = +\infty. \text{ Este límite es un caso } \frac{+\infty}{+\infty}$$

Aplicando la regla de regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D_x \ln x}{D_x (x^p)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{px^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(px^{p-1})} \\ &= \frac{1}{p} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p} = \frac{1}{p} \left( \frac{1}{+\infty} \right) = \frac{1}{p} (0) = 0 \end{aligned}$$

En algunos casos es necesario aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez. En el siguiente ejemplo la aplicamos 2 veces:

**EJEMPLO 3.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{2x}$

**Solución**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty. \text{ Este límite es un caso } \frac{+\infty}{+\infty}$$

Aplicando la regla de regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D_x \ln(1+e^x)}{D_x (2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x / (1+e^x)}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2(1+e^x)}$$

El último límite también es del tipo  $\infty/\infty$ . Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2(1+e^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^x} = \frac{1}{2}$$



**EJEMPLO 4.** Probar que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ , donde  $n$  es un entero positivo.

Este resultado nos muestra que la función exponencial  $y = e^x$  domina a cualquier potencia positiva  $x^n$  de  $x$ . En otras palabras, la función exponencial tiende a  $+\infty$  más rápidamente que cualquier potencia  $x^n$  de  $x$ .

**Solución**

Tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty. \text{ Este límite es un caso } \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Aplicando la regla de L'Hôpital  $n$  veces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D_x(e^x)}{D_x(x^n)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D_x(e^x)}{D_x(nx^{n-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) \dots 1x^0} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n!} = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \frac{1}{n!} (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

**PRECAUCION.**

Antes de aplicar la regla de L'Hôpital se debe tener la precaución de verificar que las hipótesis de ésta se cumplen. Los dos siguientes ejemplos nos muestran como se llega a resultados errados cuando no se tiene tal precaución.

**EJEMPLO 5.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x + x^2}$

**Solución**

Es un caso  $\frac{0}{0}$ . Aplicando la regla de L'Hôpital dos veces se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{1 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin 2x}{2} = 0$$

Este resultado es incorrecto. Esto se debe a que el segundo límite no es una forma indeterminada. En efecto,  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 2x = 2 \neq 0$ .

El resultado correcto es como sigue:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{1 + 2x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 2x}{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)} = \frac{2}{1} = 2$$

**EJEMPLO 6.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$

**Solución**

Es un caso  $\frac{0}{0}$ . Aplicando la regla de L'Hôpital se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$$

El último límite no existe. En efecto, para  $x = 2n\pi$  y para  $x = (2n+1)\pi$ , con  $n$  cualquier entero, se tiene:

$$\frac{1 + \cos 2n\pi}{1 + \sin 2n\pi} = \frac{1+1}{1+0} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{1 + \cos (2n+1)\pi}{1 + \sin (2n+1)\pi} = \frac{1-1}{1+0} = 0.$$

Esta oscilación nos prueba que tal límite no existe y, por tanto, no se cumple la hipótesis 2 del teorema, la cual pide la existencia de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Pero, tengamos cuidado. Esto no implica que tampoco exista el límite inicial. Lo único que nos dice es que si el límite inicial existe, esto no puede hallarse usando la regla de L'Hôpital y, por tanto, se debe buscar otro método. Así procedemos a continuación:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right)}{x \left( 1 - \frac{\cos x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\cos x}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

### PRODUCTO INDETERMINADO. Indeterminada $0 \cdot \infty$

Se busca  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ , si se cumple que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$

La indeterminación  $0 \cdot \infty$  se transforma en  $0/0$  ó  $\infty/\infty$  cambiando el producto en cociente:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{ó} \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

**EJEMPLO 7.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

**Solución**

$$\frac{x}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

tiene:

para  $x = (2n+1)\pi$ , con  $n$

$$\frac{(2n+1)\pi}{(2n+1)\pi} = \frac{1-1}{1+0} = 0.$$

y, por tanto, no se cumple la

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

apoco exista el límite inicial. existe, esto no puede hallarse de buscar otro método. Así

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\cos x}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

Indeterminada  $0 \cdot \infty$

$$= 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$$

cambiando el producto

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ . Luego, es el caso  $0 \cdot \infty$ . Bien,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} & (\infty/\infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \end{aligned}$$

### DIFERENCIA INDETERMINADA. Indeterminada $\infty - \infty$

Se busca  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$ . Se cumple:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

La indeterminación  $\infty - \infty$  se convierte en otra de la forma  $0/0$  ó  $\infty/\infty$ , transformando la diferencia  $f(x) - g(x)$  en un cociente de funciones.

**EJEMPLO 8.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right]$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{-x \sin x + 2 \cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

### POTENCIAS INDETERMINADAS. Indeterminadas $0^0$ , $\infty^0$ , $1^\infty$

Se busca

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} \quad (1)$$

Son posibles las siguientes formas indeterminadas:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , indeterminada  $0^0$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , indeterminada  $\infty^0$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$ , indeterminada  $1^\infty$



Si hacemos  $y = [f(x)]^{g(x)}$  y tomamos logaritmo tenemos:

$$\ln y = g(x) \ln f(x) \quad (2)$$

De este modo hemos transformado a cualquiera de las tres indeterminadas anteriores en la ya conocida indeterminada  $0 \cdot \infty$ , la cual, como ya sabemos, es transformada en  $0/0$  ó  $\infty/\infty$ .

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x) = L, \quad (3)$$

entonces, la continuidad de la función logaritmo nos permite meter el límite dentro de  $\ln y$ . En consecuencia, de (3):

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \ln y = \ln \left( \lim_{x \rightarrow a} y \right) = \ln \left( \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} \right) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^L$$

y el problema queda resuelto.

En resumen, se procede en tres pasos:

1. Se toma logaritmo y se simplifica:  $y = [f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x)$
2. Se halla  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x) = L$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^L$

**EJEMPLO 9.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{1 + \ln x}}$

**Solución**

Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1 + \ln x} = 0$ . Este es un caso  $0^0$ .

Ahora,

$$y = x^{\frac{2}{1 + \ln x}} \Rightarrow \ln y = \frac{2}{1 + \ln x} \ln x \Rightarrow \ln y = 2 \frac{\ln x}{1 + \ln x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 + \ln x} \quad (\infty/\infty)$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{1/x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 2(1) = 2$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{1 + \ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^2$$

**EJEMPLO 10.**

**Solución**

Este límite es

$$y = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y =$$

Luego,

**EJEMPLO**

**Solución**

En primer

Tenemo

Además

$$\lim_{x \rightarrow +\infty}$$

Por

**EJEMPLO 10.** Usando la regla de L'Hopital probar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}$$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $1^\infty$ . Bien,

$$y = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{nx} \Rightarrow \ln y = nx \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) = n \frac{\ln(1 + a/x)}{1/x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = n \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + a/x)}{1/x} \quad (0/0)$$

$$= n \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[ \frac{-a/x^2}{1 + a/x} \right]}{-1/x^2} = n \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{1 + a/x} = na$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}$$

**EJEMPLO 11.** Hallar el valor de  $a$  tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 9$

**Solución**

$$\text{En primer lugar, hallamos } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x.$$

$$\text{Tenemos que: } \frac{x+a}{x-a} = 1 + \frac{2a}{x-a}.$$

Además, si  $z = x - a$  entonces  $x = z + a$  y  $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow z \rightarrow +\infty$ . Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)^x = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{z}\right)^{z+a} \\ &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{z}\right)^a \left(1 + \frac{2a}{z}\right)^z = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{z}\right)^a \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{z}\right)^z \\ &= (1+0)^a \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{z}\right)^z = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{z}\right)^z = e^{2a} \quad (\text{problema 10}) \end{aligned}$$

Por último,

$$e^{2a} = 9 \Rightarrow 2a = \ln 9 = \ln 3^2 = 2 \ln 3 \Rightarrow a = \ln 3$$

**EJEMPLO 12.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $\infty^0$ . Bien,

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln \left(\frac{1}{x}\right) = -\sin x \ln x = -\frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} \quad (\infty/\infty)$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\operatorname{cosec} x \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right) (\tan x) = (1)(0) = 0$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 5.4

**PROBLEMA 1.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $\frac{0}{0}$ . Bien,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$



**PROBLEMA 2.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right]$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $\infty - \infty$ . Bien,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{x^2 \sec^2 x + 2x \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{2x \sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 + 2x \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 + x \sin 2x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{2x + 2x \cos 2x + \sin 2x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x}{2 - 4x \sin 2x + 2 \cos 2x + 2 \cos 2x} = \frac{2}{2 - 0 + 2 + 2} = \frac{1}{3}$$

**PROBLEMA 3.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \sin \frac{\pi}{x}$ , donde  $n \geq 1$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty$ . Bien,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \sin \frac{\pi}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{x^{-n}} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( -\frac{\pi}{x^2} \right) \cos \frac{\pi}{x}}{-n x^{-n-1}} = \frac{\pi}{n} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x^{n-1}}} = \begin{cases} \pi, & \text{si } n = 1 \\ +\infty, & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

**PROBLEMA 4.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\tan x}{\tan 5x}$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $\frac{\infty}{\infty}$ . Bien,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\tan x}{\tan 5x} &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sec^2 x}{5 \sec^2 5x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\cos^2 5x}{5 \cos^2 x} \quad (0/0) \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{-10 \cos 5x \sin 5x}{-10 \cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sin 10x}{\sin 2x} \quad (0/0) \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{10 \cos 10x}{2 \cos 2x} = \frac{10(-1)}{2(-1)} = 5. \end{aligned}$$

**PROBLEMA 5.** Probar que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$

**Solución**

Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ . Luego, este es un caso  $0^0$ .

Ahora,

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x = \frac{\ln x}{1/x} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \quad (\infty/\infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$

**PROBLEMA 6.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x)^{\tan(\pi x/2)}$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $1^\infty$ . Bien,

$$y = (2-x)^{\tan(\pi x/2)} \Rightarrow \ln y = \tan \frac{\pi x}{2} \ln(2-x) = \frac{\ln(2-x)}{\cot \frac{\pi x}{2}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(2-x)}{\cot \frac{\pi x}{2}} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1/(2-x)}{-\frac{\pi}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi x}{2}} = \frac{-1/(2-x)}{-\frac{\pi}{2}(1)^2} = \frac{2}{\pi}$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x)^{\tan(\pi x/2)} = e^{2/\pi}$$

**PROBLEMA 7.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a^{1/x} + b^{1/x})^x$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $1^\infty$ .

$$y = (a^{1/x} + b^{1/x})^x \Rightarrow \ln y = x \ln(a^{1/x} + b^{1/x}) = \frac{\ln(a^{1/x} + b^{1/x})}{1/x}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a^{1/x} \ln a + b^{1/x} \ln b}{a^{1/x} + b^{1/x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{1/x} \ln a + b^{1/x} \ln b}{a^{1/x} + b^{1/x}} = \frac{a^0 \ln a + b^0 \ln b}{a^0 + b^0} \\ &= \frac{\ln a + \ln b}{1+1} = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \frac{1}{2} \ln ab = \ln \sqrt{ab} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a^{1/x} + b^{1/x})^x = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

**PROBLEMA 8.** El marqués de L'Hôpital en su libro *Analyse de Infinitement petits* (el primer libro de Cálculo, publicado en 1.696), para ilustrar la regla que ahora lleva su nombre, usó el siguiente límite, el cual pedimos calcular.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}, \text{ donde } a > 0.$$

**Solución**



Este límite es una indeterminada de la forma  $\frac{0}{0}$ . Bien

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(2a^3x - x^4)^{\frac{1}{2}} - a(a^2x)^{\frac{1}{3}}}{a - (ax^3)^{\frac{1}{4}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{2}(2a^3x - x^4)^{-1/2}(2a^3 - 4x^3) - \frac{1}{3}a(a^2x)^{-2/3}(a^2)}{-\frac{1}{4}(ax^3)^{-3/4}(3ax^2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(2a^4 - a^4)^{-1/2}(2a^3 - 4a^3) - \frac{1}{3}a(a^3)^{-2/3}(a^2)}{-\frac{1}{4}(a^4)^{-3/4}(3a^3)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(a^4)^{-1/2}(-2a^3) - \frac{1}{3}a(a^3)^{-2/3}(a^2)}{-\frac{3}{4}(a^4)^{-3/4}(a^3)} = \frac{-a - \frac{1}{3}a}{-\frac{3}{4}} = \frac{16a}{9} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 9.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^{-1}x \operatorname{cosec} x$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma  $0 \cdot \infty$ . Bien,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^{-1}x \operatorname{cosec} x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^{-1}x}{\sin x} \quad (0/0). \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

**PROBLEMA 10.** Se tiene un sector circular correspondiente a un ángulo central  $\theta$  en un círculo de radio  $r$ . Sea  $S(\theta)$  el área del segmento circular formado por la cuerda PM y el arco PM. Sea  $T(\theta)$  el área del triángulo rectángulo PQM. Hallar

Solución

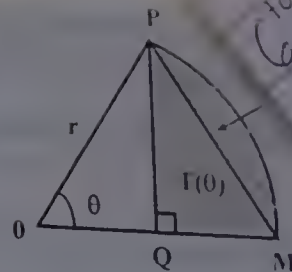
$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{T(\theta)}$$

$S(\theta) = \text{Area sector OPM} - \text{Area triángulo OPM}$

$$= \frac{1}{2} r^2 \theta - \frac{1}{2} (\overline{OM}) (\overline{OP})$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \theta - \frac{1}{2} (r) (r \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \theta - \frac{1}{2} r^2 \cos \theta = \frac{1}{2} r^2 (\theta - \cos \theta)$$



$$T(\theta) = \frac{1}{2} (\overline{QM}) (\overline{OP}) = \frac{1}{2} (\overline{OM} - \overline{OQ}) (\overline{OP}) = \frac{1}{2} (r - r \cos \theta) (r \sin \theta)$$

$$= \frac{1}{2} r^2 (1 - \cos \theta) (\sin \theta) = \frac{1}{2} r^2 (\sin \theta - \sin \theta \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{2} r^2 (\sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta) = \frac{1}{4} r^2 (2 \sin \theta - \sin 2\theta)$$

Ahora,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{T(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} r^2 (\theta - \cos \theta)}{\frac{1}{4} r^2 (2 \sin \theta - \sin 2\theta)} = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta - \cos \theta}{2 \sin \theta - \sin 2\theta} \quad (0/0)$$

$$= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \theta}{2 \cos \theta - 2 \cos 2\theta} \quad (0/0)$$

$$= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{-2 \sin \theta + 4 \sin 2\theta} \quad (0/0)$$

$$= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\cos \theta}{-2 \cos \theta + 8 \cos 2\theta} = 2 \frac{1}{-2 + 8} = \frac{1}{3}$$

**PROBLEMA 11.** Probar la regla de L'Hôpital para el caso 0/0. Si

1.  $f$  y  $g$  son diferenciables y  $g'(x) \neq 0$  cerca de  $a$ , excepto posiblemente en  $a$

2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

3. Existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (límite o infinito)

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración

La demostración está basada en el Teorema del Valor Medio de Cauchy. Consideramos que el límite es finito.

Procedemos para el caso  $x \rightarrow a^+$ . El caso  $x \rightarrow a^-$  es similar y si los dos se cumplen, entonces se cumple para  $x \rightarrow a$ .

La existencia de  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  implica la existencia de  $f'(x)$  y de  $g'(x)$  en un intervalo  $(a, b]$  en el cual  $g'(x) \neq 0$ .

Se tiene que  $g(b) \neq 0$ , ya que si  $g(b) = 0$ , por el teorema de Rolle, existe  $c \in (a, b)$  tal que:

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a) \Rightarrow 0 - 0 = g'(c)(b - a) \quad g'(c) = 0,$$

lo cual contradice el hecho de que  $g'(x) \neq 0$  en  $(a, b]$

Como  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ , redefinimos  $f$  y  $g$ , si es necesario, haciendo  $f(a) = 0$  y  $g(a) = 0$ . De este modo,  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, b]$  y son diferenciables en  $(a, b)$ . Luego, por el teorema del valor medio de Cauchy, existe  $c \in (a, b)$  tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(b) - 0}{g(b) - 0} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ahora, si hacemos  $b \rightarrow a^+$ , y como  $a < c < b$ , esto obliga a que  $c \rightarrow a^+$ . Se tiene, entonces

$$\lim_{b \rightarrow a^+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{c \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

lo que es equivalente a la igualdad de límites de la tesis.

### PROBLEMAS PROPUESTOS 5.4

En los problemas del 1 al 43 hallar el límite indicado.

1.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - e^x}{x^2}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$

4.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\tan^2 x}$



e Cauchy.

ilar y si los dos se

y de  $g'(x)$  en un

le, existe  $c \in (a, b)$

0.

g, si es necesario,

as en  $[a, b]$  y son  
de Cauchy, existe

$f'(c)$

$g'(c)$

que  $c \rightarrow a^+$ . Se

$$5. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sec^2 x - 2 \tan x}{1 + \cos 4x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi/x}{\cot(\pi x/2)}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 5^x}{x^2}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x-\pi)^2}{\sin^2 x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sec^2 x - 2 \tan x}{1 + \cos 4x}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right]$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \pi/4} (1 - \tan x) \sec 2x$$

$$25. \lim_{x \rightarrow a} (x^2 - a^2) \tan \frac{\pi x}{2a}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 2x)^{1/x}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sin x}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$$

$$37. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x^2 + 1)). \text{ Sugerencia: } \ln e^x = x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cot x}{\cot 2x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan^{-1} x}{1 - \cos x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin nx}{\ln \sin x}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln x}{\sqrt{x}}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 \cos x - 2}{x^4}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right]$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right]$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x) \cot x$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{1/x}$$

$$32. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{x^2}$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{1/\ln x}$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} 2x}{\tan^{-1} 3x}$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sinh x)^{2/x}$$

334

$$39. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$41. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} \text{ Sugerencia: } z = \ln x$$

$$43. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} \text{ Sugerencia: } z = \sqrt[n]{x}$$

44. Si  $f'$  es continua, probar:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

Sugerencia: Usar regla de L'Hôpital derivando respecto a  $h$ .

45. Si  $f''$  es continua, probar:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

Sugerencia: Usar regla de L'Hôpital derivando 2 veces respecto a  $h$ .

$$40. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^x - x \right)^{1/x}$$

$$42. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} 3x - 3 \tan^{-1} x}{x^3}$$

## SECCION 5.5

### TRAZADO CUIDADOSO DEL GRAFICO DE UNA FUNCION

A estas alturas de nuestro curso ya estamos en condiciones de esbozar con mucha precisión el gráfico de una función  $y = f(x)$ . La técnica puede resumirse en los siguientes pasos:

A. Dominio. Se determina el dominio de la función

B. Simetría y periodicidad

Determinar si se tiene simetría respecto al eje  $Y$  o respecto al origen. En caso afirmativo, el trabajo se reduce a la mitad: Sólo es necesario graficar los puntos con abscisa  $x \geq 0$ .

Si la función viene expresada en términos de las funciones trigonométricas, determinar la periodicidad. Si esta es  $p$ , entonces sólo construye el gráfico en un intervalo de longitud  $p$ , que puede ser  $[0, p]$  o  $[-p/2, p/2]$ . Luego esta parte del gráfico se traslada a los otros intervalos.

Recordar que:

a. Una función es periódica si existe una constante positiva  $p$  tal que

$$f(x+p) = f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$$

Se llama periodo al menor  $p$  que satisface la condición anterior.

b. La

c. La

C. Intersección

D. Continuidad

E. Estudio de

F. Estudio de

G. Esbozo

EJEMPLO

Solución

A. Dom

B. Sim

C. Int

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)^{1/x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} 3x - 3 \tan^{-1} x}{x^3}$$

cto a h.

especto a h.

## FICIO DE UNA

iciones de esbozar con  
nica puede resumirse en

respecto al origen. En  
necesario graficar los

ciones trigonométricas,  
struye el gráfico en un  
]. Luego esta parte del

ositiva p tal que

ión anterior.

b. La gráfica de  $f$  es simétrica respecto al eje  $Y \Leftrightarrow$   
 $f$  es par:  $f(-x) = f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$ .

c. La gráfica de  $f$  es simétrica respecto al origen  $\Leftrightarrow$   
 $f$  es impar:  $f(-x) = -f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$ .

### C. Intersecciones con los Ejes.

La intersección con el eje  $Y$  se encuentra haciendo  $x = 0$ . La intersección con el eje  $X$  se encuentra resolviendo la ecuación  $f(x) = 0$ . Si la ecuación es difícil de resolver, se recomienda no insistir.

### D. Continuidad y asíntotas.

Determinar las discontinuidades y los intervalos de continuidad. Calcular los límites unilaterales en los extremos de estos intervalos de continuidad. Estos límites nos proporcionan las asíntotas verticales y horizontales.

### E. Estudio de $f'$ . Intervalos de monotonía. Máximos y mínimos.

Hallar los puntos críticos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos locales.

### F. Estudio de $f''$ . Concavidad y puntos de inflexión.

Hallar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

### G. Esbozar el gráfico.

Esbozar el gráfico de  $f$  con la información encontrada en los pasos anteriores. Si es necesario, calcular algunos puntos extras.

**EJEMPLO 1.** Graficar la función racional  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ .

Solución

A. Dominio.  $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

B. Simetría y periodicidad. No es periódica.

Esta función es par. En efecto:  $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2}{x^2 - 4} = f(x)$ .

Luego, el gráfico de  $f$  es simétrica respecto al eje  $Y$ . En consecuencia, es suficiente construir la parte del gráfico que está a la derecha del eje  $Y$ ; es decir la parte que corresponde al intervalo  $[0, +\infty)$ . La otra parte se obtiene reflejando en el eje  $Y$  la parte construida.

### C. Intersecciones con los Ejes.

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ . Luego, la gráfica de  $f$  interseca al eje  $Y$  en el punto  $(0, 0)$

Por otro lado,  $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ . Luego,

la gráfica de  $f$  interseca al eje  $X$  en el punto  $(0, 0)$ .



**D. Continuidad y asíntotas.**

La función  $f$  es discontinua en  $-2$  y  $2$ . Los intervalos de continuidad son  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, 2)$  y  $(2, +\infty)$ .

**Asíntotas Verticales**

a.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$

Luego, la recta  $x = 2$  es una asíntota vertical. Por simetría, la recta  $x = -2$  también es una asíntota vertical.

**Asíntotas horizontales.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - 4/x^2} = 1$$

Luego, la recta  $y = 1$  es una asíntota horizontal.





**E. Estudio de  $f'(x)$ . Intervalos de Monotonía. Máximos y mínimos.**

$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

**Puntos Críticos.**

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ . Además,  $f'$  no está definida en  $x = -2$  y  $x = 2$ , pero estos puntos tampoco están en el dominio. Luego,  $f$  tiene un único punto crítico que es  $0$ .

**Intervalos de monotonía.**

$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x) = \frac{-(-)}{(+)} = +$	$f'(x) = \frac{-(-)}{(+)} = +$	$f'(x) = \frac{-(+)}{(+)} = -$	$f'(x) = \frac{-(+)}{(+)} = -$	
				

Mirando la tabla deducimos que  $f(0) = 0$  es un máximo local.

**F Estudio de  $f''(x)$ . Concavidad y Puntos de inflexión.**

$$f''(x) = \frac{8(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

$f''(x)$  no se anula en ningún punto y no está definida en  $-2$  y  $2$ . Pero estos puntos no están en el dominio de  $f$ . En consecuencia, la gráfica no tiene puntos de inflexión.

**Intervalos**

$-\infty$

$f'(x)$

**G. Esbozo d**

$x$	$f(x)$
$0$	$0$
$1$	$-\frac{1}{3}$
$3$	$\frac{9}{5}$
$4$	$\frac{4}{3}$

**EJEMPL**

**Solución**

**A. Domin**

**B. Simetr**

i.  $f$  es

int  
gr

ii. La

$f(-$

**C. Inter**

$x =$

Intervalos de continuidad son

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$$

simetría, la recta  $x = -2$

y mínimos.

en  $x = -2$  y  $x = 2$ , pero  
f tiene un único punto

2	$f'(x) = \frac{-(+)}{(+)} = -$	$+\infty$
---	--------------------------------	-----------

local.

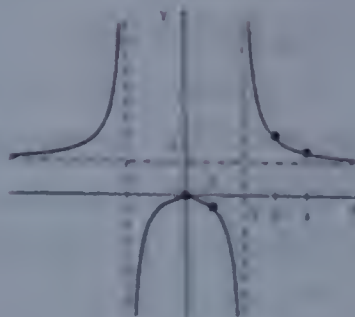
da en  $-2$  y  $2$ . Pero  
a, la gráfica no tiene

### Intervalos de Concavidad.

$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$f''(x) = \frac{(+)}{(+)} = +$	$f''(x) = \frac{(+)}{(-)} = -$	$f''(x) = \frac{(-)}{(+)} = -$	
$\cup$	$\cap$	$\cap$	

G. Esbozo del gráfico.

x	f(x)
0	0
1	$-\frac{1}{3}$
2	$-\frac{9}{5}$
4	$-\frac{4}{3}$



**EJEMPLO 2.** Graficar la función  $f(x) = 2 \sin x - \sin 2x$

**Solución**

A. Dominio.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

B. Simetría y periodicidad.

i. f es periódica con periodo  $2\pi$ . Falso es  $f(x + 2\pi) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

En consecuencia, solamente precisamos graficar la función en un intervalo de longitud  $2\pi$ . Escogemos el intervalo  $[0, 2\pi]$ . Para obtener el gráfico completo, trasladamos esta porción al resto de periodos.

ii. La función f es impar y, por tanto, su gráfica es simétrica respecto al origen.

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2 \sin(-x) - \sin 2(-x) = -2 \sin x - (-\sin 2x) \\ &= -(2 \sin x - \sin 2x) = -f(x) \end{aligned}$$

En consecuencia, solamente precisamos graficar la función a la derecha del origen, o sea, en el intervalo  $[0, \pi]$ . Sin embargo, por razones didácticas persistimos en tomar el intervalo  $[0, 2\pi]$

C. Intersecciones con los ejes..

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \sin 0 - \sin 2(0) = 2(0) - 0 = 0.$$

También la gráfica de  $f$  interseca al eje  $Y$  en  $(0, 0)$ .

Por otro lado,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x - 2\sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x (1 - \cos x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \text{ ó } \cos x = 1$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 2\pi \text{ y } x = \pi$$

También la gráfica de  $f$  interseca al eje  $X$  en  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$  y  $(2\pi, 0)$ .

D. Continuidad y asíntotas.

$f$  es continua en  $[0, 2\pi]$  y no tiene asíntotas.

E. Estudio de  $f'(x)$ . Intervalos de monotonía. Máximos y Mínimos.

Puntos Críticos:

$$f'(x) = 2\cos x - 2\cos 2x = 2\cos x - 2(2\cos^2 x - 1) \Rightarrow$$

$$f'(x) = -2(2\cos^2 x - \cos x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1)}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos x = 1 \text{ ó } \cos x = -1/2$$

$$\Rightarrow (x = 0 \text{ ó } x = 2\pi) \text{ ó } (2\pi/3 \text{ ó } 4\pi/3)$$

Los puntos críticos son:  $(0, 0)$  ó  $(2\pi, 0)$  ó  $(2\pi/3, 2h)$  ó  $(4\pi/3, -2h)$ .

Intervalos de monotonía:

$0$	$2\pi/3$	$4\pi/3$	$2\pi$
$f'(x) = -2(-) = +$	$f'(x) = -2(+) = -$	$f'(x) = -2(-) = +$	
↗	↘	↗	

La tabla nos dice que  $f$  tiene un máximo relativo en  $x = 2\pi/3$  y tiene un mínimo relativo en  $x = 4\pi/3$ , cuyos valores son:

$$f(2\pi/3) = \sin(2\pi/3) = \sin(2\pi/3) = 2h(\sqrt{3}/2) = (\sqrt{3}/2) = 2h$$

$$f(4\pi/3) = \sin(4\pi/3) = \sin(4\pi/3) = -2h(\sqrt{3}/2) = (-\sqrt{3}/2) = -2h$$

Las tablas nos dicen que  $f$  tiene un máximo relativo en  $x = 2\pi/3$  y tiene un mínimo relativo en  $x = 4\pi/3$ , cuyos valores son:



derecha de  $2\pi$ , la función es creciente. Luego,  $x = 0$  y  $x = 2\pi$  no dan lugar a extremos relativos.

F. Estudio de  $f''(x)$ . Concavidad y puntos de inflexión

$$f'(x) = -2(2\cos^2 x - \cos x - 1) \Rightarrow$$

$$f''(x) = -2(-4\cos x \sin x + \sin x) = -2\sin x(1 - 4\cos x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin x(1 - 4\cos x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0, \text{ ó } \cos x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (x = 0 \text{ ó } \pi) \text{ ó } (x = \theta_1 \approx 1,32 \text{ o } x = \theta_2 \approx 4,97)$$

Intervalos de concavidad:

0	$\theta_1 \approx 1,32$	$\pi$	$\theta_2 \approx 4,97$	$2\pi$
$f''(x) = -(+)(-) = +$	$f''(x) = -(+)(+) = -$	$f''(x) = -(-)(+) = +$	$f''(x) = -(-)(-) = -$	
∪	∩	∪	∩	

La tabla nos dice que son puntos de inflexión:

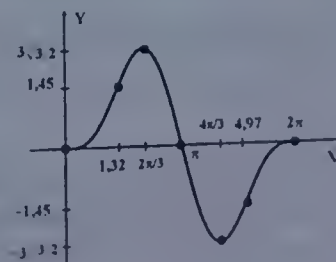
$$(0_1, f(0_1)) = (1,32, f(1,32)) \approx (1,32, 1,45), \quad (\pi, f(\pi)) = (\pi, 0) \text{ y}$$

$$(\theta_2, f(\theta_2)) = (4,97, f(4,97)) \approx (4,97, 1,45)$$

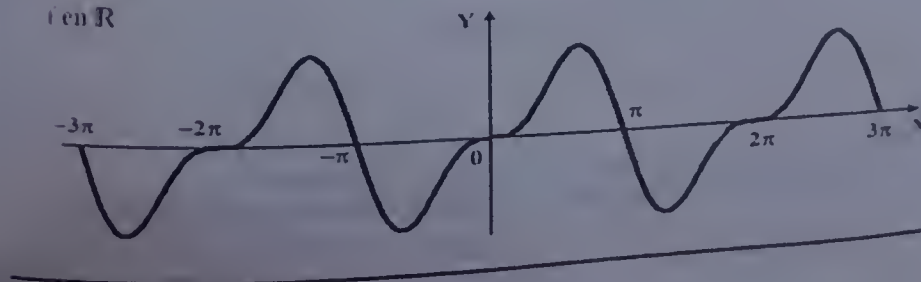
De la periodicidad de  $f$  obtenemos que  $(0, f(0)) = (0, 0)$  y  $(2\pi, f(2\pi)) = (2\pi, 0)$  también son puntos de inflexión.

G. Esbozo de la gráfica.

$f$  en  $[0, 2\pi]$



$f$  en  $\mathbb{R}$



**EJEMPLO 3.** Graficar la siguiente función  $f(x) = e^{-x^2/2}$

**Solución**

A. Dominio.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ .

B. Simetrías y periodicidad. No es periódica.

$f$  es par. En efecto:  $f(-x) = e^{-(-x)^2/2} = e^{-x^2/2} = f(x)$ .  
En consecuencia, el gráfico de  $f$  es simétrica respecto al eje Y.

C. Intersección con los ejes.

Con el eje Y:  $f(0) = e^{-0} = 1$

Luego, el gráfico corta al eje Y en el punto  $(0, 1)$ .

Con el eje X:  $e^{-x^2/2} = 0$  no tiene solución. Luego, el gráfico no corta al eje X.

D. Continuidad y asíntotas.

La función  $f(x) = e^{-x^2/2}$  es continua en todo  $\mathbb{R}$  y, por tanto, no hay asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2/2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2/2}} = 0 \quad y$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2/2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{x^2/2}} = 0$$

Luego,  $y = 0$ , el eje X, es una asíntota horizontal.

E. Estudio de  $f'$ . Intervalos de monotonía. Máximos y mínimos

$$f'(x) = e^{-x^2/2} D_x(-x^2/2) = -xe^{-x^2/2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -xe^{-x^2/2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Luego,  $f$  tiene un solo punto crítico, que es  $x = 0$ .

Intervalos de monotonía:

$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x) = -(-)(+) = +$		$f'(x) = -(+)(+) = -$
↗		↘

$f$  es creciente en el intervalo  $(-\infty, 0]$  y es decreciente en  $[0, +\infty)$ . Además,

$f$  tiene un máximo en  $x = 0$ , que vale  $f(0) = 1$ .

... de la Derivada

... de  $f''$ . Concavidad. Puntos de inflexión

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2} \Rightarrow f''(x) = -e^{-x^2/2} D_x(-x^2/2) = -e^{-x^2/2} \Rightarrow f''(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$$

Ahora,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)e^{-x^2/2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Intervalos de concavidad:

$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f''(x) = (+)(+) = +$	$f''(x) = (-)(+) = -$	$f''(x) = (+)(+) = +$	
$\cup$	$\cap$	$\cup$	

La tabla nos dice que el gráfico de  $f$  es cóncavo hacia arriba en los intervalos  $(-\infty, -1]$  y  $[1, +\infty)$ , y que es cóncava hacia abajo en el intervalo  $[-1, 1]$ .

Luego,  $(-1, f(-1)) = (-1, e^{-0.5})$  y  $(1, f(1)) = (1, e^{-0.5})$  son puntos de inflexión.

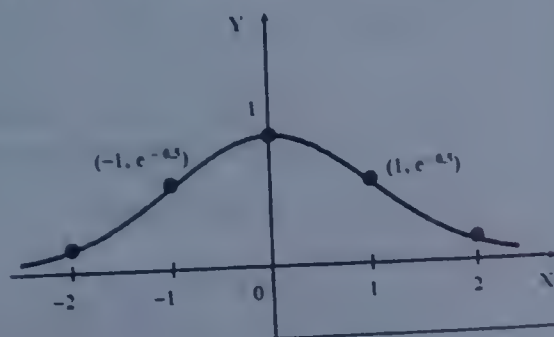
G. Esbozo del gráfico

$$x \quad f(x)$$

$$0 \quad 1$$

$$1 \quad e^{-0.5} \approx 0,606$$

$$2 \quad e^{-2} \approx 0,135$$



#### OBSERVACION.

En la Estadística y en la Teoría de las Probabilidades aparecen con frecuencia la siguiente función, llamada función de densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)},$$

donde  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes, llamadas media y desviación estándar, respectivamente.

La gráfica de esta función se obtiene fácilmente de la gráfica del ejemplo anterior, mediante las técnicas de traslación y estiramiento.



## GRAFICAS CON ASINTOTAS OBLICUAS

**EJEMPLO 4.** Graficar la función  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

**Solución**

**A. Dominio.**

$$x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ó } x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

**B. Simetrías.** No es periódica.

La función  $f$  es par. En efecto:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = f(x)$$

Luego, la gráfica de  $f$  es simétrica respecto al eje  $Y$  y sólo debemos concentrarnos de graficar  $f$  en el intervalo  $(1, +\infty)$ .

**C. Intersecciones con los ejes.**

El gráfico de  $f$  no corta al eje  $Y$ , ya que  $x = 0$  no está en el dominio de  $f$ .

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Rightarrow x = 0. \text{ Pero } 0 \text{ no está en el dominio de } f. \text{ Luego,}$$

el gráfico de  $f$  no corta al eje  $X$ .

**D. Continuidad y asíntotas.**

$f$  es continua en todo su dominio  $= (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

**Asíntotas Verticales:**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

Luego,  $x = 1$  es una asíntota vertical.

**Asíntotas Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1 - 1/x^2}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

Luego, no hay asíntotas horizontales.

**Asíntotas Oblicuas:**

De acuerdo al ejemplo 2 se la sección 2.8, las recta  $y = x$ ,  $y = -x$  son asíntotas oblicuas.

E. Estudio de  $f'(x)$ . Intervalos de Monotonía. Máximos y Mínimos.



$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}(2x) - x^2\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)}{x^2-1} = \frac{x^3-2x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^3-2x}{(x^2-1)^{3/2}} = \frac{x(x^2-2)}{(x^2-1)^{3/2}} = \frac{x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x^2-1)^{3/2}}$$

$$f'(x) = \frac{x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x^2-1)^{3/2}} = 0 \Rightarrow x=0, x=\sqrt{2}, x=-\sqrt{2}$$

Sólo  $x=\sqrt{2}$  es punto crítico en el intervalo  $(1, +\infty)$ .

Intervalos de monotonía en el intervalo  $(1, +\infty)$ .

1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x) = \frac{(+)(-)(+)}{(+)} = -$ 		$f'(x) = \frac{(+)(+)(+)}{(+)} = +$ 

$f$  tiene un mínimo relativo en  $x = \sqrt{2}$  y su valor es  $f(\sqrt{2}) = 2$

F. Estudio de  $f''(x)$ . Intervalos de Concavidad. Puntos de Inflexión.

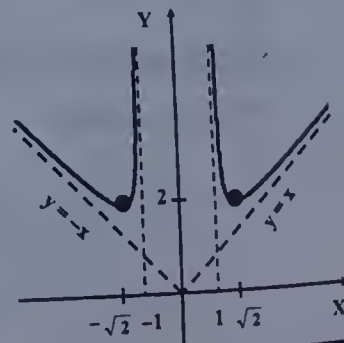
$$f'(x) = \frac{x^3-2x}{(x^2-1)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{(x^2-1)^{3/2}(3x^2-2) - (x^3-2x)(3/2)(x^2-1)^{1/2}(2x)}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{(x^2-1)^{1/2}[(x^2-1)(3x^2-2) - 3x(x^3-2x)]}{(x^2-1)^3} = \frac{x^2+2}{(x^2-1)^{5/2}}$$

Como  $x^2+2=0$  no tiene soluciones reales y  $f''(x) > 0 \forall x$  en  $(1, +\infty)$  concluimos que la gráfica no tiene puntos de inflexión en  $(1, +\infty)$  y que en este intervalo, la gráfica es cóncava hacia arriba.

## F. Esbozo de la gráfica.



**EJEMPLO 5.** Graficar la función  $f(x) = xe^{1/x}$

**Solución**

A. Dominio.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

B. Simetrías y periodicidad. Ninguna simetría y no es periódica

C. Intersección con los ejes

Como  $x = 0$  no está en dominio de  $f$ , el gráfico de  $f$  no corta al eje  $Y$   
Por otro lado,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{1/x} = 0 \Rightarrow x = 0$ . Pero  $x = 0$  no está en el dominio de  $f$   
Luego, el gráfica de  $f$  no corta al eje  $X$ .

D. Continuidad y asíntotas.

$f$  es continua en todo su dominio  $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

**Asíntotas verticales:**

Los límites siguientes son indeterminaciones del tipo  $0 \cdot \infty$ , por lo que aplicamos la regla de L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x} \left( -1/x^2 \right)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x} \left( -1/x^2 \right)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0$$

Luego, la recta  $x = 0$  es una asíntota vertical (sólo hacia arriba).

**Asíntotas Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{1/x} = (+\infty)e^0 = (+\infty)(1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{1/x} = (-\infty)e^0 = (-\infty)(1) = -\infty$$

Luego, la gráfica de  $f$  no tiene asíntotas horizontales.

**Asíntotas Oblicuas:**

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{1/x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x}$$



$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

En forma enteramente análoga, obtenemos que:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{1/x}}{x} = 1 \quad y \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{1/x} - x) = 1$$

Luego, la recta  $y = x + 1$  es asíntota oblicua, a la derecha y a la izquierda.

### E. Estudio de $f'(x)$ . Intervalos de Monotonía. Máximos y Mínimos.

$$f'(x) = x e^{1/x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) + e^{1/x} = e^{1/x} - \frac{1}{x} e^{1/x} = \left( 1 - \frac{1}{x} \right) e^{1/x}$$

Puntos Críticos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left( 1 - \frac{1}{x} \right) e^{1/x} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Se tiene un solo punto crítico:  $x = 1$ . Observar que no existe  $f'(0)$ , pero  $x = 0$  no es punto crítico porque  $x = 0$  no está en el dominio de  $f$ .

Intervalos de Monotonía:

$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x) = (+)(+) = +$ ↗	$f'(x) = (-)(+) = -$ ↘	$f'(x) = (+)(+) = +$ ↗	

$f$  tiene un mínimo relativo en  $x = 1$  y su valor es  $f(1) = e \approx 2,72$

### F. Estudio de $f''(x)$ . Intervalos de Concavidad. Puntos de Inflexión

$$f'(x) = e^{1/x} - \frac{1}{x} e^{1/x} \Rightarrow$$

$$f''(x) = e^{1/x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) - \frac{1}{x} e^{1/x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) - \left( -\frac{1}{x^2} \right) e^{1/x} = \frac{1}{x^3} e^{1/x}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} e^{1/x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} = 0.$$

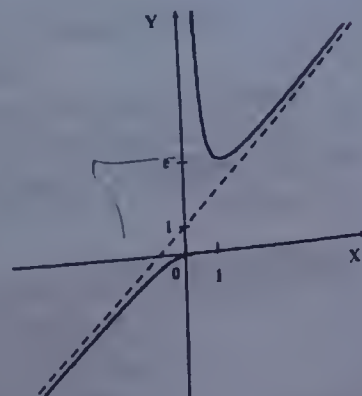
No hay solución.

Intervalos de concavidad:

$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x) = (-)(+) = -$ ∩	$f''(x) = (+)(+) = +$ ∪	

No hay puntos de inflexión.

### F. Esbozo de la gráfica.



## PROBLEMAS PROPUESTOS 5.5

*Gráfica las funciones siguientes:*

1.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

2.  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

3.  $f(x) = 2x + 5x^{2/5}$

4.  $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 1}$

5.  $f(x) = \frac{x}{(x-1)^{1/3}}$

6.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

7.  $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  ( $f$  es periódica con periodo  $2\pi$ )

*Gráfica las funciones siguientes. Ellas tienen asíntotas oblicuas.*

8.  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$

9.  $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2}$

10.  $f(x) = x^2 - 3(6-x)^{1/3}$

11.  $f(x) = x e^{1/x^2}$

## SECCION 5.6

## PROBLEMAS DE OPTIMIZACION

El resto de esta sección lo dedicaremos a resolver problemas de optimización en la Economía, en la Física, en el comercio y, en general, en la vida real. Estos problemas están planteados en términos del lenguaje diario. Nuestra primera labor, la que requiere ingenio, consiste en traducir el problema al lenguaje matemático, quedando expresado mediante una función. La segunda labor es rutinaria, sólo se tiene que calcular el máximo o el mínimo de la función encontrada. Dividimos estos problemas en dos grupos. Según el intervalo donde se optimiza la función sea cerrado o no.

## PROBLEMAS DE OPTIMIZACION EN INTERVALOS CERRADOS Y FINITOS

En este grupo de problemas el resultado clave que usaremos nos da el teorema 5.1, que afirma que toda función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  tiene máximo y mínimo, y estos son alcanzados en los números críticos o en los extremos  $a$  o  $b$ .

**PROBLEMA 1.** De un tronco de madera, que tiene una sección circular de 3 dm. de radio, se quiere obtener un tablón de sección rectangular. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo si se desea que éste tenga área máxima?

Solución

Sea  $x$ ,  $h$  y  $A$  la base, la altura y el área del rectángulo, respectivamente. Entonces que:

$$A = xh \quad (1)$$

Expresemos la altura en términos de la base. Para ello observamos que el diámetro, la base y la altura forman un triángulo rectángulo de hipotenusa 6. Así pues, usando el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$h = \sqrt{6^2 - x^2} \quad (2)$$



Reemplazando (2) en (1)

$$A = x\sqrt{36 - x^2}$$

Una función que expresa el área del rectángulo en términos de la base, es la que debemos maximizar. ¿En qué intervalo? Como la longitud de la base no puede ser negativa ni exceder la longitud del diámetro, debemos tener  $0 \leq x \leq 6$ .

En resumen, buscamos el máximo de la función

$$A(x) = x\sqrt{36 - x^2} \text{ en el intervalo } [0, 6]$$

Hallamos los puntos críticos.

$$A'(x) = x \frac{-2x}{2\sqrt{36 - x^2}} + \sqrt{36 - x^2} = \frac{36 - 2x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = \frac{2(18 - x^2)}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(18 - x^2)}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 18 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$$

$$\text{Como } A'(x) = \frac{2(18 - x^2)}{\sqrt{36 - x^2}} \text{ no está definida en } 6$$

Los puntos críticos de  $A(x)$  son  $-3\sqrt{2}$ ,  $3\sqrt{2}$  y  $6$ . Como  $-3\sqrt{2}$  no pertenece al intervalo  $[0, 6]$  lo descartamos y nos quedamos con  $3\sqrt{2}$  y  $6$ .

Calculamos los valores  $A(0)$ ,  $A(6)$  y  $A(3\sqrt{2})$

$$A(0) = 0\sqrt{36 - 0^2} = 0,$$

$$A(6) = 6\sqrt{36 - 6^2} = 0,$$

$$A(3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} \sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} = 18$$

El valor máximo de  $A(x)$  es  $A(3\sqrt{2}) = 18$  y es alcanzado en  $x = 3\sqrt{2}$ . El rectángulo de área máxima es:

$$\text{base } x = 3\sqrt{2} \text{ y altura } h = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

El rectángulo es un cuadrado.



**PROBLEMA 2.**

Un fabricante de envases construye cajas sin tapa, utilizando láminas de cartón rectangulares de 80 cm. de largo por 50 cm de ancho. Para formar la caja, de las cuatro esquinas de cada lámina se recorta un pequeño cuadrado y luego se doblan las aletas, como indica la figura. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados si se quiere que la caja tenga el mayor volumen posible?

**Solución**

Sea  $x$  la longitud del lado de los cuadrados cortados.

Sabemos que:

$$\text{Volumen de la caja} = (\text{área de la base})(\text{altura})$$

La altura de la caja es  $x$  y su base es un rectángulo de  $80 - 2x$  de largo por  $50 - 2x$  de ancho. Luego, si  $V$  denota el volumen de la caja tenemos que,

$$V = (80 - 2x)(50 - 2x)(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$$

La longitud  $x$  no puede ser negativa ni puede exceder la mitad del ancho de la lámina inicial. Luego,  $0 \leq x \leq 25$ .

Debemos hallar el máximo de la función volumen

$$V(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x,$$

en el intervalo  $[0, 25]$ .

Halleemos sus puntos críticos:

$$\begin{aligned} V'(x) &= 12x^2 - 520x + 4000 \\ &= 4(x - 10)(3x - 100) \end{aligned}$$

Los puntos críticos de  $V(x)$  son 10 y  $\frac{100}{3}$ .

Desechamos  $\frac{100}{3}$ , por estar fuera del intervalo  $[0, 25]$ . Nos quedamos con 10.

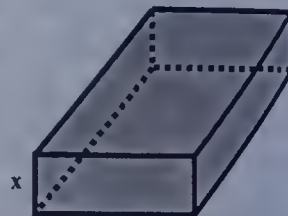
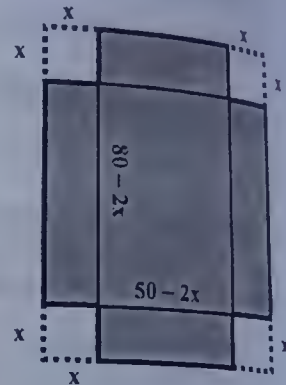
Ahora, comparemos los valores  $V(0)$ ,  $V(25)$  y  $V(10)$ :

$$V(0) = (80 - 2(0))(50 - 2(0))(0) = 0$$

$$V(25) = (80 - 2(25))(50 - 2(25))(25) = 0$$

$$V(10) = (80 - 2(10))(50 - 2(10))(10) = 18.000$$

Luego, el máximo de  $V(x)$  es  $V(10) = 18.000 \text{ cm}^3$  y es alcanzado en  $x = 10$ . En consecuencia, la longitud del lado de los cuadrados cortados debe ser de 10 cm.



**PROBLEMA 3.**

Se desea construir una pista de carrera de 400 m. de perímetro. La pista debe estar formada por un rectángulo con dos semicírculos localizados en dos lados opuestos del rectángulo. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo si se quiere que el área de éste sea máxima?

**Solución**

Sean  $b$  y  $x$  las longitudes de los lados del rectángulo. Su área es:

$$A = bx \quad (1)$$

El radio de los semicírculos es  $\frac{b}{2}$  y, por tanto, la longitud de las dos semicircunferencias es:

$$2\left(\pi \frac{b}{2}\right) = \pi b.$$

Como el perímetro de la pista es de 400 m, tenemos:

$$2x + \pi b = 400,$$

Despejamos  $b$ :

$$b = \frac{400 - 2x}{\pi} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$A = \frac{400 - 2x}{\pi} x = \frac{2}{\pi} (200x - x^2)$$

La longitud  $x$  es no negativa y no puede exceder la mitad del perímetro. Esto es,  $0 \leq x \leq 200$ .

Debemos hallar el máximo de la función:

$$A(x) = \frac{2}{\pi} (200x - x^2) \text{ en el intervalo } [0, 200].$$

Halleemos sus puntos críticos:

$$A'(x) = \frac{2}{\pi} (200 - 2x) = \frac{4}{\pi} (100 - x)$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - x = 0 \Leftrightarrow x = 100$$

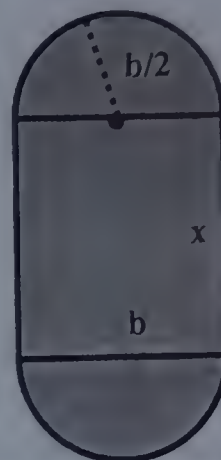
Sólo existe un punto crítico, que es 100.

Comparemos los valores  $A(0)$ ,  $A(200)$  y  $A(100)$ :

$$A(0) = \frac{2}{\pi} (200(0) - 0^2) = 0,$$

$$A(200) = \frac{2}{\pi} (200(200) - 200^2) = 0$$

$$A(100) = \frac{2}{\pi} (200(100) - (100)^2) = \frac{20.000}{\pi}$$



Luego, el máximo es  $A(100) = \frac{20.000}{\pi}$  y lo alcanza en  $x = 100$ .

En consecuencia, las dimensiones del rectángulo de área máxima son:

$$x = 100, \quad b = \frac{400 - 2(100)}{\pi} = \frac{200}{\pi}.$$

**PROBLEMA 4.**

Una isla se encuentra a 800 m. de una playa recta. En la playa, a 2.000 m. de distancia del punto F que está frente a la isla, funciona una planta eléctrica. Para dotar de luz a la isla se tiende un cable desde la planta hasta un punto P de la playa y de allí hasta la isla. El costo del tendido de un metro de cable en tierra es  $\frac{3}{5}$  del costo de un metro del tendido en agua. ¿Dónde debe estar localizado el punto P para que el costo del tendido sea mínimo?

**Solución**

Sea  $k$  el costo de tender un metro de cable en el agua.

Sea  $x$  la distancia del punto P al punto F.

La distancia de P a la planta es  $2.000 - x$ .

El costo del tendido del cable en tierra es

$$\frac{3}{5} k(2.000 - x)$$

La distancia de P a la isla, por el teorema de Pitágoras, es

$$\sqrt{x^2 + (800)^2} = \sqrt{x^2 + 640.000}$$

y el costo del tendido de cable en el agua es

$$k\sqrt{x^2 + 640.000}$$

Luego, el costo total del tendido es:

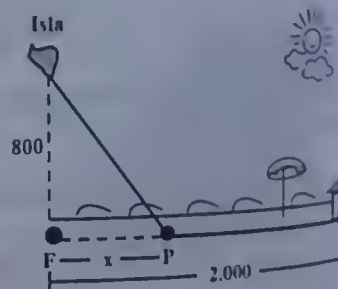
$$C(x) = \frac{3}{5} k(2.000 - x) + k\sqrt{x^2 + 640.000}$$

Además,  $x$  no debe ser negativa ni exceder 2.000, esto es

$$0 \leq x \leq 2.000$$

En resumen, debemos hallar el mínimo de la función

$$C(x) = \frac{3}{5} k(2.000 - x) + k\sqrt{x^2 + 640.000} \text{ en el intervalo } [0, 2.000]$$





Halle los puntos críticos:

$$C'(x) = -\frac{3}{5}k + \frac{kx}{\sqrt{x^2 + 640.000}}$$

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{5}k + \frac{kx}{\sqrt{x^2 + 640.000}} = 0 \Leftrightarrow 3k\sqrt{x^2 + 640.000} = 5kx$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x^2 + 640.000} = 5x \Rightarrow 9(x^2 + 640.000) = 25x^2 \Rightarrow x = \pm 600$$

Sólo nos quedamos con 600, ya que -600 no está en el intervalo  $[0, 2.000]$ .

Ahora, comparemos los valores  $C(0)$ ,  $C(600)$  y  $C(2.000)$ :

$$C(0) = \frac{3}{5}k(2.000) + k\sqrt{640.000} = 2.000k$$

$$C(600) = \frac{3}{5}k(1.400) + k\sqrt{360.000 + 640.000} = 1.840k$$

$$C(2.000) = \frac{3}{5}k(0) + k\sqrt{4.000.000 + 640.000} = 400\sqrt{29}k \approx 2.154k$$

El costo mínimo es  $1.840k$  y es alcanzado en el punto  $x = 600$ . Luego, el punto P debe localizarse entre la planta y el punto F a 600 m. de éste.

### PROBLEMA 5.

Un hotel tiene 71 habitaciones. El gerente ha observado que cuando la tarifa por habitación es \$. 50, todas las habitaciones son alquiladas y, por cada \$.2 de aumento en la tarifa, se desocupa una habitación. Si el mantenimiento (limpieza, lavado, etc.) de cada habitación ocupada es de \$.4.

- ¿Qué tarifa debe cobrar el gerente para obtener máxima ganancia?
- ¿Cuántas habitaciones se ocupan con esta tarifa que da máxima ganancia?

**Solución**

Sea  $G$  la ganancia del hotel. Se tiene que:

$$G = (\text{habitaciones ocupadas})(\text{tarifa por habitación.}) - 4(\text{habitaciones ocupadas})$$

Sea  $x$  el número de habitaciones desocupadas. Se debe cumplir que  $0 \leq x \leq 71$ .

Además:

El número de habitaciones ocupadas es  $71 - x$ .

El incremento en la tarifa por habitación es  $2x$ .

La tarifa por habitación es  $50 + 2x$

Reemplazando estos valores en la igualdad inicial, tenemos:

$$G(x) = (71 - x)(50 + 2x) - 4(71 - x) \Rightarrow G(x) = 3.266 + 96x - 2x^2$$

Debemos hallar el máximo de

$$G(x) = 3.25x + 96x - 2x^2 \text{ en el intervalo } [0, 72].$$

Hallamos los puntos críticos.

$$G'(x) = 96 - 4x, \quad G'(x) = 0 \Rightarrow 96 - 4x = 0 \Rightarrow x = 24.$$

$G(x)$  tiene como único punto crítico a 24, que está en el intervalo.

Ahora, comparamos los valores  $G'(0)$ ,  $G'(24)$  y  $G'(72)$ .

$$G'(0) = 3.25(0) + 96(0) - 2(0)^2 = 0$$

$$G'(24) = 3.25(24) + 96(24) - 2(24)^2 = 4.6(2)$$

$$G'(72) = 3.25(72) + 96(72) - 2(72)^2 = 0$$

La ganancia máxima es  $G(24) = 4.6(2)$ , la cual se alcanza cuando  $x = 24$  en la construcción.

a. La tarifa que da máxima ganancia es  $3(1) + 2(24) = 51$  dólares.

b. Con esta tarifa de 51 dólares se alquilan  $72 - 24 = 48$  unidades.

**PROBLEMA 6.** De una lámina metálica circular se quiere cortar un trozo circular para construir una copa cónica. Hallar la medida angular central  $\theta$  que proporcione la copa de mayor volumen.

**Solución.**

Sea  $R$  el radio del círculo, metálico,  $h$  la altura de la copa y  $r$  el radio de su base.

El volumen de la copa, por ser un cono, es

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h. \quad (1)$$

La longitud de la circunferencia de la base de la copa debe ser igual a la longitud del arco correspondiente, por el ángulo  $\theta$ . Es decir,

$$2\pi r = \theta R$$

De donde

$$r = \frac{\theta R}{2\pi}. \quad (2)$$

Por otro lado, se tiene que

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\theta R}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}. \quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1)



$$V = V(\theta) = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{R}{2\pi} \theta \right)^2 \left( \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \right) \Rightarrow$$

$$V(\theta) = \frac{R^3}{24\pi^2} \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \quad (4)$$

Para nuestro problema los valores de  $\theta$  que tienen significado están entre 0 y  $2\pi$  radianes, es decir  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Hallamos el máximo de  $V(\theta) = \frac{R^3}{24\pi^2} \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$ , en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

Halleemos los puntos críticos:

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{R^3}{24\pi^2} \left[ \theta^2 \frac{-\theta}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} + 2\theta \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \right] = \frac{R^3}{24\pi^2} \left[ \frac{\theta(3\theta^2 - 8\pi^2)}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} = 0 &\Leftrightarrow \theta(3\theta^2 - 8\pi^2) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ ó } 3\theta^2 - 8\pi^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta = 0 \text{ ó } \theta = 2\pi\sqrt{2/3} \end{aligned}$$

Ahora, comparemos los valores  $V(0)$ ,  $V(2\pi)$  y  $V(2\pi\sqrt{2/3})$ :

$$V(0) = \frac{R^3}{24\pi^2} (0)^2 \sqrt{4\pi^2 - 0^2} = 0$$

$$V(2\pi) = \frac{R^3}{24\pi^2} (2\pi)^2 \sqrt{4\pi^2 - (2\pi)^2} = 0$$

$$V(2\pi\sqrt{2/3}) = \frac{R^3}{24\pi^2} (2\pi\sqrt{2/3})^2 \sqrt{4\pi^2 - (2\pi\sqrt{2/3})^2} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27} R^3$$

El máximo de  $V(\theta)$  es  $V(2\pi\sqrt{2/3}) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27} R^3$  y es alcanzado en  $\theta = 2\pi\sqrt{2/3}$

Luego, el ángulo central buscado es  $\theta = 2\pi\sqrt{2/3} \approx 2.565 \text{ rad.} \approx 146,7^\circ$

**PROBLEMA 7.** Hallar las dimensiones del rectángulo con lados paralelos a los ejes y de área máxima que puede inscribirse en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solución

Consideremos un rectángulo cualquiera, inscrito en la elipse y con lados paralelos a los ejes.

de la Derivada

= 24

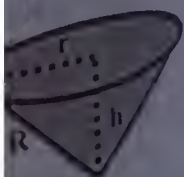
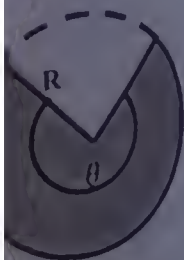
intervalo  $[0, 71]$ .

cuando  $x = 24$ .

ólares.

habitaciones.

cortar un sector  
ar la medida del  
de capacidad



(3)

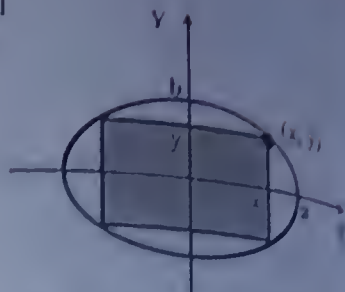


Sea  $(x, y)$  el vértice del rectángulo en el primer cuadrante. El área de este rectángulo es:

$$A = 4xy$$

Si despejamos  $y$  en la ecuación de la elipse se tiene:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$



Reemplazando este valor en la ecuación anterior se tiene el área del rectángulo:

$$A(x) = 4 \frac{b}{a} x \sqrt{a^2 - x^2}$$

Es claro que  $0 \leq x \leq a$ .

Debemos hallar el máximo de  $A(x) = 4 \frac{b}{a} x \sqrt{a^2 - x^2}$  en el intervalo  $[0, a]$ .

Hallemos los puntos críticos:

$$A'(x) = 4 \frac{b}{a} x \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 4 \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = 4 \frac{b}{a} \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}a}{2} = \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Desechamos a  $-\frac{a\sqrt{2}}{2}$  por no estar en el intervalo  $[0, a]$ .

Comparemos los valores  $A(0)$ ,  $A(a)$  y  $A(a\sqrt{2}/2)$

$$A(0) = 4 \frac{b}{a} (0) \sqrt{a^2 - 0^2} = 0, \quad A(a) = 4 \frac{b}{a} (a) \sqrt{a^2 - a^2} = 0$$

$$A(a\sqrt{2}/2) = 4 \frac{b}{a} \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{a^2 - \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2} = 2ab$$

Luego, el máximo de  $A(x)$  es  $A(a\sqrt{2}/2) = 2ab$  y es alcanzado en

$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . El valor de  $y$  correspondiente a este valor de  $x$  es:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (a\sqrt{2}/2)^2} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

En consecuencia, las dimensiones del rectángulo buscado son

$$2x = a\sqrt{2} \quad \text{y} \quad 2y = b\sqrt{2}$$

**PROBLEMA 8.**

En un lago circular de 4 Km. de radio se tienen dos puntos P y Q, localizados en la orilla y diametralmente opuestos. Un pescador se encuentra en el punto P y quiere llegar, en el menor tiempo, al punto Q. El pescador puede remar a razón de 4 Km. por hora y puede caminar a razón de 8 Km. por hora. ¿Con qué ángulo  $\theta$  debe remar para alcanzar el punto R para luego caminar hacia Q?

**Solución**

Sea  $t_1$  el tiempo utilizado remando,  $t_2$  el tiempo utilizado caminando y T el tiempo total. Se tiene que:

$$T = t_1 + t_2 \quad (1)$$

El tiempo  $t_1$  es igual a la distancia de P a R dividida entre la velocidad del pescador remando. Esto es,

$$t_1 = \frac{d(P, R)}{4}$$

Considerando que el ángulo PRQ es recto (todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto), se tiene que:

$$d(P, R) = 8 \cos \theta \quad \text{y, por tanto,} \quad t_1 = 2 \cos \theta \quad (2)$$

Por otro lado, el tiempo  $t_2$  es igual a la longitud del arco RQ dividida entre la velocidad del pescador caminando. Esto es,

$$t_2 = \frac{\text{longitud del arco RQ}}{8}$$

Pero,

$$\text{Longitud del arco RQ} = 4(\text{ángulo central}) = 4(2\theta) = 8\theta \quad \text{y, por tanto,}$$

$$t_2 = \theta \quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) conseguimos:  $T = 2 \cos \theta + \theta$

Es claro que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Luego,

Debemos hallar el mínimo de  $T(\theta) = 2 \cos \theta + \theta$  en el intervalo  $[0, \pi/2]$ .

Hallemos los puntos críticos:

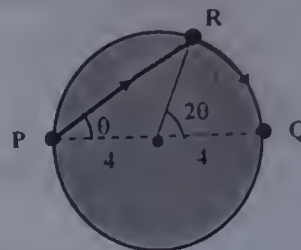
$$T'(\theta) = -2 \sin \theta + 1 \quad \text{y}$$

$$T'(\theta) = 0 \Leftrightarrow -2 \sin \theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Comparemos  $T(0)$ ,  $T(\pi/2)$  y  $T(\pi/6)$ :

$$T(0) = 2 \cos 0 = 2 \text{ horas}$$

$$T(\pi/2) = 2 \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} = 2(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57 \text{ horas.}$$



$$T(\pi/6) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 2,25 \text{ horas}$$

Luego, el mínimo es  $T(\pi/2) \approx 1,57$  horas y es alcanzado en  $\frac{\pi}{2}$ . En consecuencia, el pescador debe salir con un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$ . Esto significa que le conviene más olvidarse de la lancha y bordear el lago caminando.

**PROBLEMA 9.** El alcance de una pelota arrojada por un beisbolista está gobernado por la función:

$$A(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta,$$

donde,  $\theta$  es el ángulo de inclinación al lanzar la pelota,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $v_0$  es la velocidad inicial con que la pelota es lanzada.

Hallar el ángulo que proporcione el máximo alcance.

**Solución**

Debemos hallar el máximo de

$$A(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \text{ en } [0, \pi/2].$$

Hallemos los puntos críticos:

$$A'(\theta) = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos 2\theta$$

$$A'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{v_0^2}{g} \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Comparemos los valores  $A(0)$ ,  $A(\pi/2)$  y  $A(\pi/4)$ :

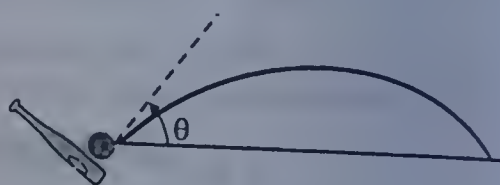
$$A(0) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2(0) = 0$$

$$A(\pi/2) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0^2}{g} \sin \pi = 0$$

$$A(\pi/4) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0^2}{g} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{v_0^2}{g}.$$

El máximo es  $A(\pi/4) = \frac{v_0^2}{g}$ , que es alcanzado en  $\frac{\pi}{4}$ .

Luego, para lograr el máximo alcance, la pelota debe lanzarse con un ángulo de inclinación de  $\frac{\pi}{4}$  Rad.





**PROBLEMA 10.** Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo inscrito en una esfera de radio  $R$ .

**Solución**

Sea  $r$  el radio del cilindro,  $h$  su altura y  $V$  su volumen. Sabemos que:

$$V = (\text{área de la base}) (\text{altura}) = \pi r^2 h \quad (1)$$

Por Pitágoras se tiene:

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + R^2 - r^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

$$\Rightarrow V = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$

Es claro que  $0 \leq r \leq R$ .

Debemos hallar el máximo de

$$V(r) = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2} \text{ en } [0, R].$$

Halleemos los puntos críticos:

$$V'(r) = 2\pi r^2 \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}} + 4\pi r \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{2\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \Rightarrow 2\pi r(2R^2 - 3r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \text{ ó } 2R^2 - 3r^2 = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ó } r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$$

Además,  $V'(r)$  no está definida en  $r = R$ .

Luego, los puntos críticos de  $V(r)$  en  $[0, R]$  son:  $0$ ,  $\frac{R\sqrt{6}}{3}$  y  $R$ .

Comparemos  $V(0)$ ,  $V(R)$  y  $V(R\sqrt{6}/3)$ :

$$V(0) = 2\pi(0)^2 \sqrt{R^2 - 0^2} = 0, \quad V(R) = 2\pi R^2 \sqrt{R^2 - R^2} = 0 \text{ y}$$

$$V(R\sqrt{6}/3) = 2\pi \left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right)^2 \sqrt{R^2 - (R\sqrt{6}/3)^2} = \pi \frac{4\sqrt{3}}{9} R^3$$

Luego, el máximo es  $V(R\sqrt{6}/3) = \pi \frac{4\sqrt{3}}{9} R^3$  y es alcanzado en  $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$

Por otro lado, sabemos que  $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ . Luego,



$$h = 2\sqrt{R^2 - (R\sqrt{6}/3)^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

Por tanto, las dimensiones del cilindro buscado son:

$$\text{radio} = \frac{R\sqrt{6}}{3} \approx 0,817 R \quad \text{y} \quad \text{altura} = \frac{2R\sqrt{3}}{3} \approx 1,155 R$$

**PROBLEMA 11.** Probar que el volumen del mayor cono circular recto inscrito en otro cono circular recto es  $\frac{4}{27}$  del volumen del cono grande.

**Solución**

Sean  $r$ ,  $h$  y  $V$  el radio, la altura y el volumen del cono pequeño. Sean  $R$ ,  $H$  y  $V_1$  el radio, la altura y el volumen del cono grande.

Sabemos que:

$$(1) \quad V = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad (2) \quad V_1 = \frac{\pi}{3} R^2 H$$

Como los triángulos  $ABD$  y  $ACE$  son semejantes,

$$\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R} \Rightarrow h = \frac{H}{R}(R-r) \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (1):

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 \frac{H}{R}(R-r) = \frac{\pi H}{3R} r^2 (R-r)$$

Vemos que  $0 \leq r \leq R$ .

Buscamos el máximo de

$$V(r) = \frac{\pi H}{3R} r^2 (R-r) \text{ en } [0, R].$$

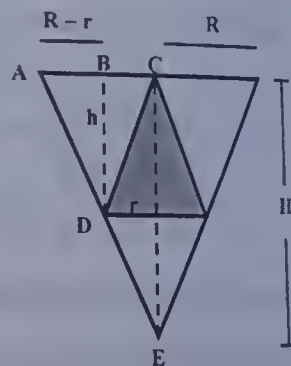
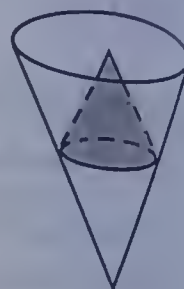
Halleemos los puntos críticos:

$$V'(r) = \frac{\pi H}{3R} [r^2(-1) + 2(R-r)r] = \frac{\pi H}{3R} [2rR - 3r^2] = \frac{\pi H}{3R} r [2R - 3r]$$

$$V'(r) = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{ó} \quad 2R - 3r = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{ó} \quad r = \frac{2}{3}R$$

Comparemos  $V(0)$ ,  $V(R)$  y  $V(\frac{2}{3}R)$ :

$$V(0) = \frac{\pi H}{3R} (0)^2 (R - (0)) = 0, \quad V(R) = \frac{\pi H}{3R} R^2 (R - R) = 0$$



$$V\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{\pi H}{3R} \left(\frac{2}{3}R\right)^2 \left(R - \frac{2}{3}R\right) = \frac{4}{81} \pi R^2 H$$

Luego, el máximo es  $V\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4}{81} \pi R^2 H$ . Ahora, teniendo en cuenta (2),

$$V\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4}{81} \pi R^2 H = \frac{4}{27} \left[\frac{\pi}{3} R^2 H\right] = \frac{4}{27} V_1$$

Esto es, el volumen del cono pequeño es  $\frac{4}{27}$  del volumen del cono grande.

### PROBLEMA 12.

Se quiere hacer el marco de un papagayo (cometa) con seis piezas de madera. Las cuatro piezas exteriores ya han sido cortadas con las longitudes que indica la figura. ¿Qué longitud deben tener las piezas diagonales si se quiere que el área del papagayo sea máxima?

#### Solución

La diagonal más larga divide al papagayo en dos triángulos simétricos. Esto implica que las dos diagonales dividen al papagayo en cuatro triángulos rectángulos.

Si  $h$  es la mitad de la longitud de la diagonal menor, se tiene que:

$$0 \leq h \leq 2$$

$$\text{Área de } T_1 = \frac{1}{2} d_1 h = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 - h^2} h$$

$$\text{Área de } T_2 = \frac{1}{2} d_2 h = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 - h^2} h$$

El área  $A$  del papagayo es igual a dos veces el área de  $T_1$  más dos veces el área de  $T_2$ . Luego,

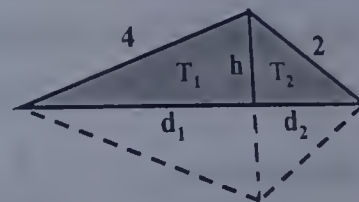
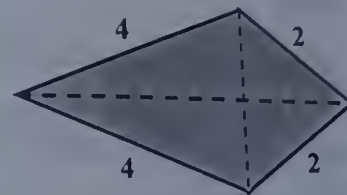
$$A = \sqrt{16 - h^2} h + \sqrt{4 - h^2} h = \left( \sqrt{16 - h^2} + \sqrt{4 - h^2} \right) h$$

Optimizamos:

$$A(h) = \left( \sqrt{16 - h^2} + \sqrt{4 - h^2} \right) h \quad \text{en el intervalo } [0, 2]$$

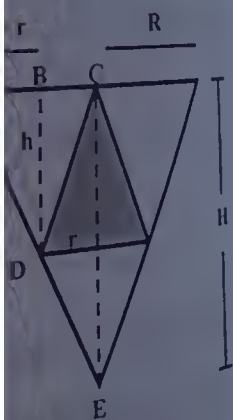
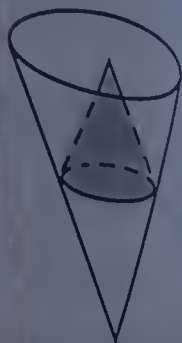
Derivando respecto a  $h$ :

$$A'(h) = \left( \sqrt{16 - h^2} + \sqrt{4 - h^2} \right) + \left( \frac{-h}{\sqrt{16 - h^2}} + \frac{-h}{\sqrt{4 - h^2}} \right) h$$



$$\frac{3}{\pi} \approx 1,155 R$$

circular recto inscrito  
el volumen del cono



$$\frac{\pi H}{3R} r [2R - 3r]$$

$$\frac{2}{3} R$$

$$R - R = 0$$



$$\begin{aligned}
 &= \left( \sqrt{16-h^2} + \sqrt{4-h^2} \right) - \left( \frac{\sqrt{4-h^2} + \sqrt{16-h^2}}{\sqrt{16-h^2} \sqrt{4-h^2}} \right) h^2 \\
 &= \left( \sqrt{16-h^2} + \sqrt{4-h^2} \right) \left( 1 - \frac{h^2}{\sqrt{16-h^2} \sqrt{4-h^2}} \right) \\
 &= \left( \frac{\sqrt{16-h^2} + \sqrt{4-h^2}}{\sqrt{16-h^2} \sqrt{4-h^2}} \right) \left( \sqrt{16-h^2} \sqrt{4-h^2} - h^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A'(h) = 0 &\Rightarrow \sqrt{16-h^2} \sqrt{4-h^2} = h^2 \Rightarrow (16-h^2)(4-h^2) = h^4 \\
 &\Rightarrow 128 - 20h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{64}{20} = \frac{16}{5} \Rightarrow h = \frac{4}{\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

Ahora,

$$A(0) = 0 \quad A(2) = \left( \sqrt{16-2^2} - 0 \right) (2) = 2\sqrt{12} < 4\sqrt{3} \approx 6,93$$

$$\begin{aligned}
 A(4/\sqrt{5}) &= \left( \sqrt{16 - (4/\sqrt{5})^2} + \sqrt{4 - (4/\sqrt{5})^2} \right) \left( \frac{4}{\sqrt{5}} \right) \\
 &= \left( \frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \left( \frac{4}{\sqrt{5}} \right) = \left( \frac{10}{\sqrt{5}} \right) \left( \frac{4}{\sqrt{5}} \right) = 8
 \end{aligned}$$

Luego,  $A(4/\sqrt{5}) = 8$  es el máximo absoluto.

En consecuencia, las longitudes de las diagonales buscadas son:

$$\text{Diagonal menor} = 2h = 2 \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \approx 3,58$$

$$\text{Diagonal mayor} = d_1 + d_2 = \sqrt{16 - (4/\sqrt{5})^2} + \sqrt{4 - (4/\sqrt{5})^2} = \frac{10}{\sqrt{5}} \approx 4,47$$

### PROBLEMA 13.

Se va a colocar un poste con un farol en el centro de una plazoleta circular de 20 m de radio. ¿Qué altura debe estar el farol para que ilumine lo mejor posible la vereda que rodea la plazoleta?

Se sabe que la iluminación  $I$  de la plazoleta es directamente proporcional al coseno del ángulo  $\theta$  de incidencia de los rayos luminosos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $d$  del farol a la plazoleta.

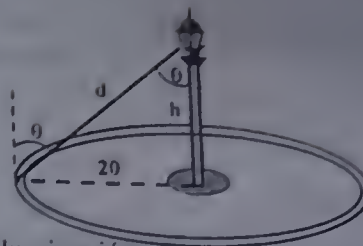
**Solución**

Nos dicen que:

$$I(\theta) = k \frac{\cos \theta}{d^2}, \text{ donde } k \text{ es una constante}$$

De acuerdo a la figura,

$$\sin \theta = \frac{20}{d} \Rightarrow d = \frac{20}{\sin \theta}$$



Reemplazando este valor de  $d$  en la ecuación de iluminación:

$$I(\theta) = k \frac{\cos \theta}{(20/\sin \theta)^2} = \frac{k}{400} \cos \theta \sin^2 \theta$$

Debemos optimizar:

$$I(\theta) = \frac{k}{400} \cos \theta \sin^2 \theta \text{ en el intervalo } [0, \pi/2]:$$

$$I'(\theta) = \frac{k}{400} [\cos \theta (2 \sin \theta \cos \theta) + \sin^2 \theta (-\sin \theta)]$$

$$= \frac{k}{400} \sin \theta [2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta]$$

$$I'(\theta) = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0 \text{ ó } 2 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \Rightarrow \theta = 0 \text{ ó } \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 2$$

$$\Rightarrow \theta = 0 \text{ ó } \tan^2 \theta = 2 \Rightarrow \theta = 0 \text{ ó } \theta_1 = \tan^{-1} \sqrt{2} = 0,9553$$

Pero,

$$I(0) = 0, I(\pi/2) = 0 \text{ y } I(0,9553) = \frac{k}{400} \cos(0,9553) \sin^2(0,9553) = 0,00096k$$

Luego,  $I(\theta_1) = I(0,9553) = 0,00096k$  es el máximo.

Por otro lado, se tiene:

$$\tan \theta = \frac{20}{h} \Rightarrow h = \frac{20}{\tan \theta}$$

En particular, tomando  $\theta = \theta_1$  y sabiendo que  $\tan \theta_1 = \sqrt{2}$  se tiene:

$$h = \frac{20}{\tan \theta_1} = \frac{20}{\sqrt{2}} \approx 14,14 \text{ m}$$

Esto es, la máxima iluminación en el corredor se obtiene al colocar el farol a 14,14 m de altura.

## PROBLEMAS DE EXTREMOS EN INTERVALOS ABIERTOS O SEMICERRADOS

Apliquemos este teorema para resolver problemas prácticos que se expresan mediante funciones cuyos dominios son intervalos abiertos o cerrados. El resultado clave que usaremos es dado en el teorema 5.11, que afirma que un extremo local único es un extremo absoluto.

**PROBLEMA 14.**

Una fábrica, para envasar alimentos, necesita pots de aluminio con tapa que tengan la forma de un cilindro circular recto y un volumen de  $250\pi \text{ cm}^3$ . Hallar las dimensiones que debe tener el pote si se quiere usar la mínima cantidad de estaño en su construcción.

**Solución**

Sea  $r$  el radio de la base,  $h$  la altura y  $A$  el área total de las paredes del pote. El área es la suma de las áreas de las dos bases, que es  $2\pi r^2$ , más el área de la superficie lateral, que es  $2\pi rh$ . Luego,

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad (1)$$

Por otro lado, el volumen del cilindro circular recto es

$$V = \pi r^2 h.$$

En nuestro caso, como  $V = 250\pi$ , tenemos que

$$\pi r^2 h = 250\pi \Rightarrow r^2 h = 250 \Rightarrow h = \frac{250}{r^2}$$

Reemplazando este valor de  $h$  en (1):

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{250}{r^2} \Rightarrow A = 2\pi \left( r^2 + \frac{250}{r} \right)$$

Vemos que la función  $A$  no está definida para  $r = 0$ . Además, como el radio no puede ser negativo, debemos tener que  $r > 0$ . En consecuencia, el problema consiste en hallar el mínimo de la función área:

$$A(r) = 2\pi \left( r^2 + \frac{250}{r} \right) \quad \text{en el intervalo abierto } (0, +\infty).$$

Halleemos los puntos críticos:

$$A'(r) = 2\pi \left( 2r - \frac{250}{r^2} \right) = 4\pi \left( \frac{r^3 - 125}{r^2} \right)$$

$$A'(r) = 0 \Rightarrow r^3 - 125 = 0 \Rightarrow r^3 = 125 \Rightarrow r = 5$$

$A'(r)$  no está definida en 0, pero 0 no está en  $(0, +\infty)$ .

Luego, 5 es el único punto crítico de  $A(r)$  en el intervalo  $(0, +\infty)$ .

Apliquemos a 5 el criterio de la segunda derivada:

$$A''(r) = 2\pi \left( 2 + \frac{500}{r^3} \right) \Rightarrow A''(5) = 2\pi \left( 2 + \frac{500}{5^3} \right) = 12\pi > 0$$

Luego,  $A(5) = 150\pi$  es un mínimo local. Como éste es el único extremo local de la función  $A(r)$  en  $(0, +\infty)$ , se concluye que  $A(5) = 150\pi$  es el mínimo absoluto.

En consecuencia, las dimensiones buscadas del pote son:

$$\text{radio} = r = 5 \text{ cm. y altura} = h = \frac{250}{5^2} = 10 \text{ cm.}$$





**PROBLEMA 15.** Un local tiene dos corredores de 6 y 8 metros de ancho, que forman una esquina como indica la figura. Hallar el largo del tubo de mayor longitud posible que pueda pasar horizontalmente por la esquina.

**Solución**

Tracemos los segmentos que, pasando por el vértice interior, tocan los lados exteriores de ambos corredores. Estos segmentos tienen distintas longitudes. La longitud del tubo que buscamos corresponde a la longitud mínima de los segmentos antes mencionados.

Tomemos uno de los segmentos. La esquina divide a este segmento en dos partes cuyas longitudes las denotamos por  $x$  e  $y$ , respectivamente. Si  $L$  es la longitud del segmento, tenemos que:

$$(1) \quad L = x + y \quad (2) \quad x = 8 \sec \theta$$

$$(3) \quad y = 6 \operatorname{cosec} \theta$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) obtenemos la función:

$$L(\theta) = 8 \sec \theta + 6 \operatorname{cosec} \theta \quad (4)$$

$$L(\theta) \text{ no está definida en } 0 \text{ ni en } \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Esto es, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Nuestra tarea es encontrar el mínimo absoluto de la función

$$L(\theta) = 8 \sec \theta + 6 \operatorname{cosec} \theta$$

$$\text{en el intervalo abierto } (0, \frac{\pi}{2}).$$

Halle los puntos críticos:

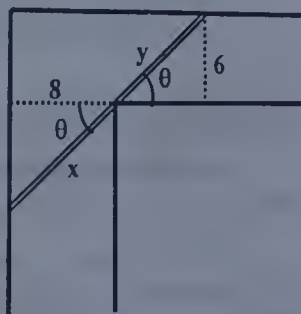
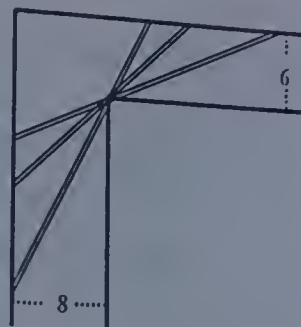
$$L'(\theta) = 8 \sec \theta \tan \theta - 6 \operatorname{cosec} \theta \cot \theta \quad (5)$$

$$L'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 8 \sec \theta \tan \theta = 6 \operatorname{cosec} \theta \cot \theta$$

$$\Leftrightarrow 8 \frac{1}{\cos \theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 6 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^3 \theta}{\cos^3 \theta} = \frac{6}{8} \Leftrightarrow \tan^3 \theta = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \sqrt[3]{3/4} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\sqrt[3]{3/4})$$



$L(\theta)$  tiene un único punto crítico en el intervalo abierto  $(0, \pi/2)$ , que es

$$\theta_0 = \tan^{-1}(\sqrt[3]{3/4}) \approx 0,7376 \text{ rad.} = 42^\circ 15' 25''$$

Analicemos la naturaleza del punto crítico:

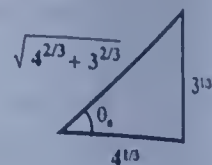
$$L''(\theta) = 8 [\sec \theta \tan^2 \theta + \sec^3 \theta] + 6 [\operatorname{cosec} \theta \cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^3 \theta]$$

Como  $\theta_0$  está en el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$  y aquí todas las funciones trigonométricas son positivas, tenemos que  $L''(\theta_0) > 0$ . Por tanto,  $L(\theta_0)$  es un mínimo local. Además, por ser éste el único extremo local en  $(0, \frac{\pi}{2})$ , concluimos también que es

mínimo absoluto. Considerando que

$$\tan \theta_0 = \sqrt[3]{3/4} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3^{1/3}}{4^{1/3}},$$

construimos el triángulo adjunto y tenemos:



$$L(\theta_0) = 8 \sec \theta_0 + 6 \operatorname{cosec} \theta_0$$

$$\begin{aligned} &= 8 \frac{(4^{2/3} + 3^{2/3})^{1/2}}{4^{1/3}} + 6 \frac{(4^{2/3} + 3^{2/3})^{1/2}}{3^{1/3}} \\ &= 2(4)^{2/3} (4^{2/3} + 3^{2/3})^{1/2} + 2(3)^{2/3} (4^{2/3} + 3^{2/3})^{1/2} \\ &= 2(4^{2/3} + 3^{2/3}) (4^{2/3} + 3^{2/3})^{1/2} = 2(4^{2/3} + 3^{2/3})^{3/2} \\ &= 2 \left[ \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{9} \right]^{3/2} \approx 9,87 \text{ m.} \end{aligned}$$

#### PROBLEMA 16. Refracción de la luz.

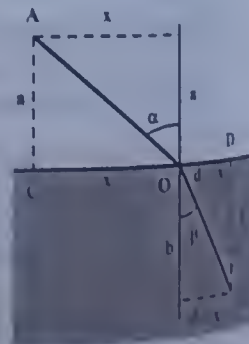
El principio de Fermat de óptica dice que la luz va de un punto a otro por el camino que requiere la menor cantidad de tiempo.

Se tiene un punto A que está a  $a$  m. arriba de la superficie de una piscina y un punto B que está dentro del agua a  $b$  m. de profundidad. Desde A parte un rayo, toca la superficie del agua en un punto O, cambia de dirección y pasa por el punto B. El ángulo  $\alpha$  es el ángulo de incidencia y  $\beta$  es el de refracción.

Si la luz se propaga en el aire a una velocidad  $v_1$ , y en el agua a una velocidad  $v_2$ , usando el principio de Fermat, probar que

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Solución



Sean  $x$  la distancia de  $C$  a  $O$ ,  $d$  la distancia de  $C$  a  $D$  y  $T = T(x)$  el tiempo que toma el rayo de luz para llegar desde  $A$  hasta  $B$  pasando por el punto  $O$ . Sean  $t_1$  y  $t_2$  los tiempos que toma el rayo de luz para llegar de  $A$  a  $O$  y de  $O$  a  $B$ , respectivamente. Tenemos:

$$\text{Longitud de } \overline{OA} = \sqrt{a^2 + x^2} \quad \text{y} \quad \text{Longitud de } \overline{OB} = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}.$$

Luego,

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Pero

$$T(x) = t_1 + t_2$$

Luego,

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Si el camino escogido es el que da tiempo mínimo, se debe cumplir:  $T'(x) = 0$ .

Pero,

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

Luego,

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \quad (1)$$

Pero,

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin \alpha \quad \text{y} \quad \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \sin \beta$$

Reemplazando estos valores en (1) se tiene:

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

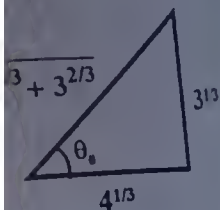
### PROBLEMA 17.

Un aviso comercial de 9 m. de altura está pintado sobre una pared vertical. La base del aviso está a 16 m. sobre el nivel del ojo de un observador. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse el observador para que el ángulo formado por el ojo y los extremos superior e inferior del aviso sea máximo?

*Solución*

Sea  $x$  la distancia del observador a la pared y sea  $\theta$  el ángulo formado por el ojo del observador y los extremos del aviso. Se tiene que,

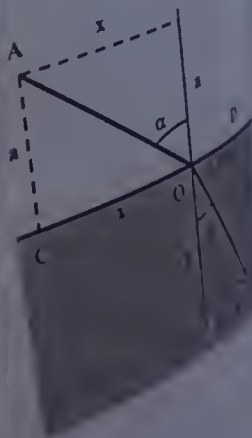
$$\theta = \alpha - \beta, \text{ donde}$$



$$3)^{1/2}$$

$$2/3)^{3/2}$$

de un punto a otro por el





$$\alpha = \cot^{-1} \frac{x}{25} \quad \text{y} \quad \beta = \cot^{-1} \frac{x}{16}$$

Luego,

$$\theta = \cot^{-1} \frac{x}{25} - \cot^{-1} \frac{x}{16}$$

Debemos hallar un valor de  $x$  en el intervalo  $(0, +\infty)$  en el cual la función anterior nos dé un máximo absoluto.

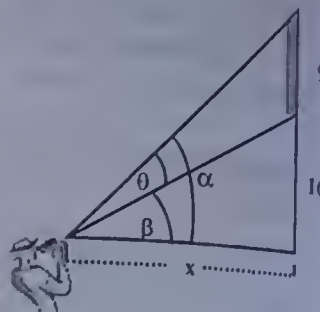
Derivamos la función respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= -\frac{1}{1+(x/25)^2} \left( \frac{1}{25} \right) + \frac{1}{1+(x/16)^2} \left( \frac{1}{16} \right) \\ &= -\frac{25}{25^2+x^2} + \frac{16}{16^2+x^2} \end{aligned}$$

Ahora hallamos los puntos críticos:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} = 0 &\Leftrightarrow -\frac{25}{25^2+x^2} + \frac{16}{16^2+x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{25}{25^2+x^2} = \frac{16}{16^2+x^2} \\ &\Leftrightarrow 25(16^2+x^2) = 16(25^2+x^2) \Leftrightarrow 9x^2 = 3.600 \Rightarrow x = 20 \end{aligned}$$

Aplicando el criterio de la primera o de la segunda se verifica que el punto crítico  $x = 20$  corresponde a un máximo relativo. Además, como  $x = 20$  es el único extremo relativo en el intervalo  $(0, +\infty)$ , estamos frente al máximo absoluto. Por tanto, para obtener un ángulo máximo, el observador debe colocarse a 20 m. de la pared.



### PROBLEMA 18.

Se tiene una hoja larga de papel de 24 cm. de ancho. Una esquina de la hoja es doblada hasta tocar el lado opuesto. ¿En que parte debe doblarse la hoja para que la longitud del doblez sea mínima? En otras palabras, hallar el valor de  $x$  que minimiza a  $L$ .

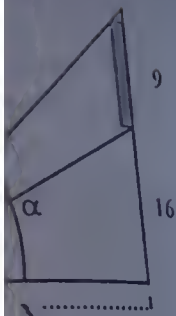
**Solución**

Tenemos que:

$$\cos \theta = x/L \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{24-x}{x} &= \cos \alpha = \cos(\pi - 2\theta) = \cos(\pi + (-2\theta)) \\ &= -\cos(-2\theta) \quad (\text{Ident. Trig. 20}) \\ &= -\cos 2\theta \\ &= -(2\cos^2 \theta - 1) \quad (\text{Ident. Trig. 28}) \end{aligned}$$





$$\frac{1 - 2\cos^2\theta}{L^2 - 2x^2} = \frac{1 - 2(x/L)^2}{L^2} \quad (\text{por (1)})$$

Luego,

$$\frac{24-x}{x} = \frac{L^2 - 2x^2}{L^2} \Rightarrow L^2(24-x) = x(L^2 - 2x^2) \Rightarrow L^2 = \frac{x^3}{x-12}$$

$$\Rightarrow L = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x-12}}$$

Por otro lado, para la esquina doblada alcance el lado opuesto en un punto que no sea la otra esquina inferior, debemos tener que  $12 < x$ . En consecuencia la función a minimizar es:

$$L(x) = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x-12}} \quad \text{en el intervalo } (12, +\infty)$$

Bien,

$$L'(x) = \frac{\sqrt{x-12} \left( \frac{3}{2} x^{1/2} \right) - x^{3/2} \frac{1}{2\sqrt{x-12}}}{x-12} = \Rightarrow L'(x) = \frac{x^{1/2}(x-18)}{(x-12)^{3/2}}$$

Vemos que  $L(x)$  tiene tres números críticos: 0, 12 y 18. Pero, sólo 18 está en el intervalo  $(12, +\infty)$ . Además, el criterio de la primera derivada nos asegura que  $L(18)$  es un mínimo local y, por ser este el único extremo local en  $(12, +\infty)$ ,  $L(18)$  es mínimo absoluto. Luego,  $x = 18$  es el número buscado.

**PROBLEMA 19.** Hallar las dimensiones del cono circular recto de volumen mínimo que se puede circunscribir en una esfera de radio  $r$ .

**Solución**

Sean

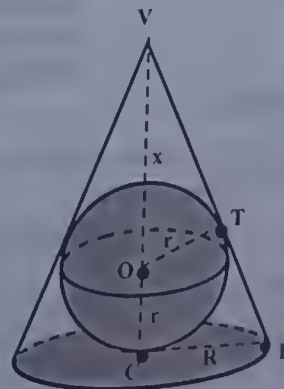
$R$  = radio del cono

$h$  = altura del cono.

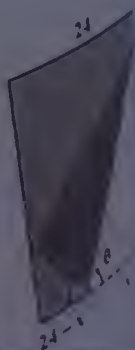
$x$  = la longitud de  $\overline{OV}$

Los triángulos rectángulos  $VCB$  y  $VTO$ , tener un ángulo agudo común, son semejantes. Luego,

$$\frac{R}{r} = \frac{x+r}{\sqrt{x^2 - r^2}} \Rightarrow R = \frac{r(x+r)}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$



24 cm. de ancho. Una  
tocar el lado opuesto  
para que la longitud de  
ras, hallar el valor de  $x$



$$R^2 = \frac{r^2(x+r)^2}{x^2 - r^2} = \frac{r^2(x+r)^2}{(x+r)(x-r)} = \frac{r^2(x+r)}{x-r}$$

El volumen del cono es:

$$V = \frac{\pi}{3} R^2 h = \frac{\pi}{3} \frac{r^2(x+r)}{x-r} (x+r) = \frac{\pi}{3} \frac{r^2(x+r)^2}{x-r}$$

Para tener un cono se debe tener que  $x > r$ . Luego, debemos optimizar

$$V = \frac{\pi}{3} \frac{r^2(x+r)^2}{x-r} \text{ en el intervalo } (r, +\infty)$$

Derivando:

$$V'(x) = \frac{\pi r^2}{3} \frac{(x-r)(2)(x+r) - (x+r)^2}{(x-r)^2} = \frac{\pi r^2}{3} \frac{(x+r)(x-3r)}{(x-r)^2}$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x+r=0 \text{ ó } x-3r=0 \Rightarrow x=-r=0 \text{ ó } x=3r$$

Los números críticos son:  $-r$ ,  $3r$  y  $r$ . Pero en  $(r, +\infty)$  sólo está  $3r$ .

El criterio de la primera derivada nos dice  $V(3r)$  es un mínimo. Luego, las dimensiones del cono buscado son:

$$h = x+r = 3r-r = 2r$$

$$R = \frac{r(x+r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} = R = \frac{r(3r+r)}{\sqrt{(3r)^2 - r^2}} = \frac{4r^2}{\sqrt{8r^2}} = \frac{4r^2}{2r\sqrt{2}} = \sqrt{2}r$$

### PROBLEMA 20.

Un bañista se encuentra en un punto O de una playa, observado dos veleros A y B, que se encuentran en un punto P. Este punto P está a 1 Km de distancia y exactamente frente al observador. Los veleros comienzan a navegar siguiendo una trayectoria paralela a la playa. El velero B es 3 veces más rápido que el velero A. Hallar el máximo valor del ángulo de observación  $\theta$  entre los dos veleros.

**Solución**

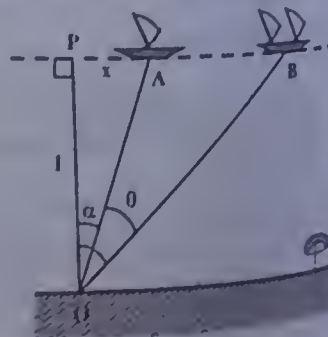
Si  $\beta$  el ángulo POB y  $\alpha$  el ángulo POA, entonces

$$\theta = \beta - \alpha$$

Sea  $x$  la distancia de P al velero A. Luego,  $3x$  es la distancia del punto P al velero B. Aún más, tenemos que:

$$\tan \alpha = x \quad \text{y} \quad \tan \beta = 3x$$

De acuerdo al identidad trigonométrica 25 se tiene:





$$\frac{r^2(x+r)}{x-r}$$

$$\frac{\pi}{3} \frac{r^2(x+r)^2}{x-r}$$

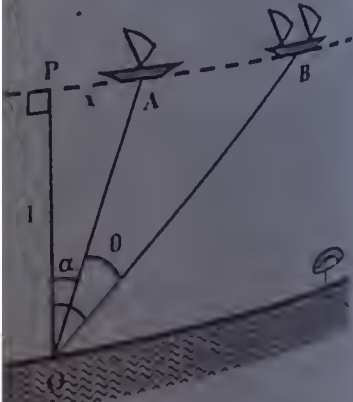
Luego, debemos optimizar:

$$= \frac{\pi r^2}{3} \frac{(x+r)(x-3r)}{(x-r)^2}$$

$x = -r = 0$  ó  $x = 3r$   
 o en  $(r, +\infty)$  sólo está  $3r$ .  
 e  $V(3r)$  es un mínimo. Luego, las

$$\frac{4r^2}{2r\sqrt{2}} = \sqrt{2}r$$

en un punto O de una playa.  
 B, que se encuentra en un punto  
 Km de distancia y exactamente  
 s veleros comienzan a navegar  
 paralela a la playa. El velero B es  
 velero A. Hallar el máximo valor  
 $\theta$  entre los dos veleros.



ne:

## Capítulo 5. Aplicaciones de la Derivada

369

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{\frac{3x}{1+(3x)(x)} - \frac{x}{1+3x^2}}{1 + \left(\frac{3x}{1+(3x)(x)}\right)\left(\frac{x}{1+3x^2}\right)}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1+3x^2}\right)$$

Optimizamos:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1+3x^2}\right) \text{ en el intervalo } [0, +\infty)$$

Derivando:

$$\theta' = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1+3x^2}\right)^2} \left(\frac{2x}{1+3x^2}\right)'$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1+3x^2}\right)^2} \frac{2(1-3x^2)}{(1+3x^2)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1+3x^2}\right)^2} \frac{2(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{(1+3x^2)^2}$$

Esto es,

$$\theta' = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1+3x^2}\right)^2} \frac{2(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{(1+3x^2)^2} \quad (2)$$

$$\theta' = 0 \Rightarrow \frac{2(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{(1+3x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ó } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Desechamos  $-1/\sqrt{3}$  por estar fuera de  $[0, +\infty)$ .

El criterio de la primera derivada aplicado en (2) nos dice que  $\theta$  tiene un máximo local en  $1/\sqrt{3}$  y, por ser extremo único, éste es un máximo absoluto.

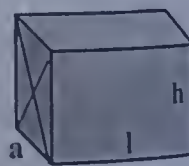
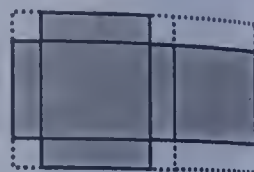
Luego, el ángulo buscado es:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2(1/\sqrt{3})}{1+3(1/\sqrt{3})^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2(1/\sqrt{3})}{1+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 5.6

1. (Área Máxima). Hallar las dimensiones de un rectángulo de 72 m. de perímetro que encierra un área máxima.
2. (Área Máxima). Probar que entre todos los rectángulos de perímetro fijo, el que encierra un área máxima es el cuadrado.

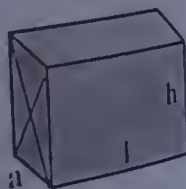
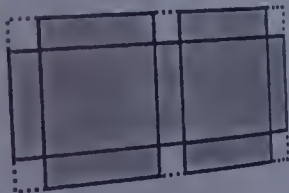
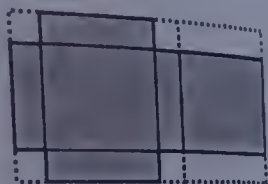
3. (Área Máxima). Se quiere cercar un terreno rectangular que está a las orillas de un río. Si se cercan sólo tres lados del terreno y se cuenta con 400 m de alambrada. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno si se quiere que tenga área máxima?
4. (Construcción de envases). Se construye cajas sin tapa utilizando láminas de cartón cuadrado de 96 cm. de lado, a las cuales se recorta un pequeño cuadrado en cada esquina. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado cortado si se quiere que la caja tenga volumen máximo?
5. (Construcción de envases). Se construyen cajas sin tapa utilizando láminas de cartón rectangulares de 21 cm. por 16 cm., a las cuales se recorta un pequeño cuadrado en cada esquina. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado si se quiere que la caja tenga máximo volumen?
6. (Construcción de envases). Se construyen cajas con tapa utilizando láminas de cartón rectangulares de 8 dm. por 5 dm., a las cuales se les recortan los cuadrados y los rectángulos marcados en la figura adjunta. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado si se quiere que la caja tenga máximo volumen?
7. (Construcción de envases). Se construyen cajas con tapa, las cuales también tienen caras laterales. Para esto, se usan láminas de cartón rectangulares de 9 dm. por 6 dm., a las cuales se les recorta los 6 cuadrados indicados en la figura adjunta. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado si se quiere que la caja tenga máximo volumen?
8. (Volumen máximo). El reglamento del correo exige que la suma de las longitudes (largo, ancho y altura) de un paquete no debe exceder 120 cm. Hallar las dimensiones de la caja con base cuadrada, que cumpla las regulaciones del correo y que tenga máximo volumen.
9. (Pista de carreras). Se desea construir una pista de carreras de 560 m. de longitud. La pista debe encerrar un terreno que tenga la forma de un rectángulo con un semicírculo adjunto a cada uno de los lados opuestos del rectángulo. El rectángulo debe tener área máxima. Hallar las dimensiones del rectángulo.
10. (Pista de carreras). Se desea construir una pista de carreras de 400 m. de longitud. La pista debe encerrar un terreno que tenga la forma de un rectángulo con un semicírculo adjunto a cada uno de los lados opuestos del rectángulo. ¿Cuál es la máxima área que puede tener el terreno encerrado?



ular que está a las orillas  
y se cuenta con 400 m. de  
eno si se quiere que tenga

tapa utilizando láminas de  
es se recorta un pequeño  
gitud del lado del cuadrado  
mo?

n tapa utilizando láminas de  
uales se recorta un pequeño  
gitud del lado del cuadrado si



ista de carreras de 560 m de  
no que tenga la forma de  
a uno de los lados opuestos  
cima. Hallar las dimensiones de

pista de carreras de 400 m de  
eno que tenga la forma de  
da uno de los lados opuestos  
de tener el terreno encerrado

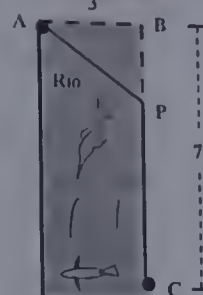
11. (Máxima claridad). Se desea construir una ventana de 7 m. de perímetro y que tenga la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. ¿Qué dimensiones debe tener si se quiere que ella deje pasar la máxima claridad? Sugerencia: A mayor área, mayor claridad.



12. (Máxima claridad). Una ventana de 18 pies de perímetro está conformada por un rectángulo coronada por un triángulo equilátero. El vidrio que cubre el rectángulo es más claro que el que cubre el triángulo. Por pie cuadrado, el vidrio del rectángulo deja pasar el doble de luz del que cubre el triángulo. Hallar las dimensiones de la ventana que dejan pasar la máxima claridad.

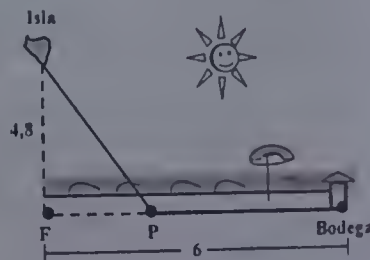


13. (Costo mínimo). Dos puntos A y B están opuestos uno al otro en las riberas de un río de 3 Km. de ancho. Un tercer punto C está en la misma ribera que B pero a 7 Km. río abajo. Una compañía de teléfonos desea unir telefónicamente los puntos A y C. Para esto, se debe tender dos cables: Uno de A a un punto P, en la ribera opuesta, y el otro cable de P a C. Si el tendido del cable en el agua cuesta \$ 17.000 el Km. y en tierra cuesta \$ 8.000 el Km. ¿Dónde debe estar localizado el punto P para que el costo sea mínimo?



14. (Costo mínimo). En el problema anterior, si el tendido de cable en el agua cuesta \$ 13.000 el Km. y en tierra \$ 12.000. ¿Dónde debe estar localizado el punto P?

15. (Tiempo mínimo). Una isla se encuentra a 4,8 Km. de una playa recta. En la playa, a 6 Km. del punto F que está frente la isla, funciona una bodega. Un hombre que está en la isla quiere ir a la bodega. Se sabe que el hombre rema a 3 Km./h. y camina a 5 Km./h. ¿Qué camino debe seguir para llegar a la bodega en el menor tiempo posible?



16. (Tiempo mínimo). Si en el problema anterior el hombre rema a razón de 4 Km./h y camina a razón de 5 Km./h. ¿Qué camino debe seguir?

17. (Hotelería). Un hotel tiene 100 habitaciones. El gerente sabe que cuando el precio por habitación es de \$ 45 todas las habitaciones son alquiladas; pero por cada dólar de aumento, una habitación se desocupa. Si el precio de mantenimiento de una habitación ocupada es de \$ 5. ¿Cuántas habitaciones debe alquilarse para obtener máxima ganancia? ¿Cuál debe ser el precio por habitación?

18. (Agricultura). Una finca está sembrada de mangos a razón de 80 plantas por hectárea. Cada planta produce un promedio de 960 mangos. Por cada planta

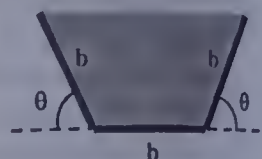


adicional que se siembre, el promedio de producción por planta se reduce en 10 mangos. ¿Cuántas plantas se deben sembrar por hectárea para obtener la máxima producción?

19. (Área Máxima). Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un semicírculo de radio  $r$ .



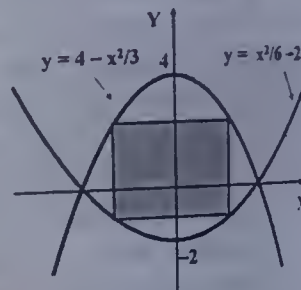
20. (Volumen máximo). Se planea construir un canal de concreto para transportar agua a una finca. La sección transversal del canal es como se indica la figura, teniendo la base y las paredes laterales una misma longitud  $b$ . Hallar el ángulo  $\theta$  que permite que el canal transporte el mayor volumen de agua.



Sugerencia: Expresé el área del trapecio en términos de  $\theta$  y maximice.

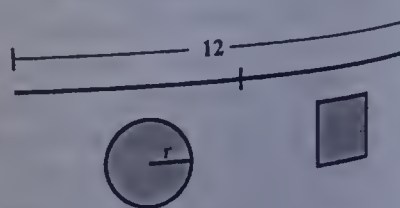
21. (Área Máxima). Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes y que puede inscribirse en la región acotada por las parábolas

$$y = 4 - \frac{x^2}{3}, \quad y = \frac{x^2}{6} - 2$$

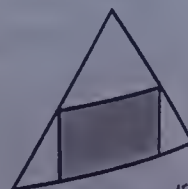


22. (Resistencia Máxima). De un tronco circular de radio 3 dm. se quiere cortar una viga rectangular de máxima resistencia. Hallar las dimensiones del rectángulo. Se sabe que la resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional a su ancho y al cuadrado de su altura. Es decir,  $R = kah^2$ , donde  $R$  es la resistencia,  $k$  es una constante de proporcionalidad,  $a$  es el ancho del rectángulo y  $h$  su altura.

23. (Área Mínima). Un trozo de alambre de 12 m. se corta en dos partes. Una parte se doblará para formar una circunferencia y la otra se doblará para formar un cuadrado. ¿Dónde se hará el corte si : a. La suma de las áreas es mínima. b. La suma de las áreas es máxima?

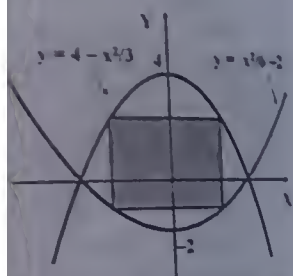
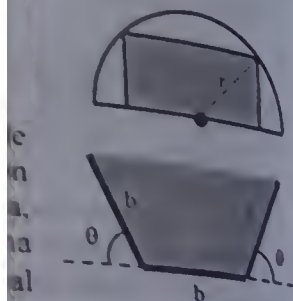


24. (Área Máxima). Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo equilátero de 12 cm. de lado, de tal modo que un lado del rectángulo descansa sobre un lado del triángulo.

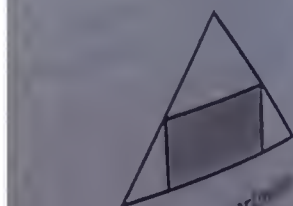
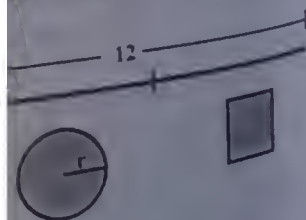


25. (Área Máxima). Probar que de todos los triángulos isósceles de perímetro fijo, el que tiene área máxima es un triángulo equilátero.
26. (Área Máxima). Probar que de todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia, el que tiene área máxima es un triángulo equilátero.

por planta se reduce en  
rectángulo para obtener la

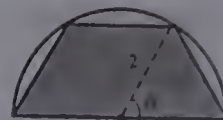


io 3 dm. se quiere cortar  
lar las dimensiones del  
ctangular es directamente  
Es decir,  $R = kah^2$ , donde  
nalidad, a es el ancho del



ulos isósceles de perimetro  
ilátero.  
os isósceles inscritos en un  
ángulo equilátero

27. (Área Máxima). Se inscribe un trapecio en un semicírculo de radio 2, en tal forma que un lado del trapecio coincide con el diámetro. Hallar máxima posible área del trapecio.



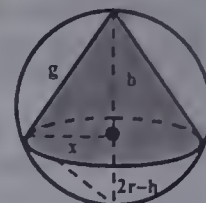
28. (Área lateral máxima). Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de área lateral máxima inscrito en una esfera de radio r.

29. (Volumen máximo). Hallar las dimensiones del cono circular recto de volumen máximo inscrito en una esfera de radio r.

Sugerencia:  $V = \text{Volumen del cono} = \frac{1}{3} \pi x^2 h$ .

Pero, por semejanza de triángulos:  $x^2 = h(2r - h)$ .

Luego,  $V = \frac{1}{3} \pi h^2(2r - h)$ .



30. (Área lateral máxima). Hallar las dimensiones del cono circular recto de área lateral máxima inscrito en una esfera de radio r. Ver la figura del problema anterior.

Sugerencia:  $A = \text{Área lateral del cono} = \pi xg$ .

31. (Volumen máximo). Probar que el volumen del mayor cilindro circular recto inscrito en un cono circular recto es  $\frac{4}{9}$  del volumen del cono.

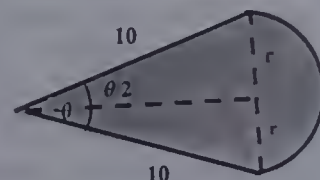


32. (Área máxima). Se construyen figuras conformadas por un triángulo isósceles de 10 cm. de lado al que se le adjunta un semicírculo, como indica el dibujo adjunto. Hallar:

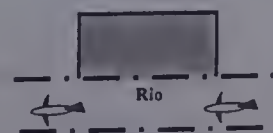
- a. El ángulo  $\theta$  correspondiente a la figura de área máxima.

- b. El área máxima.

Sugerencia: Ver el problema resuelto 5 de la sección 1.1.



33. (Cerca mínimo). Se quiere construir un conuco rectangular de  $7.200 \text{ m}^2$  de área a la orilla de un río. Si sólo se deben cercar los tres lados que indica la figura, ¿cuáles deben ser las longitudes de estos lados si se quiere la menor cantidad posible de cerco?



34. (Cerca mínimo). Se quiere cerrar un terreno rectangular y luego dividirlo en dos partes iguales mediante una cerca como indica la figura. El área de terreno encerrado debe ser de  $864 \text{ m}^2$ . Si se desea utilizar la mínima cantidad de cerca, ¿qué dimensiones debe tener el rectángulo?





374

35. (Área mínima). Se quiere construir una caja cerrada de madera de  $72 \text{ dm}^3$  de volumen. La base debe ser un rectángulo cuyo largo sea el doble de su ancho.  
a. ¿Qué dimensiones debe tener la caja si se quiere usar la mínima cantidad de madera?  
b. ¿Qué dimensiones debe tener la caja si no tiene tapa?

36. (Área mínima). Se quiere imprimir un libro, en el cual cada página tenga 3 cm. de márgenes superior e inferior y 2 cm. de margen a cada lado. El texto escrito debe ocupar un área de  $294 \text{ cm}^2$ . Si se busca economizar papel, ¿qué dimensiones de la página son las más convenientes?



37. (Área máxima). Se tiene un terreno rectangular de  $480 \text{ m}^2$ . de área, sobre el cual se va a construir una casa que tendrá también forma rectangular. Para jardines se dejarán 5 m. de frente, 5 m. atrás y 4 m. a los costados. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno para que el área de la casa sea máxima?

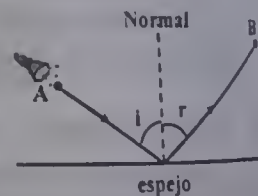
38. (Área mínima). Para envasar sus productos una compañía necesita potes cilíndricos de hojalata de  $2\pi$  litros de capacidad y con tapa. Si se busca usar la mínima cantidad de hojalata, ¿qué dimensiones debe tener cada pote?

39. (Área mínima). Resolver el problema anterior para el caso en que el pote no tenga tapa superior.

40. (Volumen máximo). Se quiere construir vasos (cilíndricos sin tapa) de vidrio que tengan  $108\pi \text{ cm}^3$  de material. ¿Qué dimensiones debe tener el vaso si se quiere que contenga la mayor cantidad de líquido?

41. (Velocidad más económica). Un bus debe hacer un viaje de 500 Km. a una velocidad constante  $x \text{ Km./h.}$  La gasolina cuesta \$ 0,5 por litro, el bus consume  $2 + \frac{x^2}{200}$  litros por hora, y el conductor cobra \$ 15 por hora. ¿cuál es la velocidad más económica?

42. (Ley de reflexión). Usando el principio de Fermat (la luz viaja de un punto a otro a través de la trayectoria que minimiza el tiempo) probar que si la luz parte de A se refleja en un espejo y pasa por el punto B, entonces el ángulo de incidencia  $i$  es igual al ángulo de reflexión  $r$ .

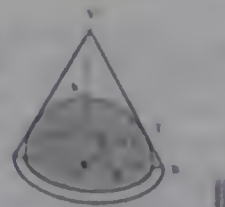


43. (Áreas óptimas). Se tiene una hoja larga de papel de 24 cm. de ancho. Una esquina se dobla en tal forma que el vértice doblado toque el lado opuesto, como se indica en la figura. Hallar el valor de  $x$  para el cual:  
a. El triángulo A tenga área máxima.  
b. El triángulo B tenga área mínima.

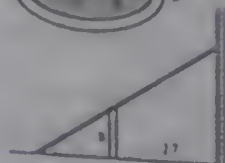




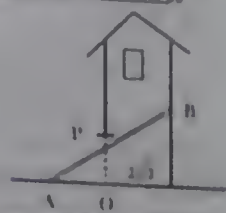
44. (Volúmenes iguales). Hallar las dimensiones de un cono circular recto de volumen máximo que se pueda circunscribir con un hemisferio (conocido) de radio 8 cm.



45. Frente a un edificio y a 27 pies de altura, se tiene una pared de 6 pies de altura. Hallar la longitud de la escuadra más corta que pueda apoyarse en el suelo, la pared y el edificio.



46. (Altura mínima). Hallar la altura mínima  $h = OP$  que debe tener una puerta de una torre para que a través de ella pueda pasar un tubo  $AB$  de longitud  $6\sqrt{6}$  m. El ancho de la torre es  $2\sqrt{2}$  m.



## SECCION 5.7

### METODO DE NEWTON-RAPHSON

Resolver una ecuación, no siempre es simple o factible. Aun más, la situación se complica cuando en la ecuación intervienen funciones trascendentes. Así, no existen fórmulas para resolver ecuaciones tan simples como  $\cos x = x$ .

Para ayudarnos en la tarea de hallar raíces de ecuaciones complicadas viene a nuestro auxilio el método de Newton-Raphson. Este método, mediante un simple proceso de iteración, podemos aproximar, con la exactitud deseada, una raíz real  $r$  de una ecuación  $f(x) = 0$ .

Este método fue presentado por Isaac Newton (1642-1727) en su obra *Method of Fluxions* escrita el año 1671 y publicada, muchos años después, en 1736. Para su método, Newton, como ejemplo, encuentra aproximaciones a la raíz de la ecuación  $x^3 - 2x - 5 = 0$  (ver el ejemplo 2, más abajo).

Joseph Raphson (1648-1715) fue un matemático inglés egresado de la Universidad de Cambridge y amigo de Newton. Estuvo involucrado, a favor de Newton, en la reventa con Leibniz sobre los orígenes del Cálculo. Raphson, a Newton le permitía acceso a sus trabajos, publicó el año 1690, mucho antes que Newton el *Method of Fluxions*, su obra *Analysis Aequationum Universalis*, en la que aparece por primera vez el método que ahora se llama de Newton-Raphson.

¿Qué dice este método? Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Si  $f(a)$  y  $f(b)$  tiene signos opuestos, el teorema del valor intermedio nos asegura que existe un

número real  $a = r$  tal que  $f(r) = 0$ . Esto es,  $r$  es una raíz de  $f$  que está cerca de  $a$ . Haciendo un esbozo rápido de la gráfica de  $f$ , elegimos una primera aproximación  $x_1$ . El método de Newton se basa en la hipótesis de que la recta tangente al gráfico en el punto  $(x_1, f(x_1))$  corta al eje  $X$  en un punto  $x_2$  cercano a  $r$ . Veamos cómo hallar  $x_2$ . La recta tangente  $l$  en el punto  $(x_1, f(x_1))$  tiene por ecuación

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

Si esta recta corta al eje  $X$  en  $x_2$ , tenemos

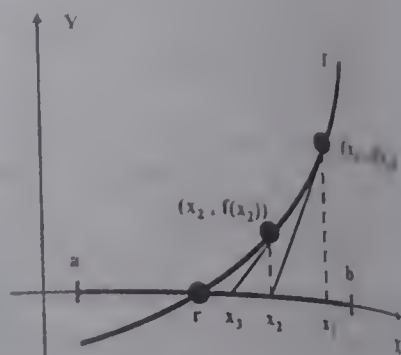
$$0 = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

De donde,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \text{ si } f'(x_1) \neq 0$$

Reiniciamos el proceso tomando  $x_2$  en lugar de  $x_1$  y logramos la tercera aproximación  $x_3$ , dado por

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$



Continuando el proceso, conseguimos una sucesión de aproximaciones  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ , donde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cada aproximación sucesiva  $x_n$  se llama una iteración.

Diremos que esta sucesión de aproximaciones converge a  $r$  si  $x_n$  se acerca más a  $r$  a medida que  $n$  crece, es decir cuando:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = r$$

En resumen, tenemos:

**METODO DE NEWTON-RAPSON.** Sea  $f(r) = 0$ , donde  $f$  es derivable en un intervalo abierto que contiene a  $r$ . Para aproximar a la raíz  $r$  seguir los siguientes pasos:

1. Tomar una estimación inicial  $x_1$  cercana a  $r$ . Ayudarse con el gráfico de  $f$ .
2. A partir de  $x_1$ , hallar nuevas estimaciones  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , mediante:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ donde } f'(x_n) \neq 0$$

3. La aproximación buscada es  $x_{n+1}$  si se cumple que  $x_{n+1} = x_n$ , con el grado de aproximación buscada.





**EJEMPLO 2.** Hallar una aproximación de raíz cuadrada de 2.

**Solución**

Sea  $f(x) = x^2 - 2$ . El gráfico de  $f$  nos muestra que el ecuación dada tiene una raíz real (ver Fig. 1) en el intervalo  $(1, 2)$ . Esta afirmación también la corroboramos viendo que  $f(1) = -1$  es negativo y  $f(2) = 2$  es positivo.

Tomamos que  $f(x) = x^2 - 2$  y

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k}$$

El gráfico nos sugiere tomar como aproximación inicial a  $x = 2$ .

Ahora,

$$x_1 = \frac{2^2 + 2}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$x_2 = \frac{2.25 + 2}{2 \cdot 2.25} = \frac{4.25}{4.5} = \frac{17}{18} \approx 0.944444$$

$$x_3 = \frac{2.137777 + 2}{2 \cdot 2.137777} = 2.094551472$$

$$x_4 = \frac{2.137777 + 2}{2 \cdot 2.137777} = 2.094551472$$

Vemos que  $x_3$  y  $x_4$  coinciden en las seis primeras cifras decimales (sección 5.2.1). Luego, la aproximación buscada es  $x \approx 2.094551472$  (sección 5.2.1).

$$x \approx 2.094551$$

**EJEMPLO 3.** Usando el método de Newton-Raphson, encontrar las raíces de la ecuación  $y = 2 \cos x$  y  $y = x^2$ .

**Solución**

Consideramos la ecuación  $y = 2 \cos x$  y  $y = x^2$ . La ecuación  $y = 2 \cos x$  es equivalente a  $\cos x = 1$  y  $y = x^2$  es equivalente a  $x^2 = 0$ . En consecuencia, aplicamos el método de Newton-Raphson a la ecuación  $f(x) = 0$ , donde  $f(x) = 2 \cos x - x^2$ .

Tomamos que  $f(x) = 2 \cos x - x^2$  y  $f'(x) = -2 \sin x - 2x$ .



$$x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = \frac{1.5^3 - 2(1.5) + 1}{3(1.5)^2 - 2} = \frac{1.125 - 3 + 1}{6.75 - 2} = \frac{-0.875}{4.75} = -0.1842105$$

La gráfica nos indica que tenemos una aproximación inicial a  $x_1 = 1.5$ .

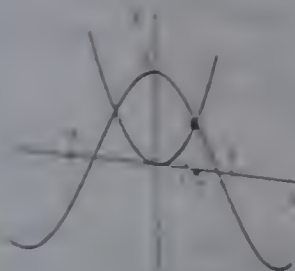
$$x_2 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{f(-0.1842105)}{f'(-0.1842105)}$$

$$= \frac{(-0.1842105)^3 - 2(-0.1842105) + 1}{3(-0.1842105)^2 - 2} = \frac{-0.00625 + 0.368421 + 1}{-0.102564 - 2} = \frac{1.362171}{-2.102564} = -0.6478125$$

$$x_3 = \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{f(-0.6478125)}{f'(-0.6478125)}$$

$$= \frac{(-0.6478125)^3 - 2(-0.6478125) + 1}{3(-0.6478125)^2 - 2} = \frac{-0.268421 + 1.295625 + 1}{1.25625 - 2} = \frac{1.027204}{-0.74375} = -1.38125$$

$$x_4 = \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = \frac{f(-1.38125)}{f'(-1.38125)}$$



Como por  $x_4$  ya coincidimos con la raíz, en 4 cifras decimales, luego la aproximación buscada es  $x_1 = 1.021818181$ , la redondeamos a 4 cifras decimales,  $x_1 = 1.0218$ .

El mismo algoritmo de aproximación. Derive una de las otras raíces aproximada a esta raíz, el valor 1.021818181, al cual coincide con  $x_1$ .

### EFECTOS EN LA REGLA DE NEWTON-RAPHSON

Supongamos la sucesión de aproximaciones  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  dadas por el método de Newton-Raphson, correspondientes a una ecuación dada  $f(x) = 0$ . Que aproximación inicial  $x_1$  no converge. Esto se puede deber a dos razones:

1. La primera aproximación  $x_1$  tal que  $f'(x_1) = 0$  o sea cuando la recta tangente en  $x_1$  para  $y = f(x_1)$  es horizontal. En tal situación no podemos calcular  $x_2$ , ya no tenemos división entre  $f'(x_1) = 0$ .

2. Puede suceder también que  $f'(x_1)$  sea muy 0, esto muy cercano a 0. En este caso la aproximación  $x_2$  se aleja del la raíz inicial y se ponga próxima a una de las raíces.

Una primera dificultad se pudo solucionar eligiendo la aproximación de una raíz inicial.

2. Exista una única raíz de  $f(x) = 0$  para los valores indicados. En cada caso, determine un intervalo  $I$  que lo contenga. Encuentre las raíces de  $f(x) = 0$  donde  $f(x) = \sqrt{x}$ , con  $x$  entero, de una raíz. Analice la función  $f(x) = 0$  donde  $f(x) = \sqrt{x}$ , con  $x$  entero, de una raíz. Analice la función  $f(x) = 0$  donde  $f(x) = \sqrt{x}$ , con  $x$  entero, de una raíz. Analice la función  $f(x) = 0$  donde  $f(x) = \sqrt{x}$ , con  $x$  entero, de una raíz.

Para ayudarlos particularmente, considere con el siguiente resultado, que se encuentra en algunos textos de Análisis Numérico.

Sea  $r$  es una raíz de  $f(x) = 0$  si existe un intervalo abierto  $I$  que contenga a  $r$  y allí se cumple que:

$$\left| \frac{f(x)f'(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1, \quad \forall x \in I \quad (1)$$

entonces la sucesión de aproximaciones  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  dada por el método de Newton-Raphson converge a  $r$  para cualquier aproximación inicial  $x_0$  tomada en el intervalo  $I$ .

Decimos que este resultado nos da una prueba parcial de la convergencia de esta serie se cumple. En otros, existen sucesiones que convergen a  $r$  sin cumplir la desigualdad dada o no se cumple.

**EJEMPLO 4.** Mediante la condición (1) anterior, demuestre que la sucesión de aproximaciones generada en el ejemplo 2 converge.

**Solución**

$$f(x) = x^3 - 2x - 5, \quad f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f''(x) = 6x.$$

Además, en el intervalo  $(2, 3)$  donde  $2 < x < 3$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)f'(x)}{(f'(x))^2} \right| &= \left| \frac{(x^3 - 2x - 5)(6x)}{(3x^2 - 2)^2} \right| < \left| \frac{(x^3 - 2x - 5)(6x)}{3x^4} \right| \\ &= \frac{6}{3} \left| \frac{(x^3 - 2x - 5)(x)}{x^4} \right| = \frac{2}{1} \left| \frac{(x^3 - 2x - 5)}{x^3} \right| \\ &= \frac{2}{1} \left| 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right| < \frac{2}{1} \left| 1 - \frac{2}{2^2} - \frac{5}{2^3} \right| < \frac{2}{1} (1 - \frac{1}{2} - \frac{5}{8}) \end{aligned}$$

Luego, la sucesión generada converge.



## PROBLEMAS RESUELTOS 5.7

**PROBLEMA 1.** Aproximar, con 5 cifras decimales, las raíces de

$$x^4 - 6x^2 + 8x + 8 = 0$$

**Solución**

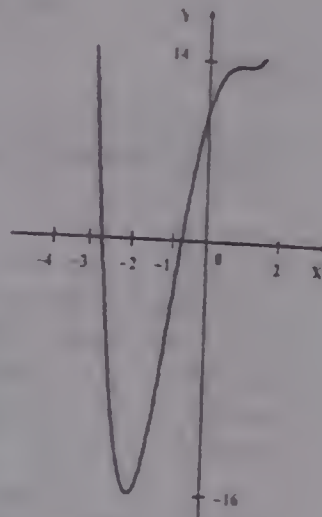
Sea  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 8$ . Se tiene:

$$f(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x+2)(x-1)^2,$$

$$f'(-2) = 0 \text{ y } f'(1) = 0$$

El gráfico de  $f$  nos dice que la ecuación dada tiene dos raíces. una,  $r_1$ , en el intervalo  $[-3, -2]$  y la otra,  $r_2$ , en el intervalo  $[-1, -0]$ .

En vista de que  $f'(-2) = 0$ , no se puede tomar  $x_1 = -2$  como aproximación inicial para ninguna de las dos raíces. Pero, nuevamente el gráfico, nos dice que para aproximar  $r_1$  se debe escoger  $x_1 < -2$ , y para aproximar  $r_2$  se debe escoger  $x_1 > -2$ . Más precisamente, el mismo gráfico nos sugiere que para  $r_1$  tomemos  $x_1 = -3$  y para  $r_2$ ,  $x_1 = -1$ . Es así como procedemos a continuación:



Tenemos que:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 6x_n^2 + 8x_n + 8}{4(x_n^3 - 3x_n + 2)} = \frac{3x_n^4 - 6x_n^2 - 8}{4(x_n^3 - 3x_n + 2)}$$

2. Aproximación de  $r_1$ :

$$x_1 = -3,$$

$$x_2 = \frac{3(-3)^4 - 6(-3)^2 - 8}{4((-3)^3 - 3(-3) + 2)} = \frac{181}{4(-16)} = -2,8228125$$

$$x_3 = -2,800151689$$

$$x_4 = -2,799446153$$

$$x_5 = -2,79944571$$

Por lo tanto  $r_1 = x_5 = -2,79944571$ , ó, con cinco cifras decimales,  $r_1 = -2,79945$

2. Aproximación de  $r_2$ :

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = \frac{3(-1)^4 - 6(-1)^2 - 8}{4((-1)^3 - 3(-1) + 2)} = -\frac{11}{4(4)} = -0,6875$$

$$x_1 = -0.679972769$$

$$x_2 = -0.67996066$$

$$x_3 = -0.67996066$$

Luego,  $r_1 = -0.67996066$  ó, con cinco cifras decimales,  $r_1 = -0.67996$

### PROBLEMA 2.

a. Hallar el punto  $P$ , en la gráfica de la función  $y = e^x$  que está más cercano al origen.

b. Hallar la distancia de este punto al origen.

Dar las respuestas con tres decimales de aproximación.

**Solución**

a. La distancia de un punto  $P = (x, e^x)$  cualquiera del gráfico de  $y = e^x$  al origen está dada por la función:

$$d = \sqrt{x^2 + (e^x)^2} = \sqrt{x^2 + e^{2x}}$$

El punto que buscamos es el punto cuyas coordenadas minimizan esta distancia, o, equivalentemente, minimizan el cuadrado de esta distancia:

$$d^2 = x^2 + e^{2x}$$

En consecuencia, debemos hallar los puntos críticos de

$$d^2 = x^2 + e^{2x}$$

$$\text{Bien, } \frac{d}{dx}(d^2) = 2x + 2e^{2x} = 0 \Rightarrow x + e^{2x} = 0$$

Resolvemos la ecuación:  $x + e^{2x} = 0$

Sea  $f(x) = x + e^{2x}$ . Se tiene que

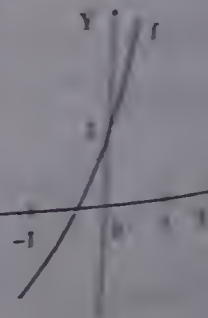
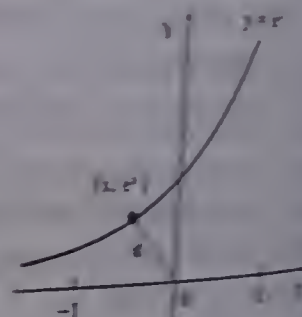
$$f'(x) = 1 + 2e^{2x} \text{ y}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n + e^{2x_n}}{1 + 2e^{2x_n}} = \frac{(2x_n - 1)e^{2x_n}}{1 + 2e^{2x_n}} = \frac{2x_n - 1}{e^{-2x_n} + 2}$$

El gráfico de  $f$  nos dice la ecuación dada tiene una única raíz y que está en el intervalo  $[-1, 0]$ .

Sea  $x_1 = 0.5$ . Entonces

$$x_2 = \frac{2x_1 - 1}{e^{-2x_1} + 2} = \frac{2(-0.5) - 1}{e^{-2(-0.5)} + 2} = \frac{-2}{e^{-1} + 2} = -0.67996066$$



$$x_1 = \frac{1,84776623}{4,334426452} = 0,426300053$$

$$x_1 = \frac{1,852600108}{4,345738097} = 0,426302751$$

Luego, la aproximación con tres cifras decimales es  $x = 0,426$  y el punto del gráfico de  $y = e^x$  más cercano al origen es

$$P_0 = (-0,426, e^{0,426}) = (-0,426, 0,653)$$

b. La distancia de  $P_0 = (-0,426, 0,653)$  al origen es

$$d = \sqrt{x^2 + e^{2x}} = \sqrt{(-0,426)^2 + e^{2(-0,426)}} = \sqrt{0,60803695} = 0,780$$

### PROBLEMA 3.

a. Sea  $a$  un número positivo y  $k$  un entero mayor que 1. Deducen, mediante el método de Newton-Raphson, la siguiente iteración para aproximar  $\sqrt[k]{a}$ .

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left( (k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$$

b. Usando esta iteración, hallar  $\sqrt[5]{17}$  con una precisión de 6 cifras decimales.

La iteración anterior, para  $k = 2$ , dice

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Esta fórmula fue conocida en la antigua Babilonia para computar la raíz cuadrada  $\sqrt{a}$ .

**Solución**

a.  $\sqrt[k]{a}$  es la raíz de la ecuación  $f(x) = x^k - a$ . Luego, de acuerdo a Newton-Raphson,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^k - a}{k x_n^{k-1}} = \frac{k x_n^k - (x_n^k - a)}{k x_n^{k-1}} \\ &= \frac{(k-1)x_n^k + a}{k x_n^{k-1}} = \frac{1}{k} \left( (k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) \end{aligned}$$

b. Tomamos como aproximación inicial  $x_1 = 1,5$ .



$$x_1 = \frac{1}{5} \left( 4x_0 + \frac{17}{x_0^4} \right) = \frac{1}{5} \left( 4(1.7) + \frac{17}{(1.7)^4} \right) = 1.771604913$$

$$x_1 = 1.774374802$$

$$x_1 = 1.762302434$$

$$x_1 = 1.762340377$$

$$x_2 = 1.762340348$$

Logo,  $\sqrt[5]{17} = 1.762340$  a cinco decimales.

**PROBLEMA 4.** Mostrar que el método de Newton-Raphson no funciona para aproximar la raíz de la ecuación

$$\sqrt[3]{x} = 0$$

**Solución**

La raíz de esta ecuación es  $x = 0$ . Veamos que este valor no puede ser aproximado por ninguna sucesión  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  de aproximaciones, donde  $x_0$  es cualquier valor no nulo. En efecto:

$$\text{tenemos } f(x) = x^{1/3} \text{ y } f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \text{ y}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n)^{1/3}}{(1/3)(x_n)^{2/3}}$$

$$= x_n - 3x_n = -2x_n$$

Logo, la sucesión de aproximaciones es:  $x_1, -2x_1, 4x_1, -8x_1, \dots$  Para "aproximaciones", para cualquier  $x_1 \neq 0$ , se aleja de 0 a medida que  $n$  crece. Por tanto, la sucesión no converge.



### PROBLEMAS PROPUESTOS 5.7

En los problemas del 1 al 6, mediante un esbozo de la función correspondiente, demostrar que las ecuaciones dadas tienen una única raíz. Mediante el método de Newton-Raphson, hallar una aproximación a esta raíz con tres cifras decimales.

1.  $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$

2.  $2^x - 6x^2 + 9x + 1 = 0$

3.  $\cos x = x$

4.  $\cos(x^2) = x$

5.  $e^{-x} = x$

6.  $x \ln x = 1$

---

## APENDICES

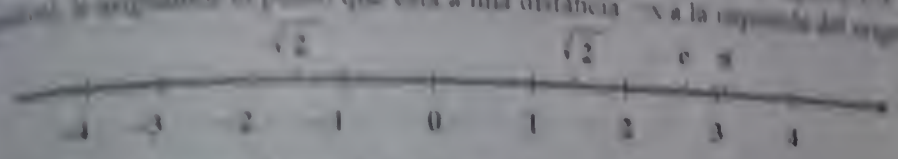
---

- A. NUMEROS REALES, INTERVALOS,  
DESIGUALDADES Y METODO DE STURM
- B. VALOR ABSOLUTO
- C. ECUACIONES POLINOMICAS
- D. PLANO CARTESIANO, GRAFICAS, SIMETRIAS Y  
TRASLACIONES
- E. LA RECTA Y LA ECUACION DE PRIMER GRADO
- F. CIRCUNFERENCIA, PARABOLA E HIPERBOLA
- G. TRIGONOMETRIA

El conjunto  $\mathbb{R}$  de los números reales es el conjunto formado por la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. Es decir:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irracionales}\}$$

Una representación geométrica de los números reales se obtiene identificando a cada número real con un punto de una recta fija, la cual representamos al principio por la derecha, que indicamos marcando una flecha. Partimos de la recta al que le damos el nombre de origen, y le asignamos su medida una unidad de longitud y marcamos esta longitud en el punto que está a la derecha del origen a una distancia igual a la unidad. A este punto le damos el nombre 1. El punto que está a la izquierda del origen a una distancia igual a la unidad, le asignamos el nombre -1. Si  $x$  es un real positivo, le asignamos el nombre que está a una distancia  $x$  a la derecha del origen. Si  $x$  es negativo, le asignamos el nombre que está a una distancia  $-x$  a la izquierda del origen.



Así, obtenemos una afirmación fundamental:

La correspondencia establecida es biunívoca: A cada número real le corresponde un único punto y a cada punto le corresponde un único número real.

A la recta provista de esta correspondencia, la llamaremos recta real o recta numerada. Se llama coordenada de un punto al número real que le sigue esta correspondencia. Por razones de comodidad, muchas veces identificamos a cada punto de la recta numérica con su coordenada. Así, por ejemplo, diremos "el punto 2" para indicar al punto que le corresponde el número 2.

En el conjunto  $\mathbb{R}$  tenemos dos operaciones fundamentales: La adición y la multiplicación. Las otras dos operaciones básicas, la sustracción y la división, se definen en términos de las dos primeras. El sistema de los números reales se describe a partir de 15 axiomas. Estos axiomas nos describen el comportamiento de la suma, multiplicación de la relación "menor" (relación de orden) y de una propiedad de completitud de  $\mathbb{R}$ . A esta última propiedad sólo la mencionaremos.

### PROPIEDADES DE LA ADICION Y MULTIPLICACION

- 1. Leyes conmutativas:  $a + b = b + a$  y  $ab = ba$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$
- 2. Leyes asociativas:  $a + (b + c) = (a + b) + c$  y  $a(bc) = (ab)c$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
- 3. Ley distributiva:  $a(b + c) = ab + ac$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
- 4. Elementos neutros:  $\exists 0 \in \mathbb{R}$  y  $\exists 1 \in \mathbb{R}$ , siendo  $0 \neq 1$  y son tales que:  
 $a + 0 = a$  y  $1 \cdot a = a$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$



5. Inverso aditivo:  $\forall a \in \mathbb{R} \exists -a \in \mathbb{R}$  tal que  $a + (-a) = 0$
6. Inverso multiplicativo:  $\forall a \in \mathbb{R}$  tal que  $a \neq 0$ ,  $\exists a^{-1} \in \mathbb{R}$  tal que  $a \cdot a^{-1} = 1$

Haciendo uso de las propiedades anteriores, podemos demostrar la siguiente proposición, que por ser importante, la presentamos como nuestro primer teorema. Su demostración la omitimos.

**TEOREMA A.1**  $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ó } b = 0$

La sustracción y la división se definen haciendo uso del inverso aditivo e inverso multiplicativo, respectivamente, del modo siguiente:

1.  $a - b = a + (-b)$       2. Si  $b \neq 0$ , entonces  $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$

### ORDEN EN $\mathbb{R}$

Admitimos la existencia de un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$ , que es el conjunto de los números positivos, al que denotaremos con  $\mathbb{R}^+$ . En la recta numérica, los números positivos son los que están a la derecha del origen. Este conjunto nos permite definir la relación  $<$ , que se lee "menor que", del modo siguiente:

**DEFINICIÓN.**  $a < b \Leftrightarrow (b - a)$  es positivo

Como consecuencia inmediata de esta definición obtenemos que:

$$a \text{ es positivo} \Leftrightarrow 0 < a$$

De acuerdo a la recta numérica,  $a < b$  significa que el punto que corresponde a  $a$  está a la izquierda del punto que corresponde a  $b$ .

**EJEMPLO 1.** a.  $2 < 6$ , ya que  $6 - 2 = 4$  y 4 es positivo

b.  $-4 < -1$ , ya que  $-1 - (-4) = 4 - 1 = 3$  y 3 es positivo

**DEFINICIÓN.**  $a$  es negativo  $\Leftrightarrow a < 0$

Las relaciones  $>$  ("mayor que"),  $\leq$  ("menor o igual que") y  $\geq$  ("menor o igual que") se definen en términos de la relación  $<$ , del siguiente modo:

- DEFINICIÓN.**
1.  $a > b \Leftrightarrow b < a$
  2.  $a \leq b \Leftrightarrow a < b \text{ ó } a = b$
  3.  $a \geq b \Leftrightarrow a > b \text{ ó } a = b$

PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS DESIGUALDADES

- P. Ley de la transitividad:  
Cada vez que tenemos  $a < b$  y  $b < c$  se sigue que  $a < c$  (ley de la transitividad)
- O<sub>1</sub> Ley de la transitividad:  $a < b \Rightarrow b < c \Rightarrow a < c$
- O<sub>2</sub> Ley aditiva:  $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- O<sub>3</sub> Ley multiplicativa:  $a < b \Rightarrow ac < bc \quad \forall c > 0$   
 $a < b \Rightarrow ac > bc \quad \forall c < 0$
- O<sub>4</sub>  $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad \forall a, b \neq 0$

Observaciones

- 1. Las propiedades O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub>, O<sub>3</sub> y O<sub>4</sub> se cumplen también cuando las desigualdades  $<$  y  $>$  son intercambiadas por los símbolos  $\leq$  y  $\geq$  respectivamente.
- 2. La propiedad O<sub>3</sub> es válida para los dos casos de la desigualdad al multiplicarse por un número positivo. El sentido de la desigualdad permanece igual. Si se multiplica por un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte.

INTERVALOS

Los subconjuntos acotados de los números reales constituyen los intervalos. Los que se definen en términos de las relaciones de desigualdad lineales.

- 1. Dados dos números reales  $a$  y  $b$ , se llama:
- Intervalo cerrado de extremos  $a$  y  $b$  al conjunto:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$



- Intervalo abierto de extremos  $a$  y  $b$  al conjunto:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$



Para los intervalos  $[a, b]$  el intervalo cerrado pertenece al intervalo mismo. Si se reemplaza el signo  $\leq$  por  $<$  se obtiene el intervalo abierto  $(a, b)$ .

$$1. [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$2. (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Intervalos infinitos

$$3. [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

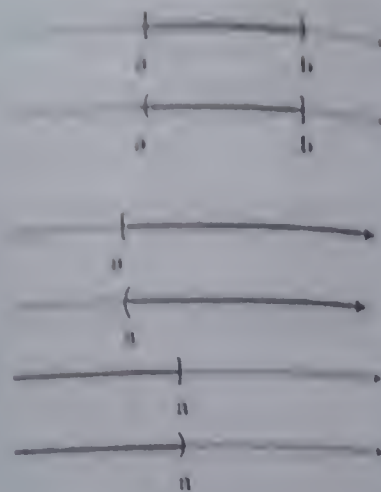
$$4. (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

$$5. (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$6. (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$7. (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Los símbolos  $+$  y  $-\infty$  son simples notaciones que usamos por comodidad. No representan ningún número real.



## RESOLUCION DE INECUACIONES

Una desigualdad donde aparecen una o más variables es una **inecuación**. Las incógnitas que nos interesan son la que tiene una sola variable. Se llama **solución** o **conjunto solución** de una ecuación de una variable al conjunto formado por todos los números reales que colocados en lugar de la variable producen proposiciones verdaderas.

Las incógnitas más simples son las **inecuaciones lineales**, que son las ecuaciones en las que solo aparecen polinomios de primer grado. Las incógnitas se resuelven fácilmente haciendo uso de las propiedades básicas de las desigualdades. Para resolver incógnitas expresadas en términos de polinomios de mayor grado o en términos de cocientes de polinomios (funciones racionales) utilizamos el método de Sturm.

### INECUACIONES LINEALES

Una **inecuación** es **lineal** si la máxima potencia de la variable es 1. Las incógnitas lineales son fáciles de resolver. Para esto, se despeja la variable haciendo uso de las propiedades básicas de las desigualdades.

**EJEMPLO 1.**  Resolver la inecuación:  $5x - 15 < 2x$

**Solución:**

$$\begin{aligned} 5x - 2x &< 15 \quad \text{de } 5x - 2x < 15 \quad (\text{re } 0x, \text{ sumando } 15 \text{ a ambos lados}) \\ 3x &< 15 \quad (\text{por } 0x, \text{ sumando } -2x \text{ a ambos lados}) \end{aligned}$$



# METODO DE WIERM

Yendo en primer término, como primera vez, se debe en el caso de un polinomio de grado n, se debe en primer lugar, transponerlo a la forma  $p(x) = 0$  y se debe en primer lugar, transponerlo a la forma  $p(x) = 0$  y se debe en primer lugar, transponerlo a la forma  $p(x) = 0$ .

1.  $p(x) = 0$
2.  $p(x) = 0$
3.  $p(x) \geq 0$
4.  $p(x) \leq 0$

El signo de un polinomio es constante en un intervalo, formado por dos raíces consecutivas.

Por tanto, en esencia, se basa en el siguiente resultado:

El signo de un polinomio es constante en un intervalo, formado por dos raíces consecutivas.

Para esto, dividimos a la recta real en los intervalos, tomando intervalos de prueba, determinados por las raíces del polinomio. En estos intervalos de prueba, el signo no cambia de signo. Para determinar el signo, se toma un valor cualquiera de dicho intervalo, se elige un valor de prueba. A este valor escogido lo llamaremos valor de prueba. Los intervalos de prueba se encuentran factorizando el polinomio. Es decir:

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n), \text{ donde } r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_n$$

Los intervalos de prueba son:

$$(-\infty, r_1), (r_1, r_2), (r_2, r_3), \dots, (r_{n-1}, r_n), (r_n, \infty)$$

En la recta numérica marcamos los signos para cada intervalo. Por tanto, se debe encontrar la solución. Si la desigualdad viene expresada en términos de  $<$  o  $>$ , todos los intervalos que conforman la solución son abiertos. Si la desigualdad se expresa en términos de  $\leq$  o  $\geq$ , los intervalos que conforman la solución son cerrados.

**Ejem 3.1** Resolver la desigualdad  $x^2 - 2 < 3x + 8$

Solución:

Primero transponemos y factorizamos:

$$x^2 - 2 < 3x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 < 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 5) < 0$$

Los ceros de  $p(x) = (x + 2)(x - 5)$  son  $-2$  y  $5$ , los intervalos de prueba son:

$$(x-2) \cdot (x-5) = x^2 - 7x + 10$$

Entonces el signo de  $p(x) = (x-2)(x-5)$  cambia cuando se pasa por los puntos  $x=2$  y  $x=5$ . Como valor de prueba y observamos:  
 En  $(-\infty, 2)$  tomamos  $x = 0$  como valor de prueba y obtenemos:  
 $p(0) = (0-2)(0-5) = 10 > 0$  el signo de  $p(x)$  en  $(-\infty, 2)$  es  $+$   
 En  $(2, 5)$  tomamos  $x = 3$  como valor de prueba y obtenemos:  
 $p(3) = (3-2)(3-5) = -2 < 0$  el signo de  $p(x)$  en  $(2, 5)$  es  $-$   
 En  $(5, \infty)$  tomamos  $x = 6$  como valor de prueba y obtenemos:  
 $p(6) = (6-2)(6-5) = 4 > 0$  el signo de  $p(x)$  en  $(5, \infty)$  es  $+$   
 Los signos y los signos en los intervalos de prueba los colocamos en la siguiente forma:



Fig. 3. La forma que debe ser el intervalo de  $(-2, 5)$

### DE IGUALDADE RACIONAL

Se tiene función racional a un cociente de polinomios. Para resolver la ecuación racional se comienza de factoring en ambos numerador y denominador y se simplifica la ecuación. Los puntos 2 y 5 son los puntos de discontinuidad. Se coloca el signo de la desigualdad que debe ser trabajo con los polinomios, que son el numerador y el denominador.

Paso 1. Se transforman las ecuaciones de la forma  $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$  en la forma  $p(x) = 0$  y  $q(x) = 0$  donde los polinomios  $p(x)$  y  $q(x)$  están factorizados.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \quad \frac{p(x)}{q(x)} > 0 \quad \frac{p(x)}{q(x)} < 0 \quad \frac{p(x)}{q(x)} \geq 0 \quad \frac{p(x)}{q(x)} \leq 0$$

Paso 2. Se hallan los raíces de  $p(x) = 0$  y de  $q(x) = 0$ . Se marcan en la recta numérica.

Los puntos hallados son como el signo de  $\frac{p(x)}{q(x)}$  correspondiente a los

intervalos que los puntos dividida la recta. Para hallar el signo en cada uno de los intervalos de prueba.

Paso 3. Después de haber hallado los signos en la recta numérica se halla la solución de la desigualdad. Se comienza hallando los intervalos  $-\infty$  y  $+\infty$  y se coloca el signo de la desigualdad en cada uno de los intervalos. Se coloca el signo de la desigualdad en cada uno de los intervalos de  $-\infty$  y  $+\infty$ . Los puntos de prueba se colocan en los intervalos de la recta numérica que corresponden a los intervalos de prueba. Se coloca el signo de la desigualdad en cada uno de los intervalos de prueba.

**EJEMPLO 4** Resolver la desigualdad  $\frac{x+2}{x-4} \geq 1$

**Solución**

**Paso 1:** Transponer y denominar:

$$\frac{x+2}{x-4} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2-(x-4)}{x-4} = \frac{x+2-x+4}{x-4} = \frac{6}{x-4} \geq 0$$

**Paso 2:** Hallar los ceros del numerador y del denominador.

$$6 \neq 0 \quad x-4=0 \Leftrightarrow x=4 \Leftrightarrow x \neq 4$$

Los intervalos de prueba son:

$$(-\infty, 4), (4, +\infty)$$

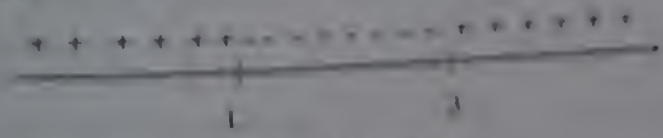
Hallamos el signo de  $\frac{6}{x-4}$  en cada uno de los intervalos anteriores.

Los intervalos con sus valores de prueba:

a. En  $(-\infty, 4)$  tomamos  $x=0$  y obtenemos  $\frac{6}{0-4} = -1.5$ . Signo:  $-$

b. En  $(4, +\infty)$  tomamos  $x=5$  y obtenemos  $\frac{6}{5-4} = 6$ . Signo:  $+$

c. En  $(3, +\infty)$  tomamos  $x=5$  y obtenemos  $\frac{6}{5-4} = 6$ . Signo:  $+$



**Paso 3:** El conjunto solución es  $(-\infty, 4) \cup [4, +\infty)$

Observar en la solución que es el extremo correspondiente a 4, estamos en el intervalo cerrado. Esto debido a que la desigualdad viene marcada por términos de la relación  $\geq$  y a que 4 es uno de los ceros del denominador.

**EJEMPLO 5:** Resolver la desigualdad  $\frac{3x+1}{x-1} \leq \frac{2x+7}{x+2}$

**Solución**

En breves de brevedad, los cuatro pasos importantes para resolver la desigualdad se resumirán implícitamente:

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{x-1} &\leq \frac{2x+7}{x+2} \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-1} - \frac{2x+7}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(3x+1)(x+2) - (2x+7)(x-1)}{(x-1)(x+2)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x^2+7x+2 - (2x^2-2x-7)}{(x-1)(x+2)} \leq 0 \end{aligned}$$



A10

El numerador de la última fracción es un polinomio de segundo grado con raíces complejas (su discriminante es negativo  $b^2 - 4ac < 0$ ). Esto significa que este polinomio no tiene raíces reales y, por tanto, no se puede factorizar en términos de números reales. Las raíces del denominador son  $-2$  y  $1$ . Las raíces  $-2$  y  $1$  determinan los intervalos:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 1), \quad (1, \infty)$$

Hallemos el signo de  $\frac{x^2 + 2x + 9}{(x-1)(x+2)}$  en cada uno de los intervalos dados.

El numerador, por no tener raíces reales, nunca se anula. Luego, este polinomio siempre es positivo o siempre es negativo. Para averiguarlo, tomamos un valor de prueba. Así, para  $x = 0$  obtenemos  $0^2 + 2(0) + 9 = 9$ . Luego  $x^2 + 2x + 9 > 0$  para todo  $x$ . En consecuencia, el signo de la fracción sólo dependerá del denominador.

a. En  $(-\infty, -2)$ , tomamos  $x = -3$  y obtenemos  $\frac{12}{(-4)(-1)} = +3$ . Signo:  $+$

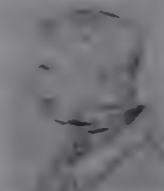
b. En  $(-2, 1)$ , tomamos  $x = 0$  y obtenemos  $\frac{9}{(-1)(2)} = -\frac{9}{2}$ . Signo:  $-$

c. En  $(1, \infty)$ , tomamos  $x = 2$  y obtenemos  $\frac{17}{(1)(4)} = +\frac{17}{4}$ . Signo:  $+$

El conjunto solución es  $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$



Jacques Charles François Sturm (1803-1855), matemático Suizo-francés quien hizo importantes contribuciones a la Teoría de Ecuaciones.



## PROBLEMAS RESUELTOS A

### PROBLEMA 1.

La temperatura Fahrenheit y la temperatura Celsius están relacionadas por la igualdad  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ . Si en cierto día la temperatura Celsius de una ciudad cambia según el punto 25  $^{\circ}\text{C}$  en un día, ¿en qué intervalo cambia la temperatura en grados Fahrenheit?

Al dividir con raíces significa que este sea en términos de

datos

o, este polinomio a mano, un valor de  $2x + 9 > 0$ , para el denominador

Signo: +

Signo: -

Signo: +

+++

$$25 \leq C \leq 40 \Rightarrow 25 \leq \frac{5}{9} (F - 32) \leq 40 \Rightarrow$$

$$225 \leq 5(F - 32) \leq 360 \Rightarrow 225 \leq 5F - 160 \leq 360 \Rightarrow$$

$$225 + 160 \leq 5F \leq 360 + 160 \Rightarrow 385 \leq 5F \leq 520 \Rightarrow \frac{385}{5} \leq F \leq \frac{520}{5} \Rightarrow$$

$$77 \leq F \leq 104$$

### PROBLEMA 2.

Resolver  $\frac{4}{x} < x \leq \frac{20}{x-1}$

Solución

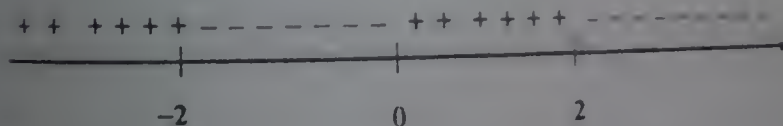
En esta expresión tenemos dos desigualdades, las que resolvemos separadamente

$$\frac{4}{x} < x \quad \text{y} \quad x \leq \frac{20}{x-1}$$

Solución de  $\frac{4}{x} < x$

$$\frac{4}{x} < x \Leftrightarrow \frac{4}{x} - x < 0 \Leftrightarrow \frac{4 - x^2}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(2-x)(2+x)}{x} < 0$$

Las raíces son: -2, 0 y 2. Mediante valores de prueba hallamos que



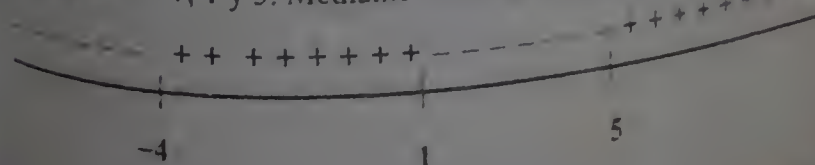
Entonces la solución de esta desigualdad es  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Solución de  $x \leq \frac{20}{x-1}$

$$x \leq \frac{20}{x-1} \Leftrightarrow x - \frac{20}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)-20}{x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 20}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x+4)}{x-1} \leq 0$$

Las raíces son: -4, 1 y 5. Mediante valores de prueba hallamos que

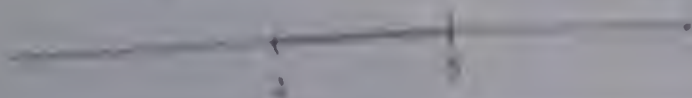


temperatura Celsius están  
(-32) Si en cierto día,  
ambos según el intervalo,  
la temperatura es 40

Así, la solución de esta desigualdad es  $(-\infty, -1) \cup (1, 8]$ .

La solución total, la solución total es la intersección de las soluciones parciales:

$$\left[ (-2, 0) \cup (2, \infty) \right] \cap \left[ (-\infty, -1) \cup (1, 8] \right] = (2, 8]$$



### PROBLEMAS PROPUESTOS A

En los problemas del 1 al 21 resolver la desigualdad dada. Ilustre la gráfica del conjunto solución.

1.  $4x - 5 < 2x + 3$

2.  $2(x - 5) - 3 \geq 3(x + 4) + 1$

3.  $\frac{2x-5}{3} + 3 \geq 1$

4.  $\frac{5x-1}{4} - \frac{x+1}{3} \geq \frac{3x-13}{10}$

5.  $5 \leq \frac{2x-5}{3} - 3 \geq 1 + x$

6.  $5 < \frac{x-1}{-2} < 10$

7.  $(x-3)(x+2) \neq 0$

8.  $x^2 - 1 < 0$

9.  $x^2 + 2x - 20 \geq 0$

10.  $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

11.  $9x - 2 < 9x^2$

12.  $(x-2)(x-5) < -2$

13.  $(x+2)(x-1)(x-3) \geq 0$

14.  $\frac{x+2}{x+2} \leq 0$

15.  $\frac{2}{x} \leq -\frac{3}{5}$

16.  $\frac{2}{x-1} \leq -3$

17.  $\frac{x}{2} + \frac{1}{x} \leq \frac{3}{x}$

18.  $\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{3} \geq 1$

19.  $\frac{x-1}{x+3} < \frac{x+2}{x}$

20.  $\frac{x+1}{1-x} < \frac{x}{2+x}$

21.  $\frac{4-2x}{x^2+2} \geq 2 - \frac{x}{x-3}$

22. En cierto día la temperatura Celsius de una ciudad varió según el intervalo  $5 \leq C \leq 20$ . En que intervalo cambió la temperatura ese día en grados Fahrenheit?

23. En cierto día la temperatura Fahrenheit de una ciudad varió según el intervalo  $59 \leq F \leq 95$ . En que intervalo cambió la temperatura ese día en grados Celsius?



En los problemas del 24 al 30, probar la proposición dada.

$$24. a < b \text{ y } c < d \Rightarrow a + c < b + d \quad 25. a < b \text{ y } c > d \Rightarrow a - c < b - d$$

$$26. a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$$

$$27. a > 1 \Rightarrow a^2 > a$$

$$28. 0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a$$

$$29. 0 < a < b \text{ y } 0 < c < d \Rightarrow ac < bd$$

30.  $a \neq 0 \Rightarrow a$  y  $a^{-1}$  tienen el mismo signo (ambos son positivos o ambos negativos).

31. Se llama media aritmética de dos números  $a$  y  $b$  al número  $\frac{a+b}{2}$ . Probar que la media aritmética de dos números está entre los números; esto es, probar:

$$a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$$

32. Se llama media geométrica de dos números positivos  $a$  y  $b$  al número  $\sqrt{ab}$ . Probar que la media geométrica de dos números está entre los números. Esto es, probar:

$$0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < b$$

32. Probar que  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ , donde  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ . Sugerencia:  $0 \leq (a-b)^2$ .

# 

## 

**DEFINICION.** El valor absoluto de un número real  $a$ , denotado por  $|a|$ , se define como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

O sea, el valor absoluto de un número real es igual al mismo número si éste es positivo o es igual a su inverso aditivo si es negativo.

Algunos ejemplos: el valor absoluto de un número positivo es el mismo número; el valor absoluto de un número negativo es el mismo número con signo opuesto. Por ejemplo, el valor absoluto de  $-5$  es  $5$ .

Considerando que  $\sqrt{a^2}$  es la raíz cuadrada positiva de  $a^2$ , se tiene que:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

De la definición anterior se deducen las siguientes propiedades:

1.  $|a| \geq 0$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$

2.  $-|a| \leq a \leq |a|$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$

3.  $|a| = a$  si y sólo si  $a \geq 0$  ó  $a = 0$

**EJEMPLO 1.**  $|x| = 5$  si y sólo si  $x = 5$  ó  $x = -5$

b.  $|x| = 0$  si y sólo si  $x = 0$

c.  $|0| = 0$

**TEOREMA 1.** Para todo número real  $a \geq 0$  se cumple que:

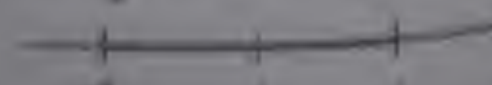
1.  $|x| \leq a$  si y sólo si  $-a \leq x \leq a$



2.  $|x| < a$  si y sólo si  $-a < x < a$



3.  $|x| \geq a$  si y sólo si  $x \leq -a$  ó  $x \geq a$



4.  $|x| > a$  si y sólo si  $x < -a$  ó  $x > a$



**Propiedades**

Sea la proposición proposición 5

**EJEMPLO 3.1** Resolver la ecuación  $|x - 3| = 1$

**Solución**

$$|x - 3| = 1 \Leftrightarrow x - 3 = 1 \vee x - 3 = -1 \quad \text{a} \quad x - 3 = 1 \vee x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2$$

**EJEMPLO 3.2** Resolver la ecuación  $|3x + 5| = 8$ . Dar la solución

**Solución**

De acuerdo a la parte 1 de la proposición anterior tenemos

$$|3x + 5| = 8 \Leftrightarrow 3x + 5 = 8 \vee 3x + 5 = -8 \Leftrightarrow 3x = 3 \vee 3x = -13 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{13}{3}$$

La solución es el intervalo  $(-\frac{13}{3}, 1)$



**EJEMPLO 3.3** Resolver la ecuación  $\left| \frac{x}{2} - 2 \right| = 4$ . Dar la solución

**Solución**

De acuerdo a la parte 2 de la proposición anterior, tenemos

$$\left| \frac{x}{2} - 2 \right| = 4 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - 2 = 4 \vee \frac{x}{2} - 2 = -4 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 6 \vee \frac{x}{2} = -2 \Leftrightarrow x = 12 \vee x = -4$$

$$\Leftrightarrow x = 12 \vee x = -4$$

La solución es  $(-\infty, -4) \cup (12, \infty)$



**OTRAS PROPIEDADES IMPORTANTES DEL VALOR ABSOLUTO**

**TEOREMA 3.2** Sea a y b dos números reales y n un número natural. Entonces:

1.  $|ab| = |a| |b|$
2.  $|a^n| = |a|^n$
3.  $|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$
4.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (Desigualdad triangular)
5.  $|a - b| \leq |a| + |b|$



**Ejercicios**

Resuelve el problema planteado.

**EJERCICIO 5.** Resuelve la ecuación  $|x-2| < |x+1|$ . Encuentra la solución.**Resolución**

Considera a la ecuación subintervalos y comprueba la desigualdad en cada uno de ellos (ver el ejemplo).

**Paso 1.**Obtenemos los puntos donde las expresiones involucradas en la ecuación cambian de signo a sea la suma de  $|x-2| = 0$  y  $|x+1| = 0$ . Estos son  $2$  y  $-1$ . Los puntos dividen a la recta numérica en los intervalos:

$$(-\infty, -1), \quad [-1, 2] \quad \text{y} \quad [2, +\infty)$$

Los intervalos se cierran cerrados a la izquierda debido a la definición del valor absoluto. Así,  $|x-2| = 0$  si  $x \geq 2$ . Ejemplo:  $|x-2| = -(x-2)$ , si  $x < 2$ .**Paso 2.**

Proveamos la desigualdad en cada uno de estos intervalos. El conjunto solución en cada intervalo es la intersección del intervalo con la solución que resulta.

En el intervalo  $(-\infty, -1)$ Si  $x < -1$  entonces  $|x-2| = -(x-2)$  y  $|x+1| = x+1$ . Luego,

$$\begin{aligned} |x-2| < |x+1| &\Leftrightarrow -(x-2) < x+1 \Leftrightarrow -x+2 < x+1 \\ &\Leftrightarrow 2 < 1 \Leftrightarrow x \in \emptyset \text{ (vacío).} \end{aligned}$$

El conjunto solución en el intervalo  $(-\infty, -1)$  es  $(-\infty, -1) \cap \emptyset = \emptyset$ .En el intervalo  $[-1, 2]$ Si  $-1 \leq x < 2$  entonces  $|x-2| = -(x-2)$  y  $|x+1| = x+1$ . Luego,

$$\begin{aligned} |x-2| < |x+1| &\Leftrightarrow -(x-2) < x+1 \Leftrightarrow -x+2 < x+1 \\ &\Leftrightarrow -2x < -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right) \end{aligned}$$

El conjunto solución en el intervalo  $[-1, 2]$  es:

$$[-1, 2] \cap \left(\frac{1}{2}, 2\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

En el intervalo  $[2, +\infty)$ Si  $x \geq 2$  entonces  $|x-2| = x-2$  y  $|x+1| = x+1$ . Luego,

$$|x-2| < |x+1| \Leftrightarrow x-2 < x+1 \Leftrightarrow -2 < 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

1.2.8

$$3. \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$4. \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

5.  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$6. \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$7. \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$8. \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$9. \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$10. \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Special Case 2 (Binomial Theorem)

$$1. \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. \quad \left| \frac{a}{b} \right| + \left| \frac{b}{a} \right| \geq 2$$

$$3. \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$4. \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$5. \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

6.  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$7. \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$8. \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$9. \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$10. \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$11. \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$12. \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$13. \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$14. \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$15. \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$16. \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$17. \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$18. \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$19. \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$20. \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$21. \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$-(a+b)(-b) = a(-b) + (-b)(-b)$$

Aplicando la parte 1 del teorema anterior obtenemos:

$$-(a+b)(-b) = (-b)(a+b)$$

$$a(-b) + (-b)(-b) = (-b)(a) + (-b)(b)$$

**PROBLEMA 1** Hallar un número  $M$  tal que

$$|x-1| < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{|x+2|}{|x-1|} < M$$

**Solución**

$$|x-1| < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} < x-1 < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} < x < -\frac{3}{4}$$

Por lo tanto:

$$\frac{5}{4} < x < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{5}{4} + 1 < x+1 < \frac{3}{4} + 1 \Rightarrow \frac{9}{4} < x+1 < \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{4} < x+2 < \frac{11}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow |x-2| < \frac{17}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} < |x-2| < \frac{17}{4}$$

Se concluye que:

$$|x-1| < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{|x+2|}{|x-1|} < \frac{17/4}{1/2} = \frac{17}{2} = M$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS B

En los problemas del 1 al 3, resolver la ecuación dada.

1.  $|x-5| = 3$

2.  $|2x+1| = x+1$

3.  $|x-1| = x+9$

En los problemas del 4 al 12, resolver la ecuación dada. Poner la solución en forma numérica.

4.  $|x+4| = 3$

5.  $|3x+1| = 15$

6.  $\left|\frac{2x}{x}-1\right| = 7$

7.  $|x-2| = 4$

8.  $|5x+2| = 1$

9.  $|-4x-1| = 5$

10.  $\left|\frac{10}{x}\right| = 3$

11.  $|x^2+3| = 4$

12.  $|x+3| = 2$



13.  $0 < |x - 3| < 1$

14.  $|x - 1| < |x|$

15.  $\left| \frac{3-2x}{1+x} \right| \geq 1$

16.  $\left| \frac{1}{1-2x} \right| \geq \frac{1}{3}$

17.  $|x - 1| + |x - 2| > 1$

18.  $|x - 1| + |x + 1| \leq 4$

19.  $\frac{1}{|2+x|} < \frac{1}{|x|}$

20.  $|3x - 5| \leq |2x - 7| + |2x + 1|$

En los problemas del 21 al 23, Hallar Un número  $M$  que satisfaga la proposición dada.

21.  $|x + 2| < 1 \Rightarrow |x^3 - x^2 + 2x + 1| < M$

22.  $|x - 3| < 1/2 \Rightarrow \frac{|x+2|}{|x-2|} < M$

23.  $|x - 3/4| < 1/8 \Rightarrow \frac{|10x+4|}{1+x^2} < M$

24. Pruebe: a.  $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Sugerencia: Aplique la desigualdad triangular en  $-a + (a - b) + b$

b.  $|a - b| \geq |b| - |a|$

c.  $||a| - |b|| \leq |a - b|$

# 

## 

Una función polinómica o función polinomial de grado  $n$  es una expresión de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

donde  $n$  es un número natural,  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$  y  $a_0$  son reales,  $a_n \neq 0$ .

Los números  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$  se llaman los coeficientes del polinomio.  $a_n$  es el coeficiente principal y  $a_0$  es el coeficiente constante.

Un cero del polinomio  $p(x)$  es un número  $c$  tal que  $p(c) = 0$ . En este caso, decimos que  $c$  es una raíz o una solución de la ecuación polinómica:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (2)$$

En la ecuación anterior, si  $n = 2$ , tenemos la ecuación cuadrática, la cual se acostumbra escribirla así:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cuyas soluciones se encuentran mediante la llamada fórmula cuadrática, la cual es conocida desde los tiempos babilónicos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3)$$

La expresión subradical  $\Delta = b^2 - 4ac$  se llama discriminante de la ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$ . Se tiene que:

Si  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ , la ecuación tiene 2 raíces reales distintas.

Si  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ , la ecuación tiene 2 raíces reales iguales.

Si  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , la ecuación tiene 2 raíces complejas conjugadas.

Se conocen fórmulas análogas a la fórmula cuadrática para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado (ver Breve Historia de las ecuaciones de tercer y cuarto grado). Sin embargo estas fórmulas no son fáciles de manejar, por lo cual se les ha renunciado. Los brillantes matemáticos Niels Abel (1802-1829) y Évariste Galois (francés, 1811-1832) probaron que no existe fórmula sencilla para resolver las ecuaciones de grado 5 o más.

Una información en este apéndice es mostrar un camino práctico para hallar las raíces de algunas ecuaciones de grados mayores o iguales a 5.

demostramos que el hecho de sumar, restar, multiplicar, dividir polinomios, la regla de Ruffini. Así mismo, es la división de polinomios, dando por conocida el resultado, muestra el algoritmo de la división que damos:

**ALGORITMO DE LA DIVISION** Si  $p(x)$  y  $d(x)$  son dos polinomios, y si  $d(x)$  no es polinomio cero, entonces existen dos únicos polinomios  $q(x)$  y  $r(x)$  tales que

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

donde  $r(x)$  es cero o un polinomio de grado menor que el de  $d(x)$

$p(x)$  es el dividendo,  $d(x)$  es el divisor,  $q(x)$  es el cociente y  $r(x)$  es el residuo

Nuestro caso de interés se concierne en el caso especial en el que  $d(x) = x - c$ . En esta situación el residuo  $r(x)$  por ser de grado menor que el grado de  $x - c$ , debe ser una constante. A la división entonces simplemente con  $r$ . El valor de esta constante no el residuo mismo.

**TEOREMA C.1** Teorema del Residuo.

Si el polinomio  $p(x)$  es dividido por  $x - c$ , entonces el valor del residuo es  $p(c)$ . Esto es,

$$p(x) = (x - c)q(x) + p(c)$$

*Demostración*

De acuerdo al algoritmo de la división, tenemos,

$$p(x) = (x - c)q(x) + r$$

Evalúando la igualdad en  $x = c$

$$p(c) = (c - c)q(c) + r = (0)q(c) + r \Rightarrow r = p(c)$$

**EJEMPLO 1** Hallar el residuo de dividir el polinomio  $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 7$  entre  $x - 2$

*Solución*

De acuerdo al teorema anterior

$$r = p(2) = 2^3 - 4(2)^2 + 3(2) - 7 = 8 - 16 + 6 - 7 = -5$$

**TEOREMA C.2** Teorema del Factor.

$x - c$  es un factor del polinomio  $p(x)$   $\Leftrightarrow p(c) = 0$

*Demostración*

( $\Rightarrow$ ) Si  $x - c$  es un factor de  $p(x)$ , entonces  $p(x) = (x - c)q(x)$ . Evaluando en

$$p(c) = (c - c)q(c) = (0)q(c) = 0$$



( $\Leftarrow$ ) Sabemos, por el teorema anterior,

$$p(x) = (x - c)q(x) + p(c) = (x - c)q(x) + 0 = (x - c)q(x)$$

Luego,  $x - c$  es un factor de  $p(x)$

### OBSERVACION.

Según el teorema anterior, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1.  $x - c$  es un factor de  $p(x)$
2.  $p(x) = 0$
3.  $c$  es un cero de  $p(x)$
4.  $c$  es una raíz de  $p(x)$
5.  $c$  es una solución de la ecuación  $p(x) = 0$

### EJEMPLO 2.

**Factorizar un polinomio mediante el teorema del factor**

Sea el polinomio  $p(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ .

- a. Probar que  $-3$  es un cero del polinomio  $p(x)$ .
- b. Usar la parte a. para factorizar el polinomio  $p(x)$

**Solución**

a. Tenemos que:

$$p(-3) = (-3)^3 - 4(-3)^2 - 11(-3) + 30 = -27 - 36 + 33 + 30 = 0$$

Luego, por el teorema del factor,  $-3$  es un cero de  $p(x)$ .

b. Dividimos el polinomio  $p(x)$  entre  $x - (-3) = x + 3$ . Para esto, procedemos por el método abreviado o regla de Ruffini:

1	-4	-11	30
-3	-3	21	30
1	-7	10	0

Luego,

$$x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x - (-3))(x^2 - 7x + 10) = (x + 3)(x^2 - 7x + 10)$$

El polinomio  $x^2 - 7x + 10$ , por ser cuadrático, sabemos la forma de factorizarlo. Podemos usar la fórmula cuadrática, o por el método del tanteo, buscando dos números que sumados den  $-7$  y multiplicados den  $10$ . Estos son  $-2$  y  $-5$ . Luego,

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$$

$$x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x + 3)(x - 2)(x - 5)$$

# TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

Toda ecuación polinomial tiene al menos una raíz. La respuesta es afirmativa y se la denomina Teorema Fundamental del Algebra, que fue demostrado por C. F. Gauss en 1799. Su demostración es la simple y requiere de resultados no tratados por lo que la omitimos.

## TEOREMA C.3 Teorema Fundamental del Algebra.

Toda polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

con coeficientes complejos, tiene al menos una raíz compleja.

Si  $p(x)$  es un polinomio de grado  $n > 0$ , el Teorema Fundamental del Algebra nos dice que existe un  $c_1$  que es una raíz de  $p(x)$ . Luego, por el lema del factor

$$p(x) = (x - c_1)q_1(x)$$

donde el grado de  $q_1(x)$  es  $n - 1$ . Volviendo a aplicar el Teorema Fundamental se aplica a  $q_1(x)$  obteniendo por tanto  $c_2$  que es una raíz de  $q_1(x)$ . Luego,

$$p(x) = (x - c_1)(x - c_2)q_2(x)$$

donde el grado de  $q_2(x)$  es  $n - 2$ . Siguiendo el proceso, después de  $n$  pasos tendremos como  $q_n(x) = c_n$  y un polinomio  $q_n(x)$  de grado 0 tal que:

$$p(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)q_n(x) \quad (4)$$

El polinomio  $q_n(x)$ , por ser de grado 0, es una constante.

Este resultado se resume en la siguiente proposición:

## TEOREMA C.4 Teorema de factorización completa.

Si  $p(x)$  es un polinomio de grado  $n$  con coeficientes complejos, entonces existe  $n$  números complejos,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  que son raíces de  $p(x)$  y se cumple que:

$$p(x) = a_n (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n) \quad (5)$$

**Demostración**

Se debe probar que, en (4),  $q_n(x) = a_n$ .

Si efectuamos la multiplicación indicada a la derecha de (4) conseguiremos un término de grado  $n$ , que  $a_n x^n$ . Similarmente, si efectuamos la multiplicación indicada a la derecha de (5) conseguiremos un solo término de grado  $n$ , que  $a_n x^n$ . Comparando,  $q_n(x) = a_n$ .

Las raíces  $c_1, c_2, \dots, c_n$  no necesariamente son distintas. Si una raíz  $c_i$  aparece  $k$  veces, se dice que es una raíz  $k$ -ésima multiplicidad  $k$ .

# LOS CERO RACIONALES DE UN POLINOMIO

Como hemos visto en el capítulo de Cálculo de Ceros, en la búsqueda de los ceros de un polinomio, sólo nos quedará la parte más importante de la ecuación.

El siguiente teorema nos proporciona un criterio para hallar los ceros racionales de un polinomio, o sea los valores de las raíces polinómicas.

## TEOREMA 3.1 Los ceros racionales de un polinomio

Si los coeficientes del polinomio son enteros

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

y si el racional  $\frac{p}{q}$ , reducido a su mínima expresión, es ceros del polinomio, entonces:

1.  $p$  es un divisor del coeficiente constante  $a_0$  y
2.  $q$  es un divisor del coeficiente principal  $a_n$ .

**Demostración:**

Ver el problema resuelto 2.

**COMENTARIO:** Si el coeficiente principal del polinomio es  $a_n = 1$ , entonces:

$$P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

entonces toda raíz racional de  $P(x)$  es un entero que divide a  $a_0$ .

**Demostración:**

Si  $\frac{p}{q}$  es una raíz de  $P(x)$ , entonces, por el teorema,  $q$  divide a  $a_n = 1$  y se sigue que  $q = \pm 1$ . Luego,  $\frac{p}{q} = \pm p$  y  $\frac{p}{q} = \pm p$ . En consecuencia, si el coeficiente principal  $a_n$  es 1, entonces la raíz  $\frac{p}{q}$  es un entero que divide a  $a_0$ .

## ESTRATEGIA PARA HALLAR LOS CEROS RACIONALES

**Paso 1:** Hallar un listado de todos los divisores que son candidatos a ceros, de acuerdo al teorema de los ceros racionales de un polinomio. De este listado se eliminan aquellos que no realmente ceros, verificando que  $P(\frac{p}{q}) = 0$ , donde  $\frac{p}{q}$  es el candidato.

**Paso 2:** Hallar los ceros, siguiendo el procedimiento que el paso anterior. Desde luego se recomienda la copia de Ruffini el polinomio  $P(x)$  dada en la ecuación con  $x - \frac{p}{q}$  y hallar el polinomio cociente  $Q(x)$ .

$$P(x) = (x - \frac{p}{q}) Q(x)$$



Para 3. A partir de la parte 1.5.2 con el polinomio  $q(x)$  y comparando con la parte 1.5.1, obteniendo el primer factor cuadrático en  $x$ , obteniendo así el cociente de  $q(x)$  por  $q_1(x)$ . Tratando con el mismo método, hasta el punto en que se termine.

**EJEMPLO 3.**  Resolver la ecuación y factorizar el polinomio

$$x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = 0$$

**Solución**

Para 1. Los raíces de este ecuación son las raíces de  $p(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = 0$

Como el coeficiente principal es 1, de acuerdo al corolario anterior, se consideran a los divisores de 15, obteniendo las primas que dividen a 15.

$$\{ -1, 3, -3, 5, -5, 15, -15 \}$$

Aplicamos el teorema del factor a estas condiciones.

$$\begin{array}{llll} p(1) = 8 & p(-1) = 16 & p(3) = 0 & p(-3) = -24 \\ p(5) = 40 & p(-5) = -150 & p(15) = 2640 & p(-15) = -3960 \end{array}$$

Luego tenemos como una raíz real, que es el entero 3

Para 2. Dividimos el polinomio  $p(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15$  entre  $x - 3$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -5 & 15 \\ x & & 3 & 0 & -15 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & 0 \end{array}$$

Luego,

$$x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = (x - 3)(x^2 - 5) = 0$$

Para 3. El cociente  $q(x) = x^2 - 5$  es ya un polinomio cuadrático, que se factoriza como una diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

Luego,

$$x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = (x - 3)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

Las raíces son 3,  $\sqrt{5}$  y  $-\sqrt{5}$ , una raíz es entera y las otras son irracionales.

**EJEMPLO 4.**  Resolver la ecuación y factorizar el polinomio

$$2x^4 + x^3 - 9x^2 + 10x - 4 = 0$$

**Solución**

Para 1. Numeradores posibles (factores de  $-4$ ):  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ .

Denominadores posibles (factores de 2) :  $\pm 1, \pm 2$   
 Racionales candidatos a raíces:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{6}{2}$$

Simplificando y eliminando los candidatos iguales:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$$

Si  $p(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 + 16x - 6$ , se tiene:

$$\begin{array}{llll} p(1) = 4 & p(-1) = -30 & p(2) = 30 & p(-2) = -50 \\ p(-3) = 0 & p(1/2) = 0 & p(-1/2) = -65/4 & p(3/2) = 45/4 \\ & & & p(-3/2) = -87/2 \end{array}$$

Vemos que  $p(x)$  tiene sólo dos ceros racionales:  $-3$  y  $1/2$ .

Dividimos el polinomio  $p(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 + 16x - 6$  entre  $x + 3$  y el cociente entre  $x - 1/2$ :

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -9 & 16 & -6 \\ -3 & & -6 & 15 & -18 & 6 \\ \hline & 2 & -5 & 6 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 6 & -2 \\ 1/2 & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 2 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x + 3)(2x^3 - 5x^2 + 6x - 2) \quad 2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = (x - 1/2)(2x^2 - 4x + 4)$$

Entonces:

$$p(x) = (x + 3)(x - 1/2)(2x^2 - 4x + 4)$$

El polinomio  $2x^2 - 4x + 4$  es de segundo grado, cuyos ceros los hallamos con la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16^2 - 4(1)(4)}}{4} = \frac{4 \pm 4\sqrt{-1}}{4} = 1 \pm i$$

Entonces la forma de factorización completa,

$$2x^2 - 4x + 4 = 2(x - (1 + i))(x - (1 - i)) = 2(x - 1 - i)(x - 1 + i)$$

Entonces tenemos que:

$$p(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 + 16x - 6 = 2(x + 3)(x - 1/2)(x - 1 - i)(x - 1 + i)$$

Entonces tenemos dos raíces racionales,  $-3$ ,  $1/2$ , y dos complejas,  $1 + i$ ,  $1 - i$ .

Problema 15. Resolver la ecuación siguiente y factorizar el polinomio

$$4x^3 - 16x^2 + 11x + 10 = 0$$

## Selección

Paso 1. Numeradores posibles (factores de 10):  $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

Denominadores posibles (factores de 4):  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Racionales candidatos a raíces

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{10}{2}, \pm \frac{4}{5}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{5}{4}, \pm \frac{10}{4}$$

Simplificando y eliminando los candidatos iguales:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{5}{4}$$

Si  $p(x) = 4x^3 - 16x^2 + 11x + 10$ , se tiene:

$p(1) = 9$	$p(-1) = -21$	$p(2) = 0$	$p(-2) = -108$
$p(5) = 165$	$p(-5) = -945$	$p(10) = 2520$	$p(-10) = -2,500$
$p(1/2) = 12$	$p(-1/2) = 0$	$p(1/4) = 189/16$	$p(-1/4) = 99/16$
$p(5/2) = 0$	$p(-5/2) = -125$	$p(5/4) = 105/16$	$p(-5/4) = -805/16$

La ecuación tiene 3 raíces racionales:  $-1/2, 2$  y  $5/2$ .

El hecho de que la ecuación dada es de grado 3 y de ella ya conocemos 3 raíces, el teorema de la factorización completa nos ahorra los pasos 2 y 3, ya que, de acuerdo a este teorema:

$$4x^3 - 16x^2 + 11x + 10 = 4(x + 1/2)(x - 2)(x - 5/2) = (2x + 1)(x - 2)(2x - 5)$$

## PROBLEMAS RESULTOS C

**PROBLEMA 1.** Resolver la siguiente ecuación, factorizar el polinomio y señalar la multiplicidad de cada raíz.

$$x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$$

Selección

$$\text{Sea } p(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$$

Cuando el coeficiente principal es 1, los racionales candidatos a raíces son los divisores de la constante 1. Estos son 1 y -1.

$$p(1) = 1 + 1 - 2 - 2 + 1 + 1 = 0$$

$$p(-1) = -1 + 1 + 2 - 2 - 1 + 1 = 0$$

Tanto 1 y -1 son raíces. Dividimos  $p(x)$  entre  $x - 1$  y el cociente  $q_1(x)$  es:



$$x^3 + x^4 - 2x^5 + 2x^6 - \cdots$$

$$(u=1) \rightarrow (u \rightarrow 1) \text{ (N}^{\text{A}} = \text{N}^{\text{B}} = u = 1)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
5	1	2	3	4	5	6	7	8																																																																																												

a) se una rata multiple è combinata dalla sua rata del coupon.

(\*)

L'expression différentielle de la (10) est :  $V_{\text{systeme}}$ 

$$q_{211} = 1 \neq 1 = 1 = 1 = 0$$

$$q^2(-1) = -1 + 1 + 1 = 1 \neq 0$$

Il est évident que, si  $q(x)$  est une fonction continue, on a  $q(x) = 1$  pour  $x = 1$  et  $q(x) = 0$  pour  $x = -1$ . On peut alors se demander si, pour une fonction continue  $q(x)$ , on a  $q(x) = 1$  pour  $x = 1$  et  $q(x) = 0$  pour  $x = -1$ . La réponse est affirmative.

	1	2	3	4
1		0	2	0
2	1		0	0
3	0	0	0	
4	1	0	0	

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)(x + 1)$$

Ungar,

$$\frac{x^5 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1}{(x-1)^2(x+1)^2} = (x-1)(x+1)(x-1)(x+1)(x+1)$$

La matriz de la ecuación sea  $I$ , con multiplicidad 2, y  $-1$ , con multiplicidad 3.

**PROBLEMA 2.** Determina el número de los números de un conjunto

Si ha, quindi, che il numero di polimeri è

is a  $\mathbb{Q}$ -linear functional  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  satisfying the following conditions, we are given (a)

$$a\left(\frac{1}{x}\right)^2 + a\left(\frac{1}{x}\right)^3 = a\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3a^{1/2}$$

multiplicando por  $x^3$

$$ax + a\sqrt{x} + \dots = ax^{3/2} + ax^{3/2} + 3 \quad (17)$$

1. Transponiendo  $ax^{3/2}$  en (1) y factorizando:

$$ax^{3/2} + a\sqrt{x} + \dots = ax^{3/2} + ax^{3/2} + 3$$

Esta igualdad nos dice que  $3$  divide a  $ax^{3/2}$ . Como  $3$  no divide a  $x$ , se sigue que  $3$  divide a  $a^{1/2}$ , por lo tanto,  $3$  divide a  $a$ .

2. Transponiendo  $a\sqrt{x}$  en (1) y factorizando:

$$a\left(\frac{1}{x}\right)^2 + a\left(\frac{1}{x}\right)^3 = a\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3a^{1/2}$$

Esta igualdad nos dice que  $3$  divide a  $a\sqrt{x}$ . Como  $3$  no divide a  $x$ , se sigue que  $3$  divide a  $a$ .

### PROBLEMAS PROPUESTOS C

En los problemas del 1 y 2, usando el teorema del residuo, hallar si o no es posible dividir.

1.  $x^3 - 3x^2 + 11x - 6$  entre  $x + 2$       2.  $3x^3 - 5x^2 - 4x + 1$  entre  $x - 1$

En los problemas del 3 y 4, hallar los valores de los coeficientes  $a$  y  $b$  para que se cumpla la condición.

3.  $x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$       4.  $x^3 + 3x^2 + 2 = 0$   
 5.  $x^3 - 2x^2 + 3 = 0$       6.  $2x^3 - 7x^2 + 11x + 2 = 0$   
 7.  $x^3 - x^2 - 3x + 4 = 0$       8.  $3x^3 + 5x^2 + 3x + 1 = 0$   
 9.  $x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = 0$       10.  $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$

En los problemas del 11 al 13, usar el teorema del resto para probar que:

11.  $x + 1$  es un factor de  $x^3 + x^2 + x + 1$  para todo entero positivo  $n$ .  
 12.  $x^2 + 1$  es un factor de  $x^4 - 1$  para todo entero positivo  $n$ .  
 13.  $x^2 + 1$  es un factor de  $x^4 - 1$  para todo entero positivo  $n$ .

## GRÁFICAS DE ECUACIONES DE DOS VARIABLES

Dada una ecuación en dos variables  $F(x, y) = 0$ , se llama gráfico o gráfica de esta ecuación al conjunto

$$G = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} \quad \text{donde } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Dos ecuaciones son equivalentes si ambas tienen los mismos soluciones. Así, las ecuaciones  $y = x^2$  y  $y = 2x^2$  son equivalentes. Lo claro que las ecuaciones equivalentes tienen el mismo gráfico.

Trazar el gráfico de una ecuación no es simple y requiere de conocimientos que desarrollaremos más adelante, después de estudiar el concepto de derivada. Sin embargo, si la ecuación no es complicada, ésta se puede graficar localizando algunos puntos. En la elección de los puntos a representar se deben tratar de escoger los más adecuados. Entre estos, están los puntos donde la gráfica intersecciona los ejes coordenados. Las abscisas de los puntos donde la gráfica intersecciona al eje X se llaman abscisas en el origen. Estas se encuentran haciendo  $y = 0$  en la ecuación. Similarmente, las ordenadas de los puntos donde la gráfica intersecciona al eje Y se llaman ordenadas en el origen, y se encuentran haciendo  $x = 0$  en la ecuación.

**EJEMPLO 5.** Graficar la ecuación  $y = x^2$

**Solución**

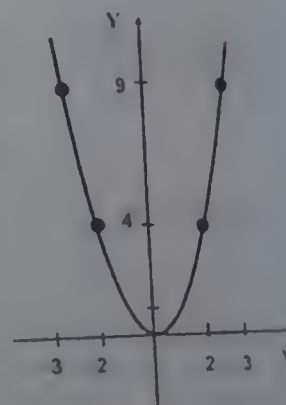
**Intersección con el eje X:**  $y = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Luego, la gráfica intersecciona al eje X en el punto  $(0, 0)$

**Intersección con el eje Y:**  $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 = 0$

Luego, la gráfica intersecciona al eje Y en el punto  $(0, 0)$

x	-3	-2	0	1	2	3
y	9	4	0	1	4	9



Esta curva es una parábola con vértice en el origen cuyo eje coincide con el eje Y.

## SIMETRÍAS

## CRITERIOS DE SIMETRÍA

La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al

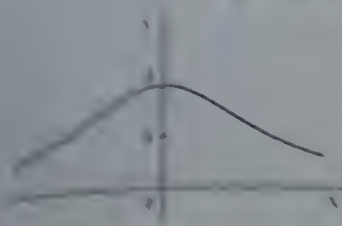
- Eje Y si al sustituir  $x$  por  $-x$  se obtiene una ecuación equivalente.
- Eje X si al sustituir  $y$  por  $-y$  se obtiene una ecuación equivalente.
- Origen si al sustituir  $x$  por  $-x$  e  $y$  por  $-y$  se obtiene una ecuación equivalente.



EJEMPLO 6.

Probar que:

- La bruja de Agnesi es simétrica respecto al eje  $X$ .
- La parábola semicúbica es simétrica respecto al eje  $Y$ .
- La parábola cúbica es simétrica respecto al origen.


 $y^2x = 4(2 - y)$   
Bruja de Agnesi

 $y^2 = x^3$   
Parábola semicúbica

 $y = x^3$   
Parábola cúbica

Solución

a. Reemplazando  $x$  por  $-x$  en la ecuación de la Bruja:

$$(-x)^2y = 4(2 - y) \Rightarrow x^2y = 4(2 - y), \text{ que es la ecuación de la Bruja.}$$

b. Reemplazando  $y$  por  $-y$  en la ecuación de la parábola semicúbica:

$$1 - y^2 = x^3 \Rightarrow y^2 = x^3, \text{ que es la ecuación de la parábola semicúbica.}$$

c. Reemplazando  $x$  por  $-x$  e  $y$  por  $-y$  en la ecuación de la parábola cúbica:

$$-y = (-x)^3 \Rightarrow -y = -x^3 \Rightarrow y = x^3, \text{ que es la ecuación de la parábola cúbica.}$$

## TRASLACION

### CRITERIO DE TRASLACION

La gráfica de la ecuación

$$F(x - h, y - k) = 0$$

se obtiene trasladando la gráfica de la ecuación

$$F(x, y) = 0,$$

mediante la traslación que lleva el origen al punto  $(h, k)$ .

EJEMPLO 7.

Haciendo uso de la gráfica de  $y = x^3$ , dada en el ejemplo 5, y del criterio de traslación, graficar la ecuación

$$y = x^3 - 10x + 23$$

## Solución

De acuerdo al criterio de traslación, debemos hallar el punto  $(h, k)$  que cumpla:

$$y = k = (x - h)^2$$

Completando cuadrados y transponiendo:

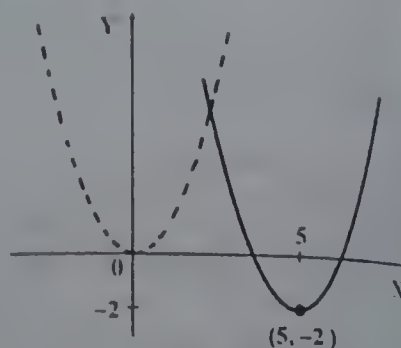
$$y = x^2 - 10x + 23 \Leftrightarrow$$

$$y = (x^2 - 10x + 25) + 23 - 25 \Leftrightarrow$$

$$y = (x - 5)^2 - 2 \Leftrightarrow$$

$$y + 2 = (x - 5)^2 \Leftrightarrow$$

$$y - (-2) = (x - 5)^2$$



Luego, la gráfica de  $y = x^2 - 10x + 23$  se obtiene de la gráfica de  $y = x^2$  mediante la traslación que lleva el origen al punto  $(5, -2)$ .

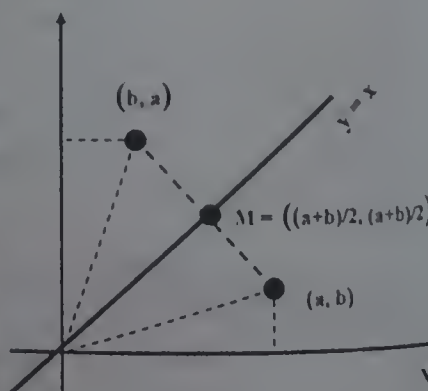
## CRITERIO DE INVERSION

Si a un punto  $(a, b)$  le intercambiamos sus coordenadas obtenemos el punto  $(b, a)$ . ¿Qué propiedad geométrica relaciona estos dos puntos?

Consideremos la recta diagonal  $y = x$ , a la que llamaremos diagonal principal.

Los puntos  $(a, b)$  y  $(b, a)$ , con coordenadas invertidas, se caracterizan por ser simétricos respecto a la diagonal principal.

Este resultado nos permite establecer la siguiente proposición, a la que llamaremos criterio de inversión. Le damos ese nombre debido a que, más adelante, él nos servirá para construir las gráficas de las funciones inversas.



## CRITERIO DE INVERSION

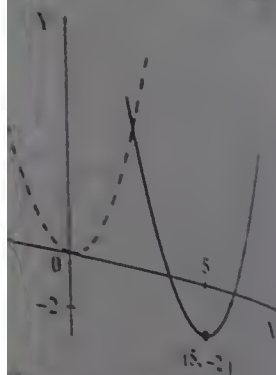
La gráfica de la ecuación

$$F(y, x) = 0$$

se obtiene reflejando en la diagonal principal  $y = x$  la gráfica de

$$F(x, y) = 0.$$

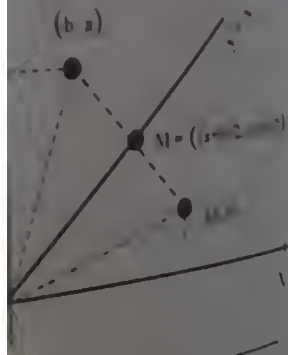
ar el punto  $(h, k)$  que...



tiene de la grafica de  $y = x^2 - 4x + 4$   $(-2)$

SION

adas obtenemos el p...  
os?



RSION

pal  $y = x^2$  y...

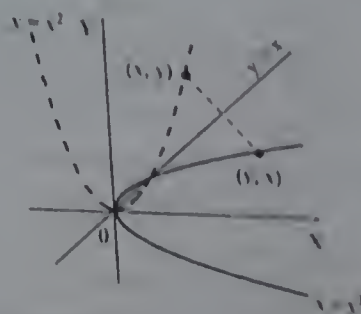
**EJEMPLO 8.**

Haciendo uso de la grafica de  $y = x^2$ , dada en el ejemplo 5, y del criterio de inversion, graficar la ecuacion

$$x = y^2$$

**Solucion**

La ecuacion  $x = y^2$  se obtiene de la ecuacion  $y = x^2$ , intercambiando la variable  $x$  con la variable  $y$ . Luego, por el criterio de inversion, la grafica de  $x = y^2$  se obtiene reflejando la grafica de  $y = x^2$  en la diagonal principal.



**PROBLEMAS PROPUESTOS D**

En los problemas 1, 2 y 3 hallar la distancia entre los siguientes pares de puntos P y Q y encontrar el punto medio del segmento que los une.

1.  $P = (0, 0)$ ,  $Q = (1, 2)$     2.  $P = (1, 3)$ ,  $Q = (3, 5)$     3.  $P = (-1, 1)$ ,  $Q = (1, \sqrt{2})$

4. Probar que los puntos  $A = (-2, 4)$ ,  $B = (-1, 3)$  y  $C = (2, -1)$  son colineales.

5. Si  $A = (-3, -5)$  y  $M = (0, 2)$ , hallar B sabiendo que M es el punto medio del segmento AB.

6. Si  $B = (8, -12)$  y  $M = (7/2, 3)$ , hallar A sabiendo que M es el punto medio del segmento AB.

7. Probar que los puntos  $A = (2, -3)$ ,  $B = (4, 2)$  y  $C = (-1, 4)$  son los vértices de un triángulo isósceles.

8. Probar que el triángulo con vértices  $A = (4, 1)$ ,  $B = (2, 2)$  y  $C = (-1, -4)$  es rectángulo.

9. Probar que los puntos  $A = (1, 2)$ ,  $B = (4, 8)$ ,  $C = (5, 5)$  y  $D = (2, -1)$  son los vértices de un paralelogramo.

10. Probar que los puntos  $A = (0, 2)$ ,  $B = (1, 1)$ ,  $C = (2, 3)$  y  $D = (-1, 0)$  son los vértices de un rombo.

11. Probar que los puntos  $A = (1, 1)$ ,  $B = (11, 3)$ ,  $C = (10, 8)$  y  $D = (0, 6)$  son los vértices de un rectángulo.

12. Probar que los puntos  $A = (-4, 1)$ ,  $B = (1, 3)$ ,  $C = (3, -2)$  y  $D = (-2, -4)$  son los vértices de un cuadrado.



13. Hallar los puntos  $P = (x, 2)$  que distan 5 unidades del punto  $(-4, -1)$ .
14. Hallar los puntos  $P = (1, y)$  que distan 17 unidades del punto  $(-4, 1)$ .
15. Hallar una ecuación que relacione a  $x$  con  $y$  y que describa el hecho de que el punto  $P = (x, y)$  equidista de los puntos  $A = (0, 1)$  y  $B = (-4, -3)$ .
16. Hallar una ecuación que relacione a  $x$  con  $y$  y que describa el hecho de que el punto  $P = (x, y)$  dista 3 unidades del origen.
17. Los puntos medios de los lados de un triángulo son  $M = (2, -1)$ ,  $N = (-1, 4)$  y  $Q = (-2, 2)$ . Hallar los vértices.
18. Dos vértices adyacentes de un paralelogramo son  $A = (2, 3)$  y  $B = (4, -1)$ . Si una diagonal se biseca en el punto  $M = (1, -3)$ , hallar los otros dos vértices.
19. Los vértices de un cuadrilátero son  $A = (-2, 14)$ ,  $B = (3, -4)$ ,  $C = (6, -2)$  y  $D = (6, 6)$ . Hallar el punto donde las diagonales se intersectan.

En los problemas 20, 21 y 22, aplicando los criterios de traslación a la gráfica de la parábola semicúbica (ejemplo 6), graficar las siguientes ecuaciones:

$$20. (y - 1)^2 = (x - 1)^3 \quad 21. (x - 1)^2 = (y - 1)^3 \quad 22. (y + 1)^2 = (x - 1)^3$$

En los problemas del 23, 24 y 25, aplicando los criterios de traslación y de reflexión a la gráfica de la Bruja de Agnesi (ejemplo 6), graficar las siguientes ecuaciones.

$$23. (x - 3)^2(y - 2) = 4(4 - y) \quad 24. (y - 3)^2(x - 2) = 4(4 - x)$$

$$25. (x + 3)^2(y + 2) = 4(-y)$$

#### NOTA HISTÓRICA.

*María Gaetana Agnesi (1.718-1.779). Nació en Milán, Italia. Desde muy joven demostró talento y afición por la Matemática. Escribió en italiano, un texto para la enseñanza del Cálculo Diferencial, *Institución Analitiche al uso della Gioventù Italiana*. En este libro describió la curva que ahora se llama la Bruja de Agnesi, cuyo nombre en su original fue "versiera" derivado de una palabra latina que la usó de volutar. En una reproducción del libro se confundió la palabra "versiera" con "inversigra", que significa "bruja". De esta confusión viene el nombre de bruja de Agnesi.*



# 

## 

### 

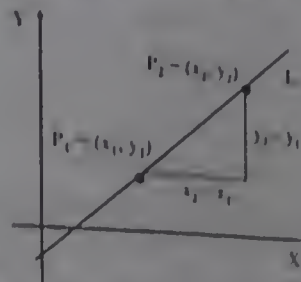
Introducimos el concepto de pendiente de una recta para medir la razón de elevación o inclinación de la recta. Este concepto capta el sentido intuitivo de la palabra pendiente que usamos en frases como "la pendiente de una carretera" o "la pendiente de una colina".

**[DEFINICIÓN.]** La pendiente de una recta no vertical  $L$  que pasa por los puntos

$$P_1 = (x_1, y_1) \text{ y } P_2 = (x_2, y_2)$$

es el cociente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

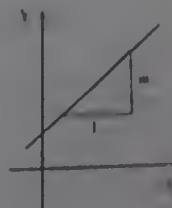


#### 

- La pendiente de una recta es independiente de los puntos que se toman para definirla. Esto es, si  $P'_1 = (x'_1, y'_1)$  y  $P'_2 = (x'_2, y'_2)$  son otros puntos de la recta, se tiene:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$$

- La pendiente  $m$  indica el número de unidades que la recta sube (si  $m > 0$ ) o baja (si  $m < 0$ ) por cada unidad horizontal que se avance a la derecha. Si  $m = 0$ , la recta es horizontal.



#### 

Una ecuación de la recta de pendiente  $m$  y que pasa por el punto

$$P_0 = (x_0, y_0) \text{ es}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

#### 

Sea  $P = (x, y)$  un punto cualquiera de la recta. De la definición de pendiente

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

**EJEMPLO 1.** Hallar una ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(-2, 5)$  y  $(1, -1)$ .

**Solución**

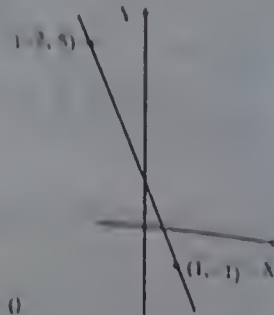
Hallémos, en primer lugar, la pendiente de la recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 5}{1 - (-2)} = -2$$

Ahora hallamos la ecuación punto-pendiente de la recta.

Como el punto  $P_0$  podemos tomar cualquiera de los dos puntos dados,  $(-2, 5)$  o  $(1, -1)$ . Así, si  $P_0 = (1, -1)$ ,

$$y - (-1) = -2(x - 1) \Rightarrow y + 1 = -2x + 2 \Rightarrow y + 2x - 1 = 0$$



Si en la ecuación punto-pendiente tomamos  $P_0 = (0, b)$ , el punto donde la recta corta al eje Y, se tiene que

$$y - b = m(x - 0) \Rightarrow y = mx + b$$

Esta nueva ecuación de la recta se llama ecuación pendiente-intersección.

**TEOREMA E.2** Ecuación pendiente-intersección.

Una ecuación de la recta que tiene pendiente  $m$  y pasa por el punto  $(0, b)$  es

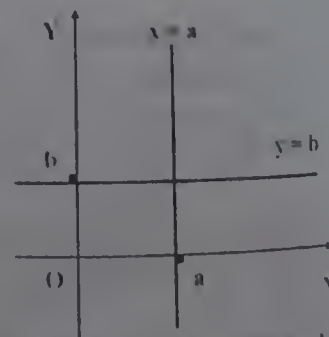
$$y = mx + b$$



## RECTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

Ninguna de las ecuaciones de la recta presentadas describe a las rectas verticales, debido a que éstas no tienen pendiente.

Supongamos que una recta vertical  $L$  corta al eje X en el punto  $(a, 0)$ ; es decir a su abscisa en el origen. Un punto cualquiera  $(x, y)$  está en  $L$  si y solo si su abscisa es  $a$ , es decir, si  $x = a$ . Por tanto, una ecuación para una recta vertical es:  $x = a$ .



Por otro lado, una recta horizontal tiene pendiente  $m = 0$ , ya que cualquier par de puntos de la recta tienen la misma ordenada. Luego, reemplazando  $m = 0$  en la ecuación punto-intersección se obtiene, para la recta horizontal, la ecuación  $y = b$ .

En resumen, tenemos:

1. Una ecuación de la recta vertical con abscisa en el origen  $a$  es:  $x = a$
2. Una ecuación de la recta horizontal con ordenada en el origen  $b$  es:  $y = b$



## LA ECUACIÓN LINEAL

Recordemos que una ecuación lineal en dos variables,  $x$  y  $y$ , es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0, \text{ donde } A \neq 0 \text{ y } B \neq 0.$$

Las distintas ecuaciones que hemos tratado anteriormente para las rectas, ya sean oblicuas, horizontales o verticales, son todas ecuaciones lineales. Probemos ahora que lo mismo también es cierto: es decir, el gráfico de una ecuación lineal es una recta. De hecho, el nombre de "ecuación lineal" está motivado por esta propiedad.

**TEOREMA E.3** El gráfico de la ecuación lineal  $Ax + By + C = 0$ ,  $A \neq 0$  o  $B \neq 0$  es una recta. Además:

1. Si  $A \neq 0$  y  $B \neq 0$ , la recta es oblicua.
2. Si  $A = 0$  y  $B \neq 0$ , la recta es horizontal.
3. Si  $A \neq 0$  y  $B = 0$ , la recta es vertical.

**demostración**

**Caso 1** Si  $A \neq 0$  y  $B \neq 0$ , despejamos  $y$ :  $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ .

Su gráfica es una recta oblicua, ya que su pendiente es  $m = -\frac{A}{B} \neq 0$ .

**Caso 2** Si  $A = 0$ , la ecuación lineal se convierte en  $By + C = 0$ . De donde, despejando y obtenemos  $y = -\frac{C}{B}$ , la cual tiene por gráfica una recta horizontal.

**Caso 3** Si  $B = 0$ , la ecuación se convierte en  $Ax + C = 0$ . De donde,  $x = -\frac{C}{A}$ , la cual tiene por gráfica una recta vertical.

**CONVENCIÓN.** Frecuentemente, con el ánimo de simplificar, en lugar de decir "la recta que es el gráfico de la ecuación  $Ax + By + C = 0$ " diremos simplemente "la recta  $Ax + By + C = 0$ ".

**EJEMPLO 2.** Dada la recta  $L: 2x - 3y + 12 = 0$ , hallar su pendiente, ordenada en el origen y abscisa en el origen. Graficarla.

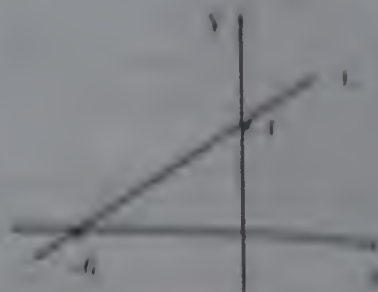
**Solución**

Despejamos  $y$ :  $y = \frac{2}{3}x + 4$ . Luego, la pendiente es  $m = \frac{2}{3}$ .

Si en  $y = \frac{2}{3}x + 4$  hacemos  $x = 0$  obtenemos que  $y = 4$ . Luego la ordenada en el origen es 4.

Si en  $2x - 3y + 12 = 0$  o en  $y = \frac{2}{3}x + 4$  hacemos  $y = 0$  obtenemos que  $x = -6$ . Luego, la abscisa en el origen es -6.

Para graficar una recta basta conocer dos de sus puntos. De esta recta ya conocemos los puntos  $(0, 4)$  y  $(-6, 0)$ , obtenidos a partir de la ordenada y la abscisa en el origen. El gráfico se obtiene trazando la recta que une estos dos puntos.



**EJEMPLO 3.** Sea  $L_1$  la recta que pasa por los puntos  $P_1 = (4, 6)$  y  $P_2 = (5, 8)$ . Hallar el punto donde  $L_1$  intersecta la recta  $L_2: x + y - 7 = 0$ .

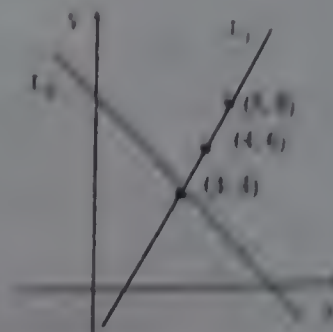
**Solución**

En primer lugar hallamos una ecuación de  $L_1$ . Como  $L_1$  pasa por  $P_1 = (4, 6)$  y  $P_2 = (5, 8)$ , tenemos:

$$y - 6 = \frac{8 - 6}{5 - 4}(x - 4) \Leftrightarrow y - 6 = 2(x - 4)$$

$$\Leftrightarrow 2x - y - 2 = 0$$

Luego,  $L_1: 2x - y - 2 = 0$



El punto donde  $L_1$  y  $L_2$  se intersectan, debe tener por coordenadas la misma común a ambas ecuaciones. Luego, debemos resolver el sistema:

$$L_1: 2x - y - 2 = 0$$

$$L_2: x + y - 7 = 0$$

La solución es  $x = 3$ ,  $y = 4$ . Luego, las rectas se intersectan en el punto  $(3, 4)$ .

## RECTAS PARALELAS

Las rectas del plano,  $L_1$  y  $L_2$ , son paralelas si no se intersectan o son coincidentes, es decir,  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas con  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$  o  $L_1 = L_2$ .

La siguiente proposición traduce el paralelismo en términos de pendientes:

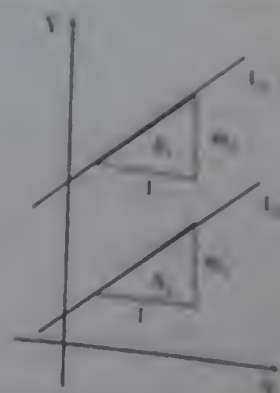
**PROPOSICIÓN 4.1** Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos rectas del plano que son no verticales y tienen pendientes  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente; entonces

$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ son paralelas} \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

**Demostración.**

Sea  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  los triángulos rectángulos mostrados en la figura adjunta. Se tiene que:

$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ son paralelas} \Leftrightarrow \Delta_1 \text{ y } \Delta_2 \text{ son congruentes} \\ \Leftrightarrow m_1 = m_2$$



**EMPL. 4.1** Hallar una ecuación de la recta  $L_1$  que pasa por el punto  $P_1 = (-1, 1)$  y es paralela a la recta  $L_2: 2x + 3y - 8 = 0$ .

**Solución.**

Primero que:

$$2x + 3y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

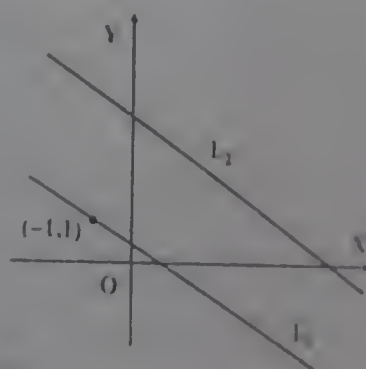
Entonces la pendiente de  $L_2$  es  $m = -\frac{2}{3}$ .

Como  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas, por la proposición

la pendiente de  $L_1$  también es  $m = -\frac{2}{3}$ .

Como  $L_1$  pasa por  $P_1 = (-1, 1)$ , tenemos que:

$$1 = -\frac{2}{3}(-1) + b \Leftrightarrow L_1: 2x + 3y - 1 = 0$$



## RECTAS PERPENDICULARES

En el plano dos rectas son perpendiculares si y sólo si se cortan formando un ángulo recto. La siguiente proposición caracteriza la perpendicularidad de rectas en términos de sus pendientes.

**PROPOSICIÓN 4.2** Si  $L_1$  y  $L_2$  son dos rectas no verticales con pendientes  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente, entonces:

$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ son perpendiculares} \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$$



- EJEMPLO 5.** a. Hallar una ecuación de la recta  $L_1$  que pasa por el punto  $P_1 = (15/8, 7)$  y es perpendicular a la recta  $L_2: 3x - 4y - 12 = 0$ .
- b. Hallar el punto donde  $L_1$  corta a  $L_2$ .

**Solución**

- a. Sean  $m_1$  y  $m_2$  las pendientes de  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente. Por la proposición

anterior tenemos que  $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ . Pero,

$$L_2: 3x - 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow L_2: y = \frac{3}{4}x - 3$$

Luego,  $m_2 = \frac{3}{4}$  y, por tanto,

$$m_1 = -\frac{1}{3/4} = -\frac{4}{3}$$

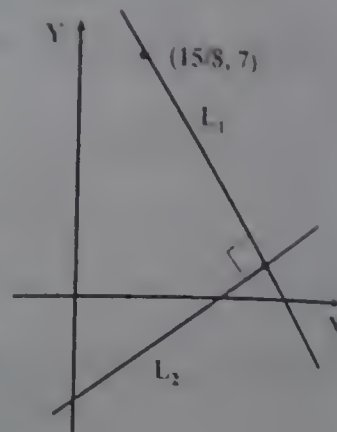
Como  $L_1$  pasa por el punto  $P_1 = (15/8, 7)$  y tiene

pendiente  $m_1 = -\frac{4}{3}$ , aplicando la ecuación punto-pendiente, tenemos:

$$L_1: y - 7 = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{15}{8}\right) \Leftrightarrow L_1: 8x + 6y - 57 = 0$$

- b. Resolvemos el sistema determinado por las ecuaciones de  $L_1$  y  $L_2$ :  $8x + 6y - 57 = 0$  y  $3x - 4y - 12 = 0$

hallamos que  $x = 6$  e  $y = \frac{3}{2}$ . Luego, las rectas se cortan en el punto  $(6, 3/2)$

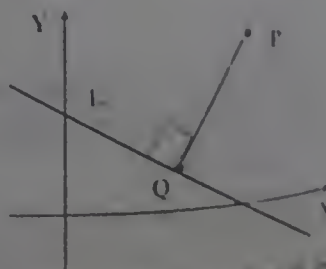


## DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Dado un punto  $P$  y una recta  $L$ , se llama **distancia del punto  $P$  a la recta  $L$**  a la distancia de  $P$  al punto  $Q$ , donde  $Q$  es la intersección de  $L$  con la recta perpendicular a  $L$  que pasa por  $P$ . Esto es,

$$d(P, L) = d(P, Q)$$

El siguiente teorema nos proporciona una fórmula más simple para calcular la distancia de un punto a una recta. La demostración la presentamos en el problema resuelto 3.



**TEOREMA E.6** La distancia del punto  $P = (x_0, y_0)$  a la recta  $L: Ax + By + C = 0$  es

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

**EJEMPLO 6.**  Hallar la distancia del punto  $P = (-2, 1)$  a la recta  $L: 3x - 4y + 2 = 0$ .

**Solución**

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3(-2) - 4(1) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

**EJEMPLO 7.**  Hallar la distancia entre las rectas paralelas

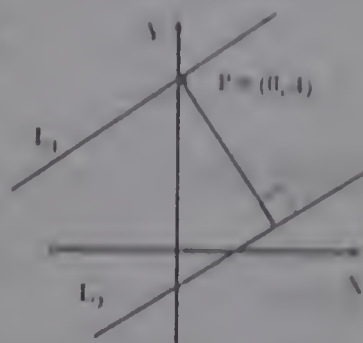
$$L_1: 2x - 3y - x - 8 = 0, \quad L_2: 2y - x + 2 = 0$$

**Solución**

Se entiende que la distancia entre dos rectas paralelas es la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra recta. Consigamos un punto de la recta  $L_1: 2y - x - 8 = 0$ . Por ejemplo, el punto  $P$  donde  $L_1$  corta al eje  $Y$ . Si hacemos  $x = 0$ , entonces  $2y - 8 = 0$  y, por tanto,  $y = 4$ . Luego  $P = (0, 4)$ .

Ahora

$$d(L_1, L_2) = d(P, L_2) = \frac{|2(4) - 0 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$



## PROBLEMAS RESUELTOS E

**PROBLEMA 1.**  Hallar una ecuación de la recta que es perpendicular a la recta

$$L: 3y - 4x - 15 = 0$$

y que forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a 6.

**Solución**

La pendiente de la recta  $L: 3y - 4x - 15 = 0$  es  $m_1 = \frac{4}{3}$ . Luego, la pendiente de una recta perpendicular es

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{4/3} = -\frac{3}{4}$$

Entonces, esta recta tiene por ecuación

$$y = -\frac{3}{4}x + b \quad (1)$$

Para hallar el valor de  $b$ , donde esta recta corta al eje  $Y$

se sustituyen estos valores en la ecuación anterior

$$0 = -\frac{3}{4}x + b \Rightarrow x = \frac{4}{3}b \quad (2)$$

El área del triángulo formado por la recta y los ejes es:

$$\frac{|a||b|}{2} = 6 \Leftrightarrow |ab| = 12$$

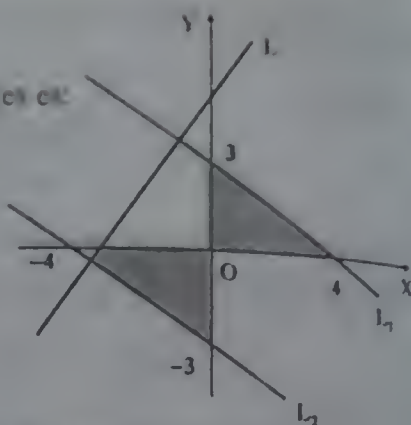
Reemplazando (2) en esta última igualdad:

$$|ab| = 12 \Leftrightarrow \left| \frac{4}{3}bb \right| = 12 \Leftrightarrow b^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow b = \pm 3$$

Reemplazando  $b = 3$  y  $b = -3$  en la ecuación (1) encontramos dos respuestas.

$$L_1: y = -\frac{3}{4}x + 3 \quad \text{ó} \quad L_2: y = -\frac{3}{4}x - 3$$



**PROBLEMA 2.** Si  $L_1$  y  $L_2$  son dos rectas no verticales con pendiente  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente. Probar que:

$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ son perpendiculares} \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$$

**Solución**

Como la perpendicularidad permanece invariante por traslaciones, podemos suponer que estas dos rectas se intersectan en el origen.

Las ecuaciones pendiente-intersección de estas rectas son:

$$L_1: y = m_1 x \quad L_2: y = m_2 x$$

Sea  $P = (x_1, m_1 x_1)$  un punto de  $L_1$  y  $P = (x_1, m_1 x_1)$

$Q = (x_2, m_2 x_2)$  un punto de  $L_2$ , tales que

ninguno de ellos es el origen.

Luego,  $x_1 \neq 0$ ,  $x_2 \neq 0$  y, por tanto,  $x_1 x_2 \neq 0$ .

De acuerdo al teorema de Pitágoras:

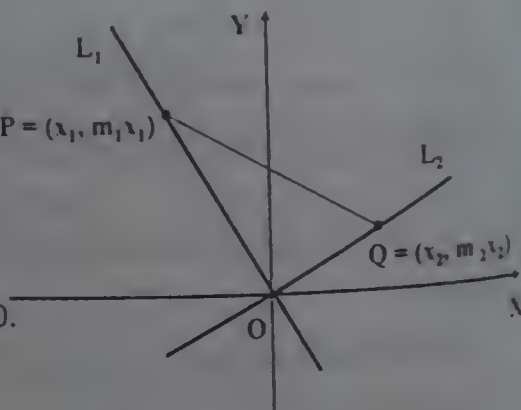
$L_1$  y  $L_2$  son perpendiculares  $\Leftrightarrow \triangle POQ$  es rectángulo

$$\Leftrightarrow d(P, Q)^2 = d(O, P)^2 + d(O, Q)^2$$

Pero,

$$d(P, Q)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (m_2 x_2 - m_1 x_1)^2$$

$$= x_2^2 - 2x_2 x_1 + x_1^2 + (m_2^2 x_2^2 - 2m_2 m_1 x_2 x_1 + (m_1^2 x_1^2)$$





$$d(O, P)^2 = x_1^2 + (m_1 x_1)^2 \quad y \quad d(O, Q)^2 = x_2^2 + (m_2 x_2)^2$$

Luego,

$L_1$  y  $L_2$  son perpendiculares  $\Leftrightarrow$

$$x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 + (m_2x_2)^2 - 2m_2m_1x_2x_1 + (m_1x_1)^2 = x_1^2 + (m_1x_1)^2 + x_2^2 + (m_2x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow -2x_2x_1 - 2m_2m_1x_2x_1 = 0 \Leftrightarrow -2x_2x_1(1 + m_2m_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + m_2m_1 = 0 \Leftrightarrow m_2m_1 = -1$$

**PROBLEMA 3.**

Probar que la distancia del punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  a la recta

$L: Ax + By + C = 0$ , es

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Solución

Sea  $L_1$  la recta perpendicular a  $L$  y que pasa por el punto  $P = (x_0, y_0)$ .

La pendiente de  $L$  es  $m = -\frac{A}{B}$  y,

por tanto, la pendiente de  $L_1$  es  $m_1 = \frac{B}{A}$

La ecuación punto pendiente de  $L_1$  es

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0) \Leftrightarrow Ay - Bx + (Bx_0 - Ay_0) = 0$$

Hallamos el punto  $Q$  donde se intersectan las rectas perpendiculares  $L$  y  $L_1$ . Para ello resolvemos el sistema:

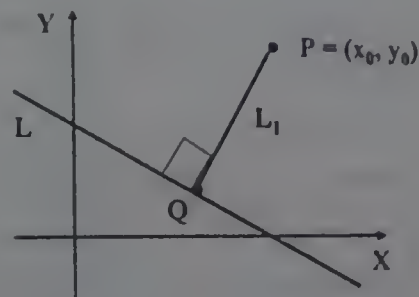
$$(1) \quad Ax + By + C = 0, \quad (2) \quad Ay - Bx + (Bx_0 - Ay_0) = 0$$

$$\text{El resultado es } Q = \left( \frac{B^2x_0 - AB y_0 - AC}{A^2 + B^2}, \frac{A^2y_0 - AB x_0 - BC}{A^2 + B^2} \right)$$

Entonces,

$$d(P, L)^2 = d(P, Q)^2 = \left( \frac{B^2x_0 - AB y_0 - AC}{A^2 + B^2} - x_0 \right)^2 + \left( \frac{A^2y_0 - AB x_0 - BC}{A^2 + B^2} - y_0 \right)^2$$

$$= \left( \frac{-A}{A^2 + B^2} \right)^2 (Ax_0 + By_0 + C)^2 + \left( \frac{-B}{A^2 + B^2} \right)^2 (Ax_0 + By_0 + C)^2$$



$$= \frac{A^2 + B^2}{(A^2 + B^2)^{3/2}} (Ax_0 + By_0 + C)^2 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} (Ax_0 + By_0 + C)^2$$

Expresando esta cantidad,

$$\Delta F.L. = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

### PROBLEMAS PROPUESTOS E

1. Usando pendientes probar que los puntos  $A = (2, 1)$ ,  $B = (-4, -2)$ ,  $C = (1, 7/2)$  son colineales.

En los problemas del 2 al 9, hallar una ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas y llevarla a la forma  $y = mx + b$ .

- Pasa por el punto  $(1, 3)$  y tiene pendiente 5.
- Tiene pendiente  $-3$  y pasa por el origen.
- Pasa por los puntos  $(1, 1)$  y  $(2, 3)$ .
- Intersecta al eje  $X$  en 5 y al eje  $Y$  en 1.
- Pasa por el punto  $(1, 3)$  y es paralela a la recta  $5y + 3x - 6 = 0$ .
- Pasa por el punto  $(4, 1)$  y es perpendicular a la recta  $5x + y - 2 = 0$ .
- Es paralela a  $3y + 4x - 5 = 0$  y pasa por el punto de intersección de las rectas  $5x + y = 4$ ,  $2x + 5y - 3 = 0$ .
- Intersecta a los ejes terminados a igual distancia del origen y pasa por  $(8, -2)$ .
- Dada la recta  $L: 3y - 4x - 7 = 0$ 
  - Encuentra la recta que pasa por el punto  $P = (1, 1)$  y es perpendicular a  $L$ .
  - Halla la distancia del punto  $P = (0, 1)$  a la recta  $L$ .
- Usando pendientes probar que los puntos  $A = (3, 1)$ ,  $B = (6, 0)$  y  $C = (1, 2)$  son los vértices de un triángulo rectángulo. Hallar el área de dicho triángulo.
- Determina cuáles de las siguientes rectas son paralelas y cuáles se perpendicularizan:
 

a. $L_1: 2x + 3y - 4 = 0$	b. $L_2: 4x + 3y - 8 = 0$	c. $L_3: -5x + 2y - 7 = 0$
d. $L_4: 11x + y - 3 = 0$	e. $L_5: 4x - 3y - 8 = 0$	f. $L_6: -x + 3y - 10 = 0$
- Halla la ecuación de cada una de las siguientes parejas de puntos:
 

a. $(1, 0)$ y $(2, -1)$	b. $(-1, 2)$ y $(1, 10)$	c. $(-2, 1)$ y $(-3, -1)$
-------------------------	--------------------------	---------------------------

14. Los extremos de una de las diagonales de un rombo son  $(2, -1)$  y  $(14, 3)$ . Hallar una ecuación de la recta que contiene a la otra diagonal. Supóngase que las diagonales de un rombo son perpendiculares.
15. Hallar la distancia del origen a la recta  $4x + 3y - 13 = 0$ .
16. Hallar la distancia del punto  $(0, -3)$  a la recta  $5x + 12y - 10 = 0$ .
17. Hallar la distancia del punto  $(1, -2)$  a la recta  $x - 3y = 5$ .
18. Hallar la distancia entre las rectas paralelas  $3x - 4y + 9 = 0$ ,  $3x - 4y = 10$ .
19. Hallar la distancia entre las rectas paralelas  $3x - y + 1 = 0$ ,  $3x - y + 8 = 0$ .
20. Hallar la distancia de  $Q = (6, -3)$  a la recta que pasa por  $P = (-4, 1)$  y es paralela a la recta  $4x + 3y = 0$ .
21. Determinar el valor de  $C$  en la recta  $L$ ,  $4x + 3y + C = 0$  sabiendo que la distancia del punto  $Q = (2, 9)$  a  $L$  es 4 veces la distancia del punto  $P = (-3, 3)$  a  $L$ .
22. Hallar las rectas paralelas a la recta  $5x + 12y - 12 = 0$  y que disten 4 unidades de ella.
23. Hallar la ecuación de la recta que pasando por el punto  $P = (8, 1)$  interseca a los ejes coordenados formando un triángulo de área 12 unidades cuadradas.
24. Determinar para qué valores de  $k$  y de  $n$  las rectas  
 $kx - 2y - 3 = 0$ ,  $6x - 4y + n = 0$   
 a. Se intersectan en un único punto      b. son perpendiculares  
 c. son paralelas no coincidentes      d. son coincidentes.
25. Determinar para qué valores de  $k$  y de  $n$  las rectas  
 $kx + 8y + n = 0$ ,  $2x - ky - 1 = 0$   
 a. son paralelas no coincidentes      b. son coincidentes      c. son perpendiculares
26. Un cuadrado tiene por centro  $C = (1, -1)$  y uno de sus lados está en la recta  $x - 2y = -12$ . Hallar las ecuaciones de las rectas que contienen a los otros lados.
27. Probar que los puntos  $A = (1, 4)$ ,  $B = (5, 1)$ ,  $C = (8, 5)$  y  $D = (4, 8)$  son los vértices de un rombo (cuadrilátero de lados de igual longitud). Verificar que las diagonales se cortan perpendicularmente.
28. Sean  $a$  y  $b$  la abscisa en el origen y la ordenada en el origen de una recta.  
 Si  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ , probar que una ecuación de esta recta es  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .



# APENDICE F

## CIRCUNFERENCIA, PARABOLA, ELIPSE E HIPERBOLA

Nuestra intención en la presente sección es hacer una breve presentación de circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. A estas tres últimas curvas las presentamos como gráficas de ciertas ecuaciones de segundo grado en dos variables. Para un estudio más exhaustivo se procede a partir de las propiedades geométricas de cada curva. Esto corresponde a un curso posterior.

### LA CIRCUNFERENCIA

**TEOREMA F.1** La circunferencia de centro  $C = (h, k)$  y radio  $r$  tiene por ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

En particular, si el centro es el origen,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

**Demostración**

$P = (x, y)$  está en la circunferencia  $\Leftrightarrow$

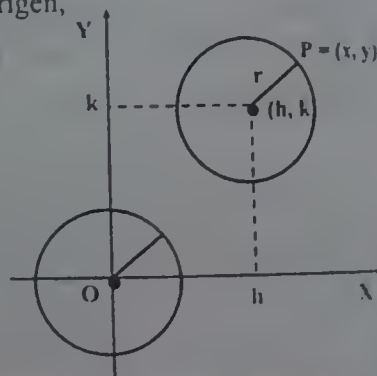
$$d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Observar que la circunferencia

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

puede ser vista como la circunferencia  $x^2 + y^2 = r^2$  a la cual le hemos aplicado la traslación que lleva el origen  $(0, 0)$  al punto  $(h, k)$ .



**EJEMPLO 1.** Hallar una ecuación de la circunferencia de centro  $(2, 1)$  y radio 3

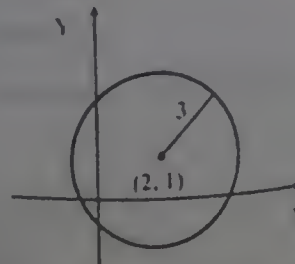
**Solución**

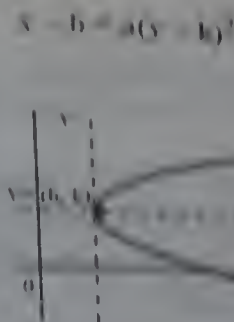
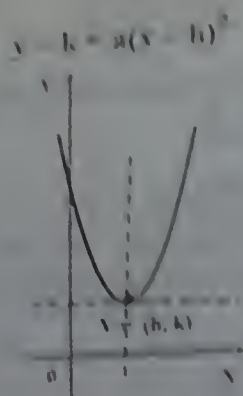
Por la proposición anterior, una ecuación de esta circunferencia es:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

Esta ecuación también podemos presentarla desarrollando los cuadrados y simplificando. Esto es:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$





**EJEMPLO 2.** Graficar las siguientes parábolas:

a.  $y = -\frac{1}{2}x^2$       b.  $2y = x^2 - 2x + 5$

**Solución**

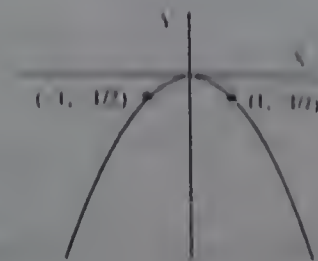
a. El gráfico de  $y = -\frac{1}{2}x^2$  es una parábola con

vértice en el origen. Como  $a = -1/2 < 0$ , la parábola se abre hacia abajo.

Para  $x = 1$  o  $x = -1$ , obtenemos  $y = -1/2$ .

Luego, la curva pasa por los puntos

$$(-1, -1/2) \text{ y } (1, -1/2)$$



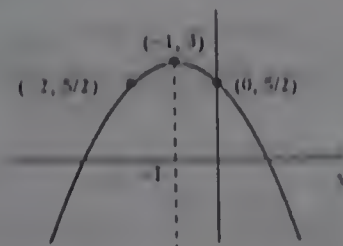
b. Completamos cuadrados:

$$2y = x^2 - 2x + 5 \Leftrightarrow$$

$$2y = (x^2 + 2x + 1) - 1 + 5 \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x+1)^2$$



En consecuencia, la gráfica de  $2y = x^2 - 2x + 5$  se obtiene de la gráfica de  $y = -\frac{1}{2}x^2$  mediante la traslación que lleva el origen al punto  $(-1, 3)$ .

**EJEMPLO 3.** Bosquejar la región del plano encerrada por la recta  $y = x + 4$  y la parábola  $x = y^2 - 2y$ .

**Solución**

Completando cuadrados en la parábola:

$$x = y^2 - 2y \Leftrightarrow x = (y^2 - 2y + 1) - 1 \Leftrightarrow x - (-1) = (y - 1)^2$$

La parábola se abre hacia la derecha y su vértice es  $(-1, 1)$ .

Hallemos los puntos de intersección de la parábola y la recta:

Elipse:  $x^2 + y^2 = 4$  con  $a=2$  y  $b=2$

Elipse:  $x^2 + y^2 = 4$  con  $a=2$  y  $b=2$

$x^2 + y^2 = 4$  con

$a=2$  y  $b=2$

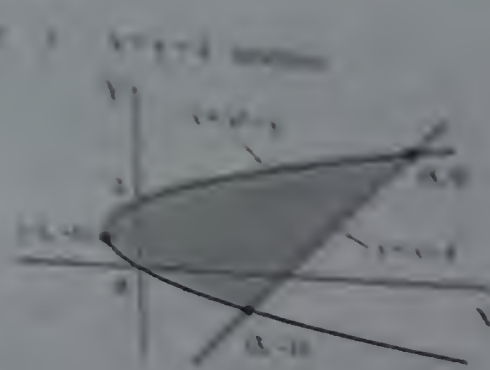
$x^2 + y^2 = 4$  con

$a=2$  y  $b=2$

Elipse:  $x^2 + y^2 = 4$  con

$a=2$  y  $b=2$

La elipse está centrada en el origen.



# LA ELIPSE

La elipse es la curva cerrada formada por los puntos que están a una distancia constante de dos puntos fijos llamados focos.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La elipse es una curva cerrada formada por los puntos que están a una distancia constante de dos puntos fijos llamados focos.

La elipse es una curva cerrada formada por los puntos que están a una distancia constante de dos puntos fijos llamados focos.

La elipse es una curva cerrada formada por los puntos que están a una distancia constante de dos puntos fijos llamados focos.

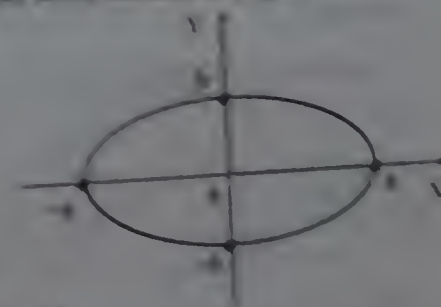
$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ y } y = -2$$

La elipse es una curva cerrada formada por los puntos que están a una distancia constante de dos puntos fijos llamados focos.

$$(2, -2) \text{ y } (-2, 2)$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ y } y = -2$$

La elipse es una curva cerrada formada por los puntos que están a una distancia constante de dos puntos fijos llamados focos.



La elipse es una curva cerrada formada por los puntos que están a una distancia constante de dos puntos fijos llamados focos.

La elipse es una curva cerrada formada por los puntos que están a una distancia constante de dos puntos fijos llamados focos.

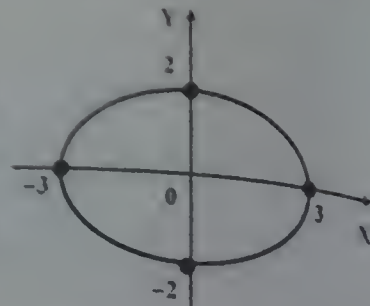
$$x^2 + y^2 = 4$$

La elipse es una curva cerrada formada por los puntos que están a una distancia constante de dos puntos fijos llamados focos.



$$\frac{4x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Vemos que se trata de una elipse en posición normal con centro en el origen. Además, tenemos que  $a = 3$  y  $b = 3$ . Esto significa que corta al eje  $X$  en los puntos  $(-3, 0)$  y  $(3, 0)$ , y al eje  $Y$  en  $(0, -3)$  y  $(0, 3)$ .



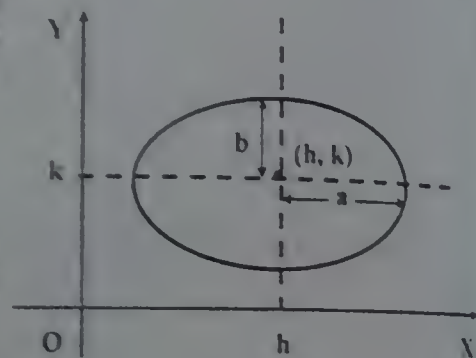
## ELIPSE TRASLADADA

Si aplicamos la traslación que lleva el origen de coordenadas al punto  $(h, k)$ , de acuerdo al criterio de traslación, la gráfica de la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

es la elipse correspondiente a la primera ecuación, trasladada al punto  $(h, k)$ .

A esta ecuación la llamaremos ecuación normal de la elipse con centro en  $(h, k)$ .



**EJEMPLO 5.** Identificar y bosquejar el gráfico de la ecuación:

$$4x^2 + 9y^2 + 16x + 18y - 11 = 0$$

**Solución**

Completemos cuadrados:

$$4x^2 + 9y^2 + 16x + 18y - 11 = 0 \Rightarrow$$

$$(4x^2 + 16x) + (9y^2 + 18y) - 11 = 0 \Rightarrow$$

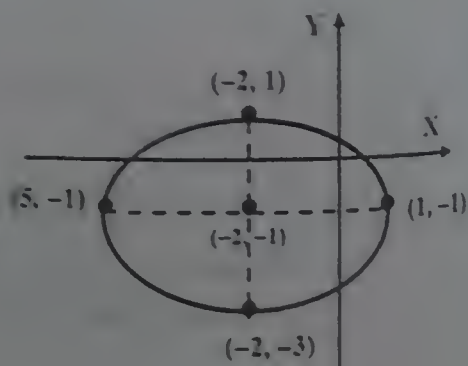
$$4(x^2 + 4x) + 9(y^2 + 2y) - 11 = 0 \Rightarrow$$

$$4(x + 2)^2 + 9(y + 1)^2 = 35$$

Dividimos entre 35 y simplificando,

$$\frac{(x+2)^2}{\frac{35}{4}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{35}{9}} = 1$$

Esta ecuación es la ecuación normal de una elipse con centro en  $(-2, -1)$ . Comparando esta ecuación con ecuación de la elipse del ejemplo anterior, deducimos que esta nueva elipse se obtiene de la anterior, mediante la traslación que lleva el origen al punto  $(-2, -1)$ .

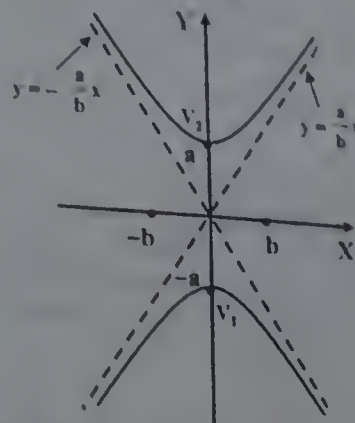
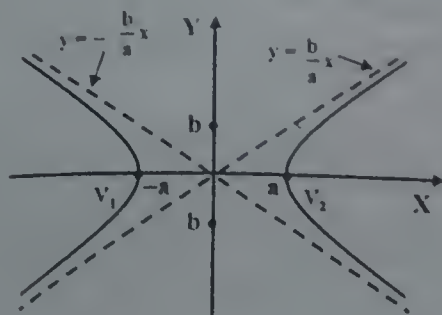


# LA HIPÉRBOLA

Llamaremos hipérbola en posición normal al gráfico de cualquiera de las dos ecuaciones siguientes, donde  $a$  y  $b$  son dos constantes positivas. A estas ecuaciones las llamaremos ecuación normales de la hipérbola con centro en origen.

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(2) \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



Analicemos cada una de estas ecuaciones:

1. La ecuación  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  no se altera si se cambia  $x$  por  $-x$  ó  $y$  por  $-y$ .

Luego, esta hipérbola es simétrica respecto a los dos ejes y al origen.

Esta hipérbola intersecta al eje X. En efecto:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = a \text{ ó } x = -a.$$

Estos puntos de intersección:

$$V_1 = (-a, 0) \text{ y } V_2 = (a, 0),$$

son los vértices de la hipérbola.

Esta hipérbola no intersecta al eje Y. En efecto:  $x = 0 \Rightarrow y^2 = -b^2$ , pero esta última ecuación no tiene soluciones reales.

De (1) obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow |x| \geq a \Rightarrow x \geq a \text{ ó } x \leq -a$$

Esto quiere decir que la hipérbola se compone de dos partes, a las que se les llama ramas.

Se llaman asíntotas de esta hipérbola a las rectas:

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x,$$

Estas rectas se obtienen igualando a 0 el primer miembro de la izquierda de la ecuación de la hipérbola. Así:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 &\Rightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \text{ ó } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{a}x \text{ ó } y = -\frac{b}{a}x\end{aligned}$$

Las asíntotas tienen la particularidad de que ambas ramas de la hipérbola se van aproximando cada vez más a ellas, a medida que nos alejamos del origen.

Para graficar la hipérbola se recomienda trazar las asíntotas primero.

2. Para la ecuación (2),  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ , podríamos hacer una discusión como la

anterior. Este trabajo lo ahorramos observando que esta ecuación se puede obtener de la (1) intercambiando la  $x$  por la  $y$ . Esto significa que la hipérbola correspondiente a (2) se obtiene reflejando en la diagonal principal la hipérbola correspondiente a (1). Para esta hipérbola se tiene:

Vértices:  $V_1 = (0, -a)$ ,  $V_2 = (0, a)$ .      Asíntotas:  $y = \frac{a}{b}x$ ,  $y = -\frac{a}{b}x$

**EJEMPLO 6.** Identificar y bosquejar la gráfica de las ecuaciones siguientes:

a.  $9x^2 - 4y^2 = 36$

b.  $16y^2 - 9x^2 = 144$

**Solución**

a. Dividiendo (1) entre 36 obtenemos:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Es una hipérbola en posición normal y centro en el origen.

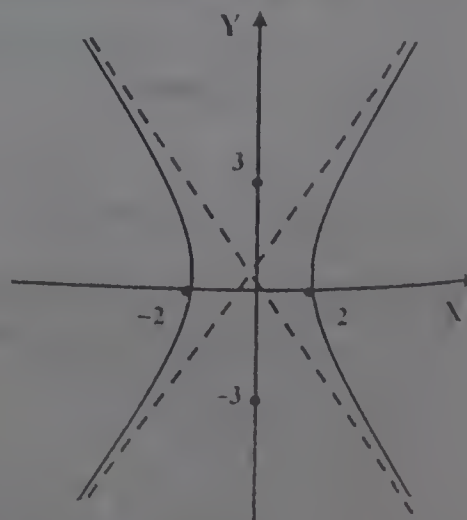
**Vértices:**

$$y = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ ó } x = 2.$$

$$\text{Luego, } V_1 = (-2, 0) \text{ y } V_2 = (2, 0)$$

**Asíntotas:**

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x \text{ ó } y = -\frac{3}{2}x$$



b. Dividiendo (2) entre 144 obtenemos  $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

Es una hipérbola en posición normal y centro en el origen.



Vértices:

$$x = 0 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = -3 \text{ ó } y = 3$$

Luego,  $V_1 = (0, -3)$  y  $V_2 = (0, 3)$

Asíntotas:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{3} - \frac{x}{4}\right)\left(\frac{y}{3} + \frac{x}{4}\right) = 0$$
$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x \text{ ó } y = -\frac{3}{4}x$$



### HIPERBOLA TRASLADADA

Si aplicamos la traslación que lleva el origen de coordenadas al punto  $(h, k)$ , de acuerdo al criterio de traslación, las gráficas de las ecuaciones representan hipérbolas con centro en  $(h, k)$ . A estas nuevas ecuaciones las llamamos ecuaciones normales de hipérbolas con centro en  $(h, k)$ .

$$(3) \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$(4) \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

**EJEMPLO 4.** Identificar y bosquejar el gráfico de la ecuación

$$16y^2 - 9x^2 + 32y + 36x - 164 = 0$$

Solución

Completamos cuadrados:

$$16y^2 - 9x^2 + 32y + 36x - 164 = 0 \Rightarrow 16(y+1)^2 - 9(x-2)^2 = 144$$
$$\Rightarrow \frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$$

Comparando esta ecuación con la ecuación normal de la hipérbola del ejemplo anterior parte b, deducimos que esta nueva hipérbola se obtiene de la anterior, mediante la traslación que lleva el origen al punto  $(2, -1)$ . Además, tenemos:

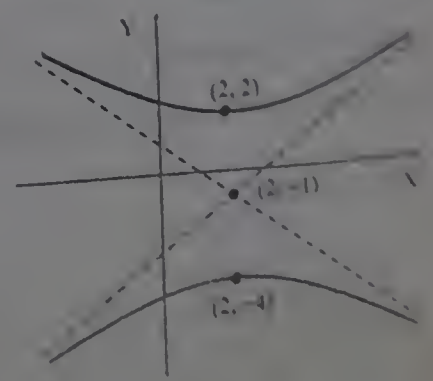
Vértices:

$$V_1 = (2, -3 - 1) = (2, -4), V_2 = (2, 3 - 1) = (2, 2)$$

Asíntotas:

$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{y+1}{3} - \frac{x-2}{4}\right]\left[\frac{y+1}{3} + \frac{x-2}{4}\right] = 0 \Rightarrow$$



## PROBLEMAS PROPUESTOS F

*En los problemas del 1 al 9 hallar una ecuación de la circunferencia que satisfice las condiciones dadas.*

1. Centro  $(2, -1)$ ;  $r = 5$
2. Centro  $(-3, 2)$ ;  $r = \sqrt{5}$
3. Centro el origen y pasa por  $(-3, 4)$
4. Centro  $(1, -1)$  y pasa por  $(6, 4)$
5. Centro  $(1, -3)$  y es tangente al eje X
6. Centro  $(-4, 1)$  y es tangente al eje Y
7. Tiene un diámetro de extremos  $(2, 4)$  y  $(4, -2)$
8. De radio  $r = 1$  y pasa por  $(1, 1)$  y  $(1, -1)$
9. Pasa por los puntos  $(0, 0)$ ,  $(0, 8)$  y  $(6, 0)$

*En los problemas del 10 al 15 probar que la ecuación dada representa una circunferencia, hallando su centro y su radio.*

10.  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$
11.  $x^2 + y^2 + 4y - 4 = 0$
12.  $x^2 + y^2 + y = 0$
13.  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$
14.  $2x^2 + 2y^2 - x + y - 1 = 0$
15.  $16x^2 + 16y^2 - 48x - 16y - 41 = 0$

*Identificar y bosquejar el gráfico de cada una de las siguientes ecuaciones. Además, si se trata de una parábola hallar su vértice y si es una hipérbola hallar sus vértices y asíntotas.*

16.  $y = 9x^2$
17.  $x = 2y^2$
18.  $x^2 = -8y$
19.  $3y = 5x^2$
20.  $x^2 + 4y^2 = 16$
21.  $y^2 - x^2 = 1$
22.  $9x^2 - y^2 = 9$
23.  $y - x^2 = 9$
24.  $y^2 = 10 - 20x$
25.  $16x^2 - 25y^2 = 400$
26.  $4x^2 + 4y^2 = 9$
27.  $4y^2 + 4y = 4x + 1 = 0$
28.  $16x^2 + 9y^2 - 36y = 108$
29.  $9x^2 - y^2 + 54x + 10y + 55 = 0$
30.  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$
31.  $4x^2 + 9y^2 - 8x - 18y + 13 = 0$
32.  $y^2 - x^2 - 2y - 2x + 1 = 0$

# APENDICE G

## TRIGONOMETRIA

### FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

#### LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Sea  $C$  la circunferencia unitaria de centro en el origen,

$$x^2 + y^2 = 1,$$

a la que llamaremos **Circunferencia Trigonométrica**.

En primer lugar definimos una función:

$$L: \mathbb{R} \rightarrow C.$$

Para esto fijamos el punto  $Q = (1, 0)$ , el que será nuestro punto de referencia. Sea  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $t = 0$ , entonces

$$L(0) = Q = (1, 0)$$

Si  $t > 0$  comenzando en el punto  $Q = (1, 0)$ , nos movemos sobre la circunferencia  $C$  en sentido antihorario hasta formar un arco de longitud  $t$ . El punto final de este arco es  $L(t)$ . Si  $t < 0$ , comenzando en el mismo punto  $Q = (1, 0)$ , nos movemos sobre la circunferencia en sentido horario hasta formar un arco de longitud  $|t|$ . El punto final de éste es  $L(t)$ . Así,

$$L(\pi/2) = (0, 1) \quad \text{y} \quad L(-\pi/2) = (0, -1)$$

Considerando que la longitud de  $C$  es  $2\pi$ , se tiene que:

$$L(t + 2\pi) = L(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Además,  $2\pi$  es el menor número positivo que cumple esta igualdad (es decir,  $L$  es periódica con periodo  $2\pi$ ). En general, una función  $f$  es periódica, si existe un número real  $k > 0$  tal que:

$$f(t + k) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

El menor número  $k$  que cumple esta condición es el periodo de la función.

**DEFINICION.** Llamamos **función seno** y **función coseno** a las funciones:

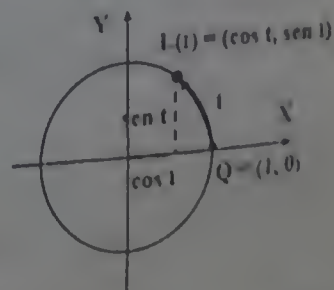
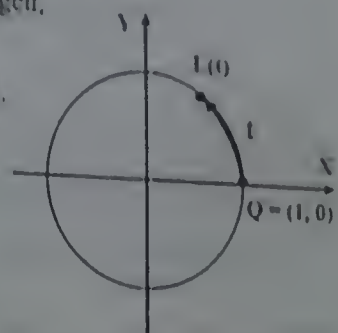
$$\text{sen}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{sen}(t) = \text{ordenada de } L(t)$$

$$\text{cos}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{cos}(t) = \text{abscisa de } L(t)$$

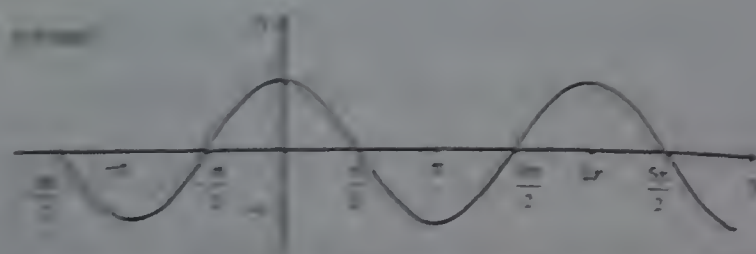
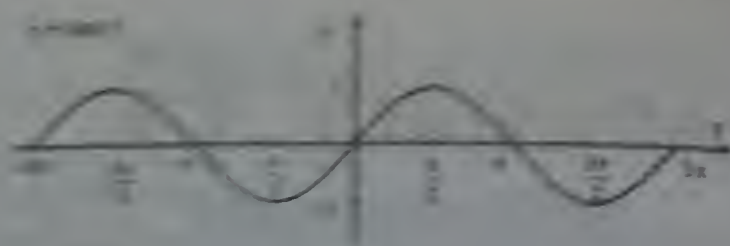
Es decir,

$$L(t) = (\text{cos}(t), \text{sen}(t))$$

Escribiremos  $\cos t$  y  $\sin t$ , en lugar de  $\text{cos}(t)$  y  $\text{sen}(t)$







**TEOREMA 6.1** Para cualquier número real  $t$  se cumple:

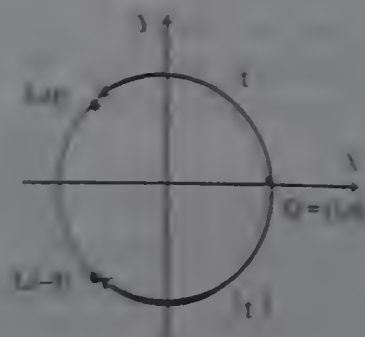
1.  $\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t$ ,  $\cos(t + 2\pi) = \cos t$

2.  $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$ ,  $\cos(-t) = \cos t$

3.  $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - t = \cos t$ ,  $\cos \frac{\pi}{2} - t = \operatorname{sen} t$

4.  $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

5.  $|\operatorname{sen} t| \leq 1$ ,  $|\cos t| \leq 1$



**Demostración**

1. Esta propiedad es consecuencia directa de la periodicidad de la función  $L$ .

2. Esta propiedad es consecuencia de que las

$$\cos t = \operatorname{sen}(t + \frac{\pi}{2}) \text{ y } L(t + \frac{\pi}{2}) = (\cos t, \operatorname{sen}(t + \frac{\pi}{2}))$$

son simétricas respecto al eje  $X$  (figura anterior).

3. Sea punto

$$L(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

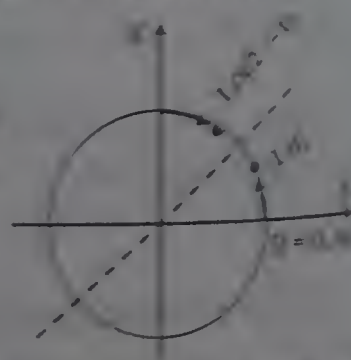
$$L(\frac{\pi}{2} - t) = (\cos(\frac{\pi}{2} - t), \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - t))$$

son simétricas respecto a la diagonal  $y = x$ , por tanto, sus coordenadas se intercambian.

4. El punto  $L(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$  está en la circunferencia trigonométrica, por lo que

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

5. Como  $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$  se deduce que  $\cos^2 t \leq 1$  y  $\operatorname{sen}^2 t \leq 1$  para todo  $t$ .



La propiedad (1) nos dice que las funciones seno y coseno son periódicas. Se puede probar que el periodo es  $2\pi$ . La propiedad (2) nos dice que el seno es una función impar y que el coseno es par.

**EJEMPLO 1.** Hallar todos los  $t \in \mathbb{R}$  tales que:

1.  $\sin t = 0$ .

2.  $\cos t = 0$ .

**Solución**

1.  $\sin t = 0 \Leftrightarrow L(t) = (1, 0) \text{ ó } L(t) = (-1, 0)$

$\Leftrightarrow t = 2n\pi \text{ ó } t = -\pi + 2n\pi, \forall n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}.$

2.  $\cos t = 0 \Leftrightarrow L(t) = (0, 1) \text{ ó } L(t) = (0, -1)$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ ó } t = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi, \forall n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}.$

### LAS OTRAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Las restantes funciones trigonométricas: tangente, cotangente, secante y cosecante, a las que abreviamos con  $\tan$ ,  $\cot$ ,  $\sec$  y  $\csc$ , respectivamente, las definimos en términos de las funciones seno y coseno.

**DEFINICION.**

a.  $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$

b.  $\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$

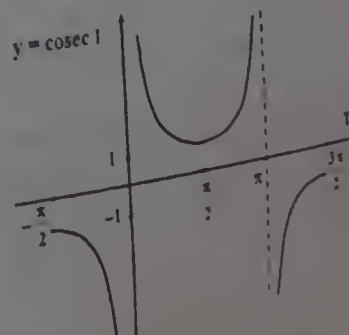
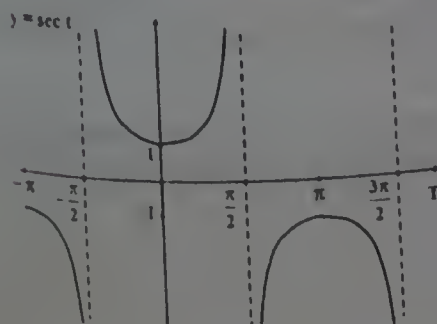
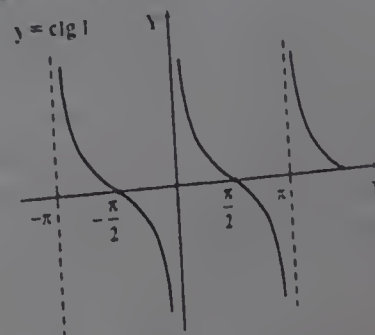
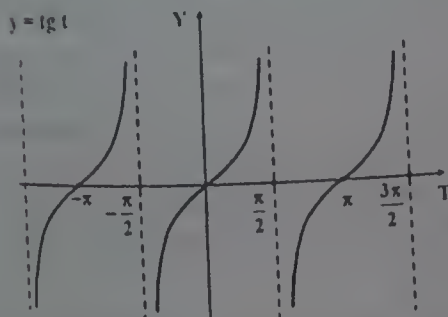
c.  $\sec t = \frac{1}{\cos t}$

d.  $\csc t = \frac{1}{\sin t}$

De acuerdo a los resultados del ejemplo anterior tenemos que:

1.  $\text{Dom}(\tan) = \text{Dom}(\sec) = \{ t \in \mathbb{R} / t \neq \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$

2.  $\text{Dom}(\cot) = \text{Dom}(\csc) = \{ t \in \mathbb{R} / t \neq n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$



**EJEMPLO 2.** Hallar el valor que toman las funciones trigonométricas en  $t = -\pi$ .

**Solución**

Tenemos que  $L(-9\pi) = L(-\pi + 2(-4)\pi) = L(-\pi) = (-1, 0)$ .

Luego,

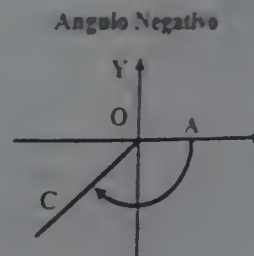
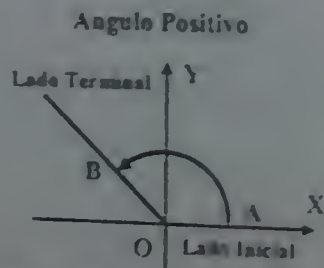
$$\text{a. } \sin(-9\pi) = 0 \quad \text{b. } \cos(-9\pi) = -1 \quad \text{c. } \tan(-9\pi) = \frac{\sin(-9\pi)}{\cos(-9\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\text{d. } \cot(-9\pi) \text{ no está definida} \quad \text{e. } \sec(-9\pi) = \frac{1}{\cos(-9\pi)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{f. } \operatorname{cosec}(-9\pi) \text{ no está definida}$$

## ANGULOS ORIENTADOS

Diremos que un ángulo está en posición normal si su vértice coincide con el origen del sistema de coordenadas y uno de sus lados, al que llamaremos lado inicial, coincide con el semieje positivo de las X. El otro lado es el lado terminal. La figura adjunta muestra al ángulo AOB en posición normal. El lado inicial es OA, OB es el lado terminal.



El concepto de ángulo dado en Geometría no es satisfactorio para el Cálculo. Es necesario que a cada ángulo le asignemos además una rotación y obtener, de este modo, un ángulo orientado. Así, el ángulo orientado AOB se obtiene por la rotación del lado inicial OA hasta el lado terminal OB. Un ángulo orientado es positivo si la rotación es antihoraria (contraria a las agujas del reloj) y es negativo si la rotación es horaria. El ángulo orientado AOB adjunto es positivo, mientras que el ángulo AOC es negativo. El punto A del lado inicial, al rotar describe un arco que tiene cierta longitud. Convenimos en considerar esta longitud positiva si la rotación es antihoraria, y negativa si la rotación es horaria.

Es claro que para un ángulo cualquiera existe otro ángulo en posición normal al cual es congruente. Por esta razón, no perderemos generalidad si nos concentramos en estudiar los ángulos en posición normal.

Los ángulos se miden en grados o en radianes (rad.). En el Cálculo se simplifica las fórmulas si se trabaja con radianes. Por esta razón el Cálculo adopta este tipo de medida.



**DEFINICIÓN.**

Si un ángulo central  $\theta$  subtiende un arco  $s$  de longitud  $s$  sobre una circunferencia de radio  $r$ , entonces el ángulo mide

$$\theta = \frac{s}{r} \text{ radianes} \quad (1)$$

Si un ángulo subtiende un arco igual a la circunferencia completa, entonces el ángulo mide

$$\frac{2\pi r}{r} \text{ radianes} = 2\pi \text{ rad}$$

Luego,  $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$ , ó, simplemente,

$$180^\circ = \pi \text{ rad.} \quad (2)$$

De donde

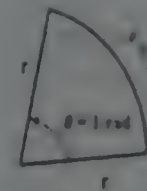
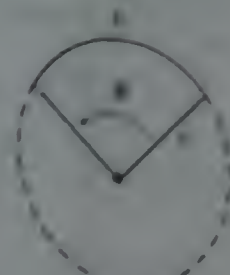
$$(3) \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.} \approx 0,017 \text{ rads.} \quad (4) \quad 1 \text{ rad.} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$$

Para tener una idea geométrica de un ángulo de 1 rad. tomemos un ángulo central  $\theta$  que subtiende un arco de longitud igual a un radio.

Se tiene, por (1),

$$\theta = \frac{s}{r} = 1 \text{ rad.}$$

Es decir, un ángulo mide 1 rad. si éste subtiende un arco de longitud igual al radio.

**EJEMPLO 3.**

Hallar la longitud del arco subtidido por un ángulo central de  $\theta = 1,8$  radianes en una circunferencia de 12 cm de radio.

Solución

$$s = \theta r = 1,8(12 \text{ cm}) = 21,6 \text{ cm}$$

Usaremos (3) y (4) para convertir grados en radianes y radianes en grados, respectivamente.

**EJEMPLO 4.**

Expresar:

a.  $60^\circ$  en radianes

b.  $-\frac{5}{2}\pi$  radianes en grados

Solución

$$a. \quad 60^\circ = 60\left(\frac{\pi}{180} \text{ rad}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$b. \quad -\frac{5}{2}\pi \text{ rad} = -\frac{5}{2}\pi \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = -450^\circ$$

## FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS

Hemos definido las funciones trigonométricas de números reales. Sin embargo en la trigonometría elemental las funciones trigonométricas se definen para un ángulo agudo de un triángulo rectángulo como las siguientes razones:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{Op}}{\text{Hip}}$$

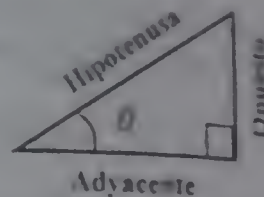
$$\cos \theta = \frac{\text{Ady}}{\text{Hip}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{Op}}{\text{Ady}}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{Ady}}{\text{Op}}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{Hip}}{\text{Ady}}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{\text{Hip}}{\text{Op}}$$



Debemos reconciliar estos dos puntos de vista.

**DEFINICION.** Si un ángulo orientado  $\theta$  tiene  $t$  radianes, entonces:

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} t$$

Si la medida del ángulo está dada en grados, convertimos los grados en radianes. Así, si el ángulo tiene  $A^\circ$ , que equivalen a  $t$  radianes, entonces

$$\operatorname{sen}(A^\circ) = \operatorname{sen} t.$$

Con las demás funciones trigonométricas se procede de igual forma.

Ahora, tomemos el círculo trigonométrico, un ángulo central  $\theta$  medido en radianes ( $\theta$  radianes) y el arco de longitud  $t$  que éste subtiende. De acuerdo a la fórmula (1) se tiene que

$$\theta = \frac{t}{1} = t$$

Es decir, en el círculo trigonométrico, la medida del ángulo en radianes es igual a la longitud del arco subtenido.

Ahora mirando la figura anterior vemos que la definición de las funciones trigonométricas mediante el triángulo rectángulo (definición antigua) coincide con la dada mediante la circunferencia trigonométrica (definición nueva). Así

$$(\text{Definición antigua}) \operatorname{sen} \theta = \frac{\text{Op}}{\text{Hip}} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1}$$

$$= \operatorname{sen} \theta = \text{ordenada de } L(\theta) \text{ (definición nueva)}$$

## ANGULO DE INCLINACION

Se llama ángulo de inclinación de una recta no horizontal al menor ángulo positivo que forma la recta con el semirrecta positiva de las  $X$ . A las rectas horizontales las asignamos como ángulo de inclinación al ángulo de medida 0.

18

Sin embargo,  
para un ángulo



Es claro que si la medida del ángulo de inclinación es  $\alpha$  radianes, entonces

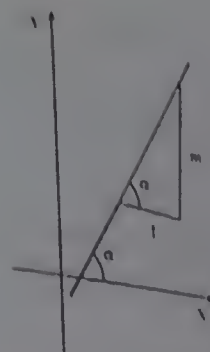
$$0 \leq \alpha < \pi$$

Si  $L$  es una recta no vertical de pendiente  $m$  y ángulo de inclinación  $\alpha$ , entonces

$$m = \tan \alpha$$

En efecto, mirando el triángulo de la figura, tenemos que:

$$\tan \alpha = \frac{\text{Op}}{\text{Ady}} = \frac{m}{1} = m$$



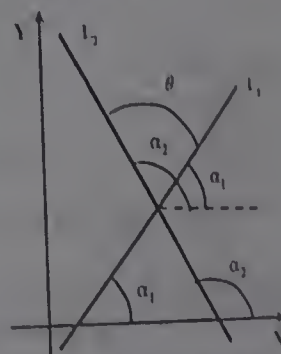
Si la recta es vertical, su ángulo de inclinación mide  $\frac{\pi}{2}$  rad. Pero  $\tan(\frac{\pi}{2})$  no está definida. Este resultado concuerda con el hecho de que las rectas verticales no tienen pendiente.

### ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos rectas que se cortan y que tienen ángulo de inclinación  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , respectivamente. En el punto de intersección de estas rectas se forman dos ángulos suplementarios. Uno de ellos es:

$$\theta_1 = \begin{cases} \alpha_2 - \alpha_1 & \text{si } \alpha_2 \geq \alpha_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & \text{si } \alpha_1 \geq \alpha_2 \end{cases}$$

y el otro es  $\theta_2 = \pi - \theta_1$



De estos dos ángulos, si las rectas no son perpendiculares, sólo uno es agudo. El siguiente teorema nos dice como calcular este ángulo agudo

#### TEOREMA G.2

Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos rectas no verticales y no perpendiculares, con pendientes  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente. Si  $\theta$  es el ángulo agudo entre  $L_1$  y  $L_2$ , entonces

$$\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

#### Demostración

El ángulo agudo  $\theta$  es  $\theta_1$  si  $\tan \theta_1 \geq 0$  ó es  $\theta_2$  si  $\tan \theta_2 \geq 0$ .

Sea  $\alpha_1$  el ángulo de inclinación de  $L_1$  y  $\alpha_2$  el de  $L_2$ . Supongamos que  $\alpha_2 \geq \alpha_1$ .

Se tiene:  $\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$ ,  $\theta_2 = \pi - \theta_1$ ,  $\tan \alpha_2 = m_2$  y  $\tan \alpha_1 = m_1$ .

Usando las identidades trigonométricas 6 y 11 y sabiendo que la función tangente tiene periodo  $\pi$ , obtenemos:

$$\tan \theta_1 = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

do en radianes  
fórmula (1) se

es igual a la  
las funciones  
coincide con la  
i:

va)

ángulo positivo  
los ángulos les



$$\tan \theta_2 = \tan(\pi - \theta_1) = \tan(-\theta_1) = -\tan \theta_1 = -\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Luego,  $\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$

**EJEMPLO 5.** Hallar los ángulos entre las rectas:

$$L_1: 9y - 2x - 30 = 0, \quad L_2: 3y - 8x + 12 = 0$$

**Solución**

La pendiente de  $L_1$  es  $m_1 = \frac{2}{9}$  y la de  $L_2$  es  $m_2 = \frac{8}{3}$

Si  $\pi$  es el ángulo agudo entre las rectas, entonces

$$\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{8/3 - 2/9}{1 + (2/9)(8/3)} \right| = \left| \frac{24 - 2}{27 + 16} \right| = \frac{66}{43}$$

Luego,  $\theta = \arctan\left(\frac{66}{43}\right) \approx 0.993 \text{ rads.} \approx 56^\circ 54' 54''$

El otro ángulo es  $\theta' = \pi - 0.993 = 2.1486 \text{ rads.} \approx 123^\circ 5' 6''$

## LEY DE LOS COSENOS

El siguiente resultado generaliza el teorema Pitágoras

**TEOREMA G.3** Si los lados de un triángulo miden  $a$ ,  $b$  y  $c$  y  $\theta$  es el ángulo opuesto a  $c$ , entonces

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

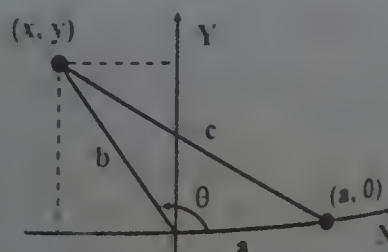
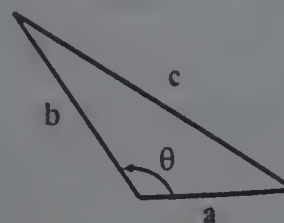
**Demostración**

Tomamos un sistema de coordenadas en tal forma que el ángulo  $\theta$  quede en posición normal y el lado  $a$  descansa sobre el eje  $X$ .

Tenemos que  $y = b \sin \theta$  y  $x = b \cos \theta$

Aplicando la fórmula de distancia para los vértices del lado  $c$ :

$$\begin{aligned} c^2 &= (x - a)^2 + (y - 0)^2 \\ &= (b \cos \theta - a)^2 + (b \sin \theta - 0)^2 \\ &= b^2 \cos^2 \theta - 2ab \cos \theta + a^2 + b^2 \sin^2 \theta \\ &= a^2 + b^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 2ab \cos \theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \end{aligned}$$



## FORMULAS DE ADICION Y SUSTRACCION

Las identidades trigonométricas que presentamos en el caso de esta apéndice son consecuencia de las siguientes fórmulas de adición. Presentamos una demostración parcial de del siguiente teorema en el problema resuelto 4.

### TEOREMA G.4

$$a. \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$b. \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$c. \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$d. \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$e. \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$f. \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

## FORMULAS DEL ANGULO DOBLE

Si en las fórmulas a, b y c tomamos  $y = x$ , se tiene:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

La fórmula anterior de  $\cos(2x)$  combinada con la identidad  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  dan otras dos fórmulas para  $\cos(2x)$ :

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \quad \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

## FORMULAS DE REDUCCION DE POTENCIA

Si en las dos fórmulas anteriores despejamos  $\sin^2 x$  y  $\cos^2 x$  obtenemos:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

Estas fórmulas, a su vez, sustituyendo  $x$  por  $x/2$  y sacando raíz cuadrada, nos dan las fórmulas del ángulo mitad.

## FORMULAS DEL ANGULO MITAD

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

## TRANSFORMACION DE PRODUCTOS EN SUMAS

Continuando, mediante sumas y restas, las fórmulas a, b, c y d obtenemos:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

### TRANSFORMACION DE SUMAS EN PRODUCTOS

En fórmulas anteriores, haciendo un adecuado cambio de variables y después se obtienen

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

Todas estas fórmulas estas fórmulas aparecerán en una tabla más adelante

### PROBLEMAS RESUELTOS G

#### PROBLEMA 1.

Probar que las funciones tangente, cotangente y cosecante son impares y que la función secante es par. Es decir, probar que

$$a. \tan(-t) = -\tan t$$

$$b. \cot(-t) = -\cot t$$

$$c. \sec(-t) = \sec t$$

$$d. \operatorname{cosec}(-t) = -\operatorname{cosec} t$$

Solución

Sólo probaremos las partes (a) y (c). Para las otras se procede en forma similar

$$a. \tan(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

$$c. \sec(-t) = \frac{1}{\cos(-t)} = \frac{1}{\cos t} = \sec t$$

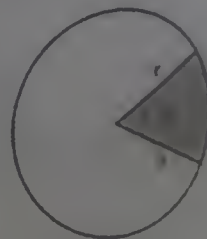
#### PROBLEMA 2.

Probar que el área A de un sector circular correspondiente al ángulo de  $\theta$  radianes en una circunferencia de radio r es

$$A = \frac{1}{2} \theta r^2$$

Solución

Es claro que en una misma circunferencia, las áreas de dos sectores circulares son proporcionales a las medidas de los ángulos centrales correspondientes. De acuerdo a este resultado y al hecho de que el círculo total es un sector circular de  $2\pi$  radianes, sabemos que la razón entre el área A y el área total del círculo ( $\pi r^2$ ) es la misma que la razón entre  $\theta$  y  $2\pi$ . Esto es,





$$\frac{v}{\omega} = \frac{r}{1} \rightarrow v = \frac{1}{2} \omega r$$

**PROBLEMA 3.** Los dos piñones que unen la cadena de una bicicleta tienen 10 cm y 3 cm de radio, respectivamente.

- Si el piñón grande (el de los pedales) gira a razón de 75 revoluciones por minuto, ¿A cuántas revoluciones por minuto gira el piñón pequeño (el del eje de la rueda)?
- Si las ruedas de la bicicleta tienen un radio de 45 cm, ¿A qué velocidad se desplaza esta?

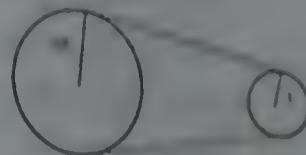
**Solución**

- La circunferencia del borde del piñón grande tiene una longitud de  $2\pi(10)$  cm. Luego, en un minuto, cualquier punto de esta circunferencia hace un recorrido de  $2\pi(10)(75)$  cm, por minuto. Por otro lado, la longitud de la circunferencia exterior del piñón pequeño es  $2\pi(3)$  cm. Luego, el piñón pequeño debe hacer

$$\frac{2\pi(10)(75)}{2\pi(3)} = 250 \text{ revoluciones por minuto}$$

- La rueda trasera de la bicicleta, al igual que el piñón pequeño, gira a razón de 250 revoluciones por minuto, lo que da un recorrido de

$$2\pi(45)(250) \text{ cm/min} = 22500\pi \text{ cm/min} \approx 706,86 \text{ m/min}$$



**PROBLEMA 4.** Probar las siguientes fórmulas aditivas:

a.  $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

b.  $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

c.  $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

d.  $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

e.  $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

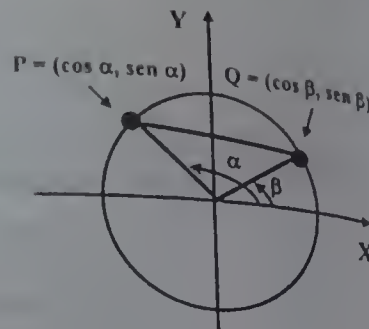
f.  $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

**Solución**

Probarémoslas solamente a, c, d y e. Las otras fórmulas se prueban de forma similar. Comenzaremos probando d.

- Calcularemos la longitud del segmento  $PQ$  del gráfico adjunto de dos números mediante la fórmula de la distancia y mediante la ley de los cosenos.

$$\begin{aligned}
 (d(P, Q))^2 &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2 \\
 &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \\
 &\quad - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \\
 &= 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \\
 (d(P, Q))^2 &= (d(O, P))^2 + (d(O, Q))^2 \\
 &\quad - 2 (d(O, P))(d(O, Q)) \cos (\alpha - \beta) \\
 &= 2 - 2 \cos (\alpha - \beta)
 \end{aligned}$$



Luego,

$$2 - 2 \cos (\alpha - \beta) = 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \Rightarrow$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

c. La parte 3 del teorema G.1 dice que:  $\sin t = \cos [\pi/2 - t]$  y  $\cos t = \sin [\pi/2 - t]$ .

Luego,

$$\begin{aligned}
 \sin (x - y) &= \cos [\pi/2 - (x - y)] = \cos [(\pi/2 - x) - (-y)] \\
 &= \cos (\pi/2 - x) \cos (-y) + \sin (\pi/2 - x) \sin (-y) \\
 &= \sin x \cos y - \cos x \sin y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \sin (x + y) &= \sin (x - (-y)) = \sin x \cos (-y) - \cos x \sin (-y) \\
 &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
 &= \sin x \cos y + \cos x \sin y
 \end{aligned}$$

$$\text{e. } \tan (x + y) = \frac{\sin (x + y)}{\cos (x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

Dividiendo el numerador y el denominador entre  $\cos x \cos y$ :

$$\tan (x + y) = \frac{\sin x / \cos x + \sin y / \cos y}{1 - (\sin x / \cos x)(\sin y / \cos y)} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS G

1. Sin usar calculadora hallar:

$$\text{a. } \cot \frac{5\pi}{3}, \quad \text{b. } \sin \frac{7\pi}{6}, \quad \text{c. } \tan \left(-\frac{\pi}{3}\right), \quad \text{d. } \sec \left(-\frac{7\pi}{6}\right), \quad \text{e. } \operatorname{cosec} \left(-\frac{241\pi}{6}\right)$$

2. Hallar todos los  $\alpha \in \mathbb{R}$  tales que:

a.  $\cos \alpha = 0$     b.  $\cos \alpha = 1$     c.  $\sec \alpha = 0$     d.  $\cos \alpha = 2$     e.  $\sec \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Probar que:

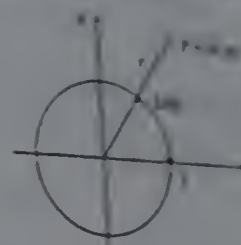
a.  $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$     b.  $\sec(\alpha + \pi) = -\sec \alpha$     c.  $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$

4. Probar que:

a.  $\cos(n\pi) = (-1)^n$     b.  $\cos(\alpha + n\pi) = (-1)^n \cos \alpha$     c.  $\sin(\alpha + n\pi) = (-1)^n \sin \alpha$

5. Sea  $P = (x, y) \neq (0,0)$  un punto del plano que está a una distancia  $r$  del origen. Si  $L(t)$  es el punto de intersección del rayo  $OP$  con la circunferencia unitaria, probar que

a.  $\sin t = \frac{y}{r}$     b.  $\cos t = \frac{x}{r}$     c.  $\tan t = \frac{y}{x}$ ,  $x \neq 0$



6. Hallar el valor de  $\sin(-23\pi/2)\cos(31\pi)$

7. Si  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , simplificar

a.  $\sin(2\alpha + \beta + \gamma)$     b.  $\sin(2\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta - \gamma)$

8. Sabiendo que el periodo de  $y = \sin x$  es  $2\pi$  y el de  $y = \cos x$  es  $\pi$ , hallar el periodo de las funciones:

a.  $f(x) = \sin(\lambda x)$ , donde  $\lambda$  es una constante mayor que 0.    b.  $g(x) = \cos(2x)$

9. Una circunferencia tiene un radio de 18 cm. Hallar la medida en radianes de un ángulo determinado por un arco de longitud

a. 6 cm.    b. 11.8 cm.    c.  $6\pi$  cm

10. Hallar la longitud de un arco subtendido en una circunferencia de 9 cm de radio por un ángulo central de:

a.  $\frac{\pi}{6}$  radianes    b.  $\frac{5}{4}\pi$  radianes    c.  $50^\circ$

11. La distancia entre dos puntos A y B sobre la tierra se mide a lo largo de la circunferencia que pasa por A y B y tiene por centro C, el centro de la tierra. Si el radio de la tierra es, aproximadamente, 6.367 Km., hallar la distancia entre A y B si el ángulo ACB es de

a.  $1^\circ$     b.  $30^\circ$     c.  $45^\circ$     d.  $80^\circ 45'$

12. En el problema anterior, si el ángulo ACB mide  $1'$  (un minuto), entonces la distancia entre A y B es de una milla náutica. ¿Cuántos Km. tiene una milla náutica?

13. ¿Cuántos radianes gira el minutero de un reloj en un lapso de 20 minutos?

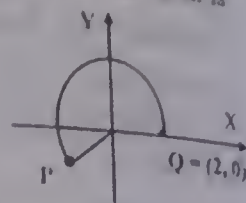
14. Hallar la medida en grados de un ángulo que es suplemento de un ángulo de

$\frac{\pi+1}{2}$  radianes.

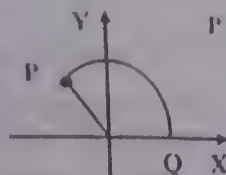


15. Dos ángulos internos de un triángulo miden  $\frac{\pi+1}{2}$  y  $\frac{\pi-1}{2}$  radianes. Hallar la medida, en grados, del tercer ángulo.

16. En la figura, el arco QP tiene una longitud de  $\frac{7\pi}{3}$  cm. Hallar el punto P.



17. En la figura, el radio de la circunferencia es 3 cm y la longitud del arco es  $2\pi$ . Hallar P.



18. El lado terminal de un ángulo orientado en posición normal es el rayo OP, donde O es el origen y  $P = (-2, 6)$ . Si la medida de este ángulo es  $\alpha$  radianes, hallar el valor de:

$$(\sin \alpha - 3 \cos \alpha)(\tan \alpha)(\sec \alpha)$$

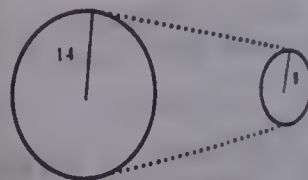
19. Hallar el valor de: a.  $\frac{\sin(-750^\circ)}{\cos(-150^\circ)}$  b.  $\frac{\cos(-1290^\circ)}{\tan(7.515^\circ)}$

20. Hallar el valor de  $\left(\cos \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{26\pi}{4}\right)\left(\tan \frac{\pi}{6} + \cos \frac{14\pi}{3}\right)$

21. Hallar la longitud del lado de un polígono regular de  $n$  lados inscrito en una circunferencia de radio  $r$ .

22. El caucho de un automóvil tiene un diámetro de 60 cm. ¿A cuántas revoluciones por minuto gira el caucho cuando el automóvil viaja a 90 Km. por hora?

23. Una banda enlaza a dos poleas, como indica la figura. Los radios de las poleas son de 8 cm. y 14 cm., respectivamente. ¿A cuántas revoluciones por segundo gira la polea pequeña cuando la grande gira a razón de 28 revoluciones por segundo?



24. El ángulo de inclinación de una recta que no intersecciona el segundo cuadrante es de  $\pi/4$  rads. Hallar su ecuación sabiendo que su distancia al origen es de 4 unidades.

25. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas:  $3x + 2y = 0$  y  $5x - y + 7 = 0$

26. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $Q = (2, 1)$  y forma un ángulo de  $\pi/4$  rads. con la recta  $3y + 2x + 4 = 0$  (dos soluciones).

27. Los puntos  $(6, 2)$  y  $(-1, 3)$  son dos vértices opuestos de un cuadrado. Hallar las ecuaciones de las rectas donde están los lados del cuadrado.

# RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

## CAPITULO 1

### SECCION 1.1

1. a.  $\frac{3}{4}$       b.  $\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$       c.  $\frac{h}{3(h+3)}$       d.  $\frac{h}{(a+1)(a+h+1)}$   
 2. a. 2      b.  $\frac{1}{4}a^2 + a + 2$       c.  $\frac{h^2 + 2ah}{4}$

3.  $\text{Dom}(f) = [9, +\infty)$ ,  $\text{Rang}(f) = [0, +\infty)$

4.  $\text{Dom}(g) = [-4, 4]$ ,  $\text{Rang}(g) = [0, 4/3]$

5.  $\text{Dom}(h) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ ,  $\text{Rang}(h) = [0, +\infty)$

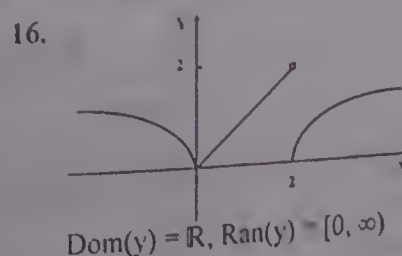
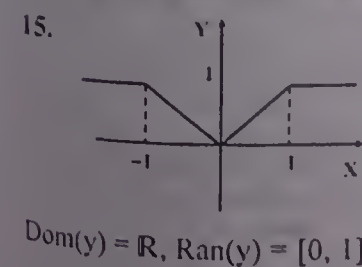
6.  $\text{Dom}(u) = \text{Rang}(u) = \mathbb{R}$       7.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $\text{Rang}(f) = \mathbb{R}$

8.  $\text{Dom}(y) = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ ,  $\text{Rang}(y) = [0, +\infty)$       9.  $\text{Dom}(g) = (-\infty, 9] - \{5\}$

10.  $\text{Dom}(y) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) - \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$

11.  $\text{Dom}(y) = (-\infty, 0) \cup [\frac{1}{4}, +\infty)$       12.  $\text{Dom}(y) = (-\infty, 1] - \{-15\}$

13.  $\text{Dom}(y) = [-1, 2)$       14.  $\text{Dom}(y) = (-\infty, -5] \cup (3, +\infty)$



18.  $f(x-1) = (x-5)^2$

19.  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$       20.  $U(x) = 226.000x - 5.000x^2$

21.  $G(x) = \begin{cases} 4.000x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1.000 \\ 4.000.000 + (x-1.000)(14.000-10x), & \text{si } x > 1.000 \end{cases}$

$$22. P(x) = 1760x - 10x^2 \quad 23. V(x) = x^2(150 - 2x) \quad 24. A(r) = \pi r^2 + \frac{1}{4}(6 - \pi r)^2$$

$$25. A(x) = 6(18 - x)\sqrt{x - 9}$$

$$26. A(x) = \frac{x}{8}(28 - 4x - \pi x)$$

$$27. V(x) = 4x(40 - x)(25 - x)$$

$$28. A(x) = \frac{1}{x}(x + 4)(252 + 6x)$$

$$29. P(\theta) = 20 \left[ \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

$$30. V(\theta) = \frac{125}{3\pi^2} \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

$$31. y - x = 4\sqrt{2} = 0$$

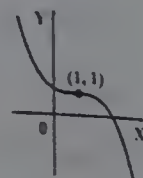
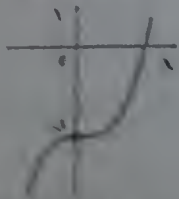
## SECCION 1.2

$$1. a. y = x^3 - 3$$

$$b. y = (x - 1)^3$$

$$c. y = -x^3 + 1$$

$$d. y = (x - 1)^3 + 1$$

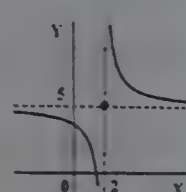
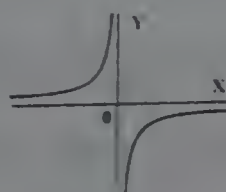
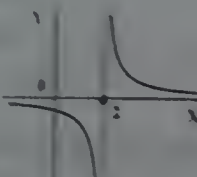


$$2. a. y = \frac{1}{x} - 2$$

$$b. y = \frac{1}{x - 2}$$

$$c. y = -\frac{1}{x}$$

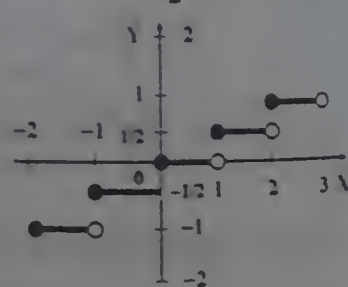
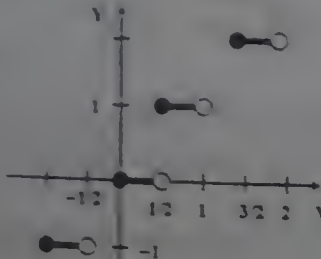
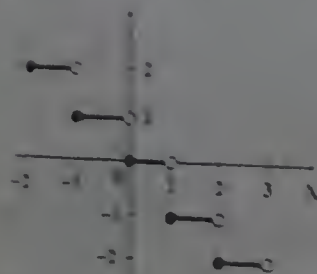
$$d. y = \frac{1}{x - 2} + 5$$



$$3. a. y = -[x]$$

$$b. y = [2x]$$

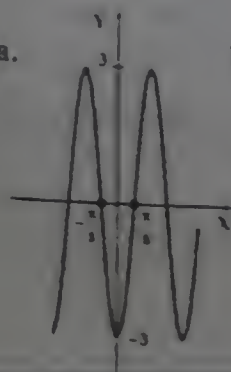
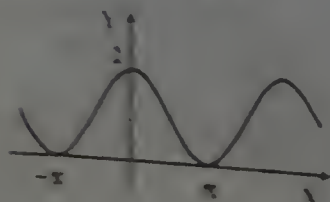
$$c. b. y = \frac{1}{2}[x]$$



$$4. y = 1 - \cos(x - \frac{\pi}{2})$$

$$5. a.$$

$$b. \text{ periodo} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$





24.  $A(x) = x^2 - \frac{1}{x} - 2$

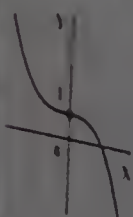
26.  $A(x) = \frac{x}{8} (28 - 4x - x^2)$

28.  $A(x) = \frac{1}{x} (x - 4) \sqrt{x^2 - 4}$

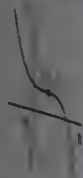
30.  $V(\theta) = \frac{125}{3\pi^2} \sqrt{4 - \theta^2}$

N 1.2

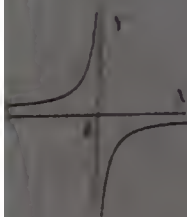
c.  $y = -x^3 + 1$



d.  $y = (x-1)^3$



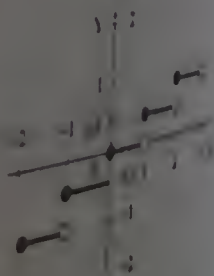
c.  $y = -\frac{1}{x}$



d.  $y = \frac{1}{1-x^2}$



c. b.  $y = \frac{1}{2} [1]$



6.  $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f-g) = \text{Dom}(fg) = (-\infty, 1) \cup (1, 2]$   
 $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = (-\infty, 1) \cup (1, 2)$

7.  $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f-g) = \text{Dom}(fg) = [-4, -2] \cup [2, 4]$   
 $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = [-4, -2] \cup (2, 4]$

8.  $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f-g) = \text{Dom}(fg) = (-2, 2)$ ,  $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = (-2, 2) - \{0\}$

9.  $\text{Dom}(f) = [1, 4]$  10.  $\text{Dom}(f) = (-2, 0]$

11.  $\text{Dom}(g) = [-2, 3]$

12.  $(f \circ g)(x) = x - 1$ ,  $\text{Dom}(f \circ g) = [0, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ,  $\text{Dom}(g \circ f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$(f \circ f)(x) = x^4 - 2x^2$ ,  $\text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R}$

$(g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}$ ,  $\text{Dom}(g \circ g) = [0, +\infty)$

13.  $(f \circ g)(x) = x - 4$ ,  $\text{Dom}(f \circ g) = [4, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ,  $\text{Dom}(g \circ f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$(f \circ f)(x) = x^4$ ,  $\text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R}$

$(g \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x-4}-4}$ ,  $\text{Dom}(g \circ g) = [20, +\infty)$

14.  $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ ,  $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}$

$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ ,  $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$(f \circ f)(x) = x^4 - 2x^3 + x$ ,  $\text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R}$

$(g \circ g)(x) = x$ ,  $\text{Dom}(g \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}$

15.  $(f \circ g)(x) = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{x}}$ ,  $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} - \{1\}$

$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ ,  $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} - \{1\}$

$(f \circ f)(x) = \frac{x-1}{x}$ ,  $\text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ ,  $(g \circ g)(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $\text{Dom}(g \circ g) = \mathbb{R}$

16.  $(f \circ g)(x) = \sqrt{-x}$ ,  $\text{Dom}(f \circ g) = (-\infty, 0]$

Universidad Yacamb  
BOLIVIA  
Procesos Tecnológicos

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x^2 - 1}}, \quad \text{Dom}(g \circ f) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$$

$$(f \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 2}, \quad \text{Dom}(f \circ f) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$$

$$(g \circ g)(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}, \quad \text{Dom}(g \circ g) = [0, 1]$$

$$17. (f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1}}$$

$$18. (f \circ g \circ h)(x) = 3\sqrt{\frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1}}$$

$$19. (f \circ f \circ f)(x) = x, \quad \text{Dom}(f \circ f \circ f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$20. f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = 1 + x.$$

$$21. f(x) = x - 3, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$22. f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = (2x - 1)^2$$

$$23. f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$24. f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad h(x) = x^2$$

$$25. f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = x + 1, \quad h(x) = x^2 + |x|$$

$$26. f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad g(x) = x - 1, \quad h(x) = \sqrt{x}$$

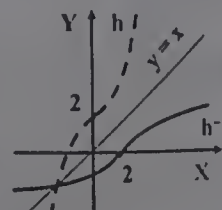
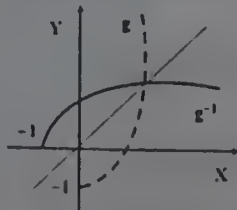
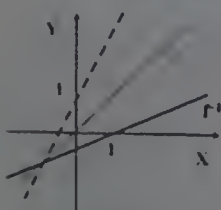
$$27. g(x) = x^2 - 2x + 1 \quad 28. g(x) = \frac{1}{x+1}$$

### SECCION 1.3

$$1. f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$2. g^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$$

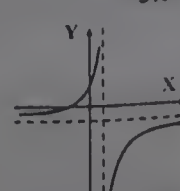
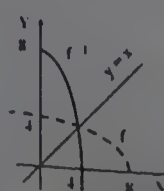
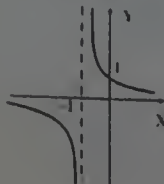
$$3. h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$$



$$4. k^{-1}(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$5. f^{-1}(x) = 8 - \frac{x^2}{2}$$

$$6. g^{-1}(x) = \frac{-7x-15}{3x-5}$$



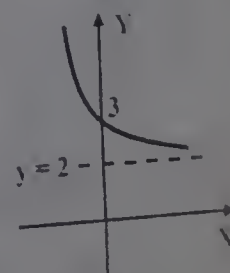
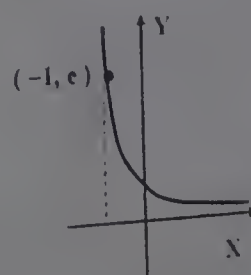
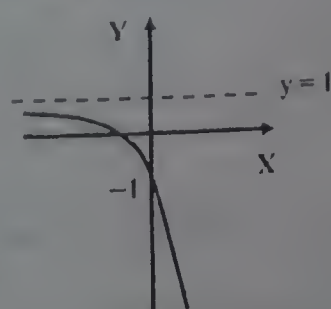
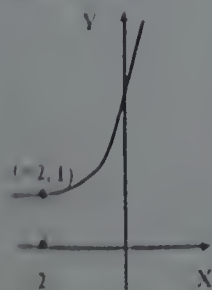
# SECCION 1.4

877

1.  $\frac{\pi}{4}$  2.  $\frac{5}{4}\pi$  3.  $\pi$  4.  $-\frac{\pi}{3}$  5.  $\frac{3\pi}{4}$  6.  $\frac{7\pi}{6}$  7. a.  $\frac{2}{3}\sqrt{2}$  b.  $\frac{1}{4}\sqrt{2}$
- c.  $2\sqrt{2}$  d.  $\frac{1}{4}\sqrt{2}$  e. 3 8. a.  $\frac{1}{5}\sqrt{5}$  b.  $\frac{2}{5}\sqrt{5}$  c.  $\frac{1}{2}$  d. 2 e.  $\sqrt{5}$
9. a.  $-\frac{3}{10}\sqrt{10}$  b.  $\frac{1}{10}\sqrt{10}$  c.  $-\frac{1}{3}$  d.  $\sqrt{10}$  e.  $-\frac{\sqrt{10}}{3}$  10.  $\frac{1}{2}$  11.  $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$
12.  $\frac{3}{5}$  13.  $-\frac{3}{7}\sqrt{7}$  14.  $\frac{\pi}{3}$  15.  $\frac{\pi}{3}$  16.  $\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{10}}{30}$  17.  $\frac{4}{9}\sqrt{2}$
18.  $\sqrt{3}$  19.  $\frac{5}{26}\sqrt{26}$  20.  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  21.  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  22.  $\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$
23.  $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$  24.  $x = 2\text{sen}(-0,5) \approx -0,958851077$  25.  $x = \sqrt{2} - 1$
26.  $x = 0,8673$  ó  $x = -1,4728682$

# SECCION 1.5

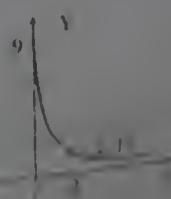
1. 3 2. 16 3. 125 4.  $\frac{1}{125}$  5. 4 6.  $\frac{4}{3\sqrt{3}}$  7. 100
8.  $e^{-4} = \frac{1}{e^4}$  9.  $\frac{1}{81}$  10.  $\frac{1}{5}$  11.  $2^{14}$  12.  $\frac{1}{32}$  13. 2
14. 2 15. -4 16.  $\frac{5}{3}$  17.  $-\frac{7}{8}$  18.  $-\frac{1}{3}$  19. -1 ó 3
20.  $y = e^{x+2}$  21.  $y = -2e^x + 1$  22.  $y = e^{-x}$  23.  $y = e^{-x} + 2$



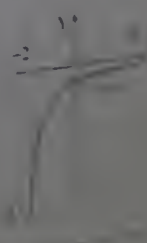
24.  $y = 2 - e^{-x}$



26.  $y = 3^{-x+2}$



28.  $y = -4^{-x-1}$





## SECCION 1.6

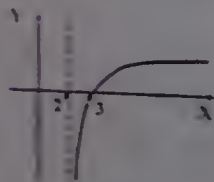
1. -6   2. 4   3. -4   4.  $-\frac{1}{2}$    5. 3   6. 9   7.  $\sqrt{3}$    8.  $\frac{8}{9}$    9. 625

10. 8, -2   11. 5   12.  $e^{-a/3}$    13.  $e^{-1+k/20}$    14.  $e^2$    15.  $e^{e^{-4}}$

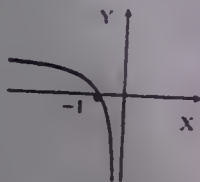
16.  $\frac{\ln(143)}{-1.2} \approx -1,2837$    17.  $1 + \frac{3}{\ln 3} \approx 3,73$    18.  $\frac{6}{(3 + \log_2 3)} \approx 1,3086$

19.  $\frac{8}{(4 \log_2 3 - 1)} \approx 1,498$

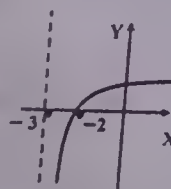
20.  $y = \ln(x - 2)$



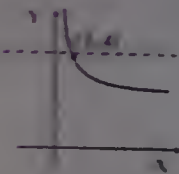
21.  $y = \ln(-x)$



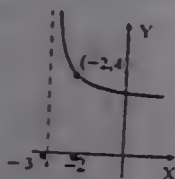
22.  $y = \ln(x + 3)$



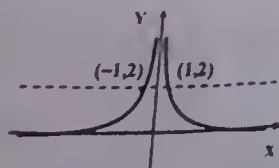
23.  $y = 4 - \ln x$



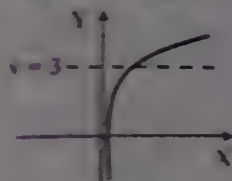
24.  $y = 4 - \ln(x + 3)$



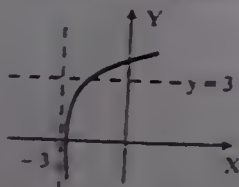
25.  $y = 2 - \ln|x|$



26.  $y = 3 + \log x$



27.  $y = 3 + \log(x + 3)$



28.  $2 \log 4 - \log b - \log c$

29.  $\frac{1}{2} \log b - 2 \log a - 3 \log c$

30.  $-\log a - \frac{3}{2} \log c - \frac{1}{2} \log b$

31.  $\frac{1}{5} (2 \ln a - \ln b - 4 \ln c)$

32.  $\ln \frac{4^3 a}{x^2}$

33.  $\log \frac{4^3 b}{(xy)^2}$

34.  $\ln \frac{\sqrt[4]{a^3} b^3}{\sqrt{c^2}}$

35.  $\ln \frac{4^3 a^3}{x^2} = 3 \ln 4 + 3 \ln a - 2 \ln x$

## SECCION 1.7

9. 625

$e^{-4}$

1,3086

1. a. 127.020 b. 5,127 % 2. a. \$ 15 509,33 b. 22 12 %
3. a. 18 millones b. 24,3 millones c. 2,02 % 4. 100 000 5. 5,23 millones
6. 351 gr 7. 280,93 gr 8. 64 000 millones 9. 1 478,25 millones
10. a. 81,87 % b. 67,03 % c. 14,84 % 11. a. 12 mil b. 18 mil c. 15 mil
12. a. \$ 485.889,27 13. 3.924 años 14. 2,32 horas 15. 18 mil 16. 4 años
17. 29,54 meses 18. 2.554 libros 19. 81 666,666 millones
20. 29,5 años 21. 11.460 años 22. a. 11 700 (100) b. 12 240 (100)
23. a. 12.886.396 d. 13.130.043 e. 13.130.043 24. 3.173.350.575 dólares 25. a. 4.792 años
26. a. 4,621 años b. 7,324 años

## CAPITULO 2

### SECCION 2.1

1. 10 2.  $\frac{1}{2}$  3. 0 4.  $\frac{2}{3}$  5. 6 6. -10 7.  $\frac{1}{4}$  8. 12 9. 27 10. 12 11.  $\frac{1}{1}$
12. -1 13. 6 14. 32 15. 8 16.  $\frac{1}{3}$  17. 108 18.  $2\sqrt{2}$  19.  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  20.  $\frac{1}{4}$
21.  $\frac{1}{4}$  22. 0 23.  $-\frac{1}{56}$  24. 3 25.  $\frac{3}{2}$  26. 12 27.  $\frac{1}{3}$  28.  $\frac{2}{3}$  29.  $\frac{1}{2}$
30. 3 31.  $\frac{4}{3}$  32.  $\frac{m}{n}$  33.  $\frac{1}{2}$  34.  $\frac{3a^2}{a-1}$  35.  $\frac{(a-b)\sqrt{a+b}}{(c-d)\sqrt{a+b}}$  36.  $\frac{1}{2}$  37.  $\frac{1}{2}$
38. 1 39. 2 40. 1 41. 2 42. -3 43. -2 44. 2 45. 1 46. 0 47. 12 48. 17 49. 1
50. 3 51. 1 52. 0 53.  $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$  54.  $\frac{2\sqrt{2}}{2}$  55. a. 5, b. 5, c. 5 56. a. 8, b. 8, c. 8 57. a. -4 b. 4

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 0 \\ \sin \frac{\pi}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, g(x) = -\frac{x}{|x|} \quad \text{en } a = 0 \quad \text{b. Las curvas de } f(x)$$

### SECCION 2.3

1. -1    2.  $\frac{2}{3}$     3.  $\frac{1}{2}$     4. 0    5. 0    6. 0    7. 1    8.  $\frac{1}{2}$     9.  $\frac{1}{2}$   
 10.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$     11.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     12.  $\frac{\sqrt{2}}{8}$     13.  $\pi$     14.  $\frac{3}{4}$     15.  $\frac{1}{2}$     16. 0  
 17. 1    18.  $\frac{2 \cos a}{\cos(a/2)}$     19.  $-2 \sin a$     20.  $\cos^3 a$     21.  $-\frac{1}{3}$     22. 3

### SECCION 2.4

2.  $1/2$     4. 0, esencial    5. -2, esencial    6. 2 y -2, esenciales    7. 5 esencial  
 8. 3 y -8, esenciales    9. 2, esencial    10. 3, esencial    11. 1 esencial    12. 3 y 5  
 13. 4    14. 2    15. -1, 2    16.  $a = 1$  y  $b = -1$     17.  $a = 12/\pi$  y  $b = -7/2$   
 18.  $a = -1$  y  $b = 1$     19.  $a = b$ , b cualquiera.    20.  $\{n + \frac{1}{2}, n \text{ un entero}\}$   
 21.  $\{4n, n \text{ un entero}\}$     22.  $[0, 1) \cup \mathbb{Z}$     23.  $\{0\}$     24.  $\mathbb{Z}$     25.  $\mathbb{R}$   
 26. 1,5    27. -1,9    28. 0,7

### SECCION 2.5

1. en 2:  $+\infty, -\infty$     2. en 2:  $+\infty, +\infty$     3. en -1:  $+\infty, +\infty$     4. en 4:  $+\infty, -\infty$   
 5. en 5:  $+\infty, -\infty$     6. en 0:  $+\infty, -\infty$ ; en -2:  $-\infty, +\infty$   
 7. en 3:  $+\infty, -\infty$ ; en -1:  $+\infty, -\infty$     8. en -2:  $-\infty, +\infty$ ; en 2:  $+\infty, -\infty$   
 9. en 0:  $-\infty, +\infty$     10. 0    11.  $+\infty$     12.  $+\infty$     13.  $-\infty$     14.  $-\infty$     15.  $+\infty$   
 16.  $-\infty$     17.  $+\infty$     18.  $-\infty$     19.  $-\infty$     20.  $+\infty$     21. 1    22.  $-\frac{1}{2}$     23.  $-\infty$     24. 0  
 25. 2    26. 0    27.  $-\infty$     28.  $+\infty$     29.  $x = 0$     30.  $x = \frac{1}{2}, x = -\frac{1}{2}$   
 31.  $x = 1, x = -1$     32.  $x = 1, x = -1$

### SECCION 2.6

1. 0, 0    2. 0, 0    3. 1, 1    4.  $+\infty, -\infty$     5.  $1/2, 1/2$   
 6.  $+\infty, -\infty$     7.  $-\infty, -\infty$     8. 1, 1    9.  $+\infty, +\infty$     10.  $+\infty$     11.  $+\infty$     12. 1  
 13. 0    14.  $+\infty$     15. -7    16. 0    17.  $-\infty$     18.  $3/2$     19. 0    20. 2



4.  $u' = 10v^9 - 6v^7 + 1.2v^2$       5.  $s' = -10t^{-6} + t^2 + 0.6t^{-1}$       6.  $z' = \frac{-1}{3y^2} + \frac{6}{y^3}$
7.  $f'(x) = \frac{5}{2}x^{-1/6} + \frac{8}{3}x^{-5/3}$       8.  $g'(x) = 5ax^4 + 4bx^{-5} + \frac{3}{2}cx^{1/2}$       9.  $y' = -\frac{4x^3}{a}$
10.  $z' = \frac{3x^2}{a+b} - \frac{5x^4}{a-b} - 1$       11.  $z' = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}bt$       12.  $y' = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^3}$
13.  $z' = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} + \frac{1}{3t\sqrt[3]{t}}$       14.  $u' = -\frac{\sqrt{3}}{4x\sqrt{x}} + \frac{10}{9x^3\sqrt{x^2}}$       15.  $y' = -64x^7 - 14x^6 + 90x^5$
16.  $y' = (x^3 + 3x^2)e^x$       17.  $y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^x$       18.  $y' = ex^{e-1} + e^x$
19.  $y' = 3x^2 - 12x + 11$       20.  $72x^5 - 50x^4 - 32x^3 + 2x^2 + 10x + 4$
21.  $z' = \frac{1}{2\sqrt{t}}(21t^{10} - 13t^6 - 18t^4 + 2)$       22.  $y' = 1$       23.  $u' = 5x\sqrt{x} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}} - 2$
24.  $y' = \frac{-1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{6}{x^2}$       25.  $y' = -\frac{3}{(x-9)^2}$       26.  $y' = \frac{-8}{(x-8)^2}$
27.  $y' = \frac{-6}{(x-3)^2}$       28.  $z' = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$       29.  $u' = \frac{4t^3 - 6t^2 - 1}{(t-1)^2}$
30.  $y' = \frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$       31.  $y' = \frac{ax^2 - c}{x^2}$       32.  $y' = \frac{3ax^2 + bx - c}{2x\sqrt{x}}$
33.  $y' = \frac{2ax}{\sqrt{a^2 + b^2}}$       34.  $y' = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} - 3x^2 + 2x + 1$       35.  $y' = \frac{-2(x-2)}{(x-1)^2(x-3)^2}$
36.  $y' = \frac{-3}{2\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})^2}$       37.  $y' = \frac{-4}{3\sqrt[3]{x^2}(1+3\sqrt[3]{x})^2}$       38.  $y' = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$
39.  $x + y + 2 = 0$       40.  $8x + y - 4 = 0$       41.  $x - 2y + 2 = 0$
42.  $-4ax + y + 3a^2 = 0$       43.  $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$       44.  $y = e$
45.  $y = \frac{5}{2}$       46.  $\left(2, -\frac{65}{6}\right), (-3, 10)$       47.  $3x + y + 4 = 0$
48.  $x + 2y + 5 = 0$       49.  $y = 3x^2 - 12x$       50.  $y = -x^2 + 8x$
51.  $y = x^2 - 2x - 3$

### SECTION 3.3

$$\begin{aligned}
 1. f'(x) &= 5 \cos x - 2 \sin x & 2. g'(t) &= \cos t - 8 \sin t & 3. h'(x) &= \sin x + \cos x \\
 4. y' &= \sin^2 x - \cos^2 x & 5. h(x) &= \frac{1}{1 + \cos x} & 6. f'(x) &= \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \\
 7. f'(x) &= \frac{2 \cos x}{(1 - \cos x)^2} & 8. y' &= \frac{-2}{(\cos x - \sin x)^2} & 9. g'(x) &= \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \\
 10. y &= 3\sqrt{3}x + \sqrt{3}x - 1 = 0 & 11. y &= \frac{\sqrt{3}}{8}x - \frac{\sqrt{3}}{27}x - 1 = 0
 \end{aligned}$$

### SECTION 3.4

$$\begin{aligned}
 1. y' &= \left( \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) e^x & 2. y' &= -2^{-x} \ln 2 & 3. y' &= (2e^{2x^2} - 2x)e^{2x^2} \\
 4. y' &= (-x^2 + 2x)e^{-x} & 5. y' &= \left( \frac{1}{x} - \ln x \right) e^x & 6. y' &= \left( \frac{1}{x \ln x} - \ln 2 \log_2 x \right) 2^x \\
 7. y' &= \frac{1 - x \ln x}{x e^x} & 8. y' &= \frac{1 - (\ln 2)^2 + \log_2 x}{(x^2 + x) 2^x} & 9. y' &= \frac{1}{(x) - 6x^2} \\
 10. y &= \frac{e}{2} & 11. y &= 2ex - e = 0 & 12. (2x - 2)y + x - 1 = 0
 \end{aligned}$$

### SECTION 3.5

$$\begin{aligned}
 1. \frac{dy}{dx} &= 3x^2 - 3x + 5)^2 (2x - 3) & 2. f'(x) &= -2215 - 4x^2 \\
 3. g'(x) &= -16x^2 + 2x^2 - 1)^{-4} & 4. \frac{dy}{dx} &= -(5x^2 - x^4)^{-3} (10x^2 - 4x^3) \\
 5. \frac{dy}{dx} &= -12x(3x^2 - 8)^{-2} - 3x^2 + 3)^{-2} + 16x(3x^2 - 8)^{-2} (-4x^2 - 1)^{-1} \\
 6. f'(x) &= \frac{2x(x^3 - 3x - 1)}{(x^2 - 1)^2} & 7. \frac{dy}{dx} &= \frac{8x - 6}{(x + 2)^2} \\
 8. g'(x) &= \frac{-12x(2x^2 + 2x + 1) - 2x + 1}{(2x^2 + 1)^2} & 9. y' &= \frac{-1}{\sqrt{1 - 2x}} & 10. x' &= \frac{1 - 4x - 2x^2}{2\sqrt{1 - 2x^2 - 4x^3}} \\
 11. h(x) &= \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 - 1}} - 2x\sqrt{x^4 - 1} & 12. g'(x) &= \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

$$13. y' = \frac{2\sqrt{3x^2-1}}{3\sqrt{(2x+1)^2}} \cdot \frac{3x\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x^2-1}} \quad 14. x' = -\frac{(1-3x^2)^{1/2}}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1})^2} - \frac{(3x(1-3x^2))}{(\sqrt{x+1})^2}$$

$$15. h'(t) = \frac{3-t}{2(1-t)^{3/2}} \quad 16. z' = \frac{-2t}{2(1-t^2)^{3/2}} \quad 17. z' = \frac{u^2}{\sqrt{(u+u^2)^2}}$$

$$18. f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(b^2-x^2)^2}}$$

$$19. y' = \frac{-2}{\sqrt{1+x}\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$$

$$20. f'(x) = \frac{3x^2 - 2(a+b+c)x + ab+ac+bc}{2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

$$21. y' = \frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}$$

$$22. y' = \frac{1+2\sqrt{x}+2\sqrt{x+\sqrt{x}}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

$$23. y' = 4\sec^2 4x$$

$$24. y' = -\operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}$$

$$25. u' = -3x^2 \sec(x^3)$$

$$26. v' = -3 \sec v \tan^2 v$$

$$27. y' = 4x^3 \sec^2(x^4) + 4 \tan^2 x \sec^2 x$$

$$28. z' = -\frac{2}{2\sqrt{x}} \sec \sqrt{x}$$

$$29. u' = -\frac{\sec x}{2\sqrt{\cos x}}$$

$$30. y' = -\frac{\sec \sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\cos \sqrt{x}}}$$

$$31. y' = \frac{\sec^3 3x}{(2\sec 3x)^{2/3}}$$

$$32. y' = -\frac{2x \operatorname{cosec}^2 \sqrt[3]{1-x^2}}{3(1+x^2)^{2/3}}$$

$$33. y' = -\frac{2 \tan x}{\sqrt{\sec x}}$$

$$34. y' = \frac{2}{x^3} \operatorname{cosec} \frac{1}{x^3} \sec \frac{1}{x^3}$$

$$35. y' = \frac{-3}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \sec^2 \left[ \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right] \cos \left[ \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right]$$

$$36. y' = \frac{2 \sec^2 x}{(\sec^3 x + 1)^{2/3}}$$

$$37. y' = \frac{\cos x}{(1-\sec x)^2} \sqrt{\frac{1-\sec x}{1+\sec x}}$$

$$38. y' = \frac{(1-x^2) \operatorname{cosec}^2(x + \frac{1}{x})}{2x^2 \sqrt{1+\operatorname{cosec}(x + \frac{1}{x})}}$$

$$39. y' = \frac{-\operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}}{2 \left( 1 - \sec^2 \frac{x}{2} \right)^{3/2}}$$

$$40. y' = \frac{(a-b) \sec 2x}{2\sqrt{a \sec^2 x + b \operatorname{cosec}^2 x}}$$

$$41. y' = \sec 2x \operatorname{cosec} 2x$$

$$42. y' = 2x \sec x^2 \operatorname{cosec} (x^2)$$

$$43. y' = -4 \sec 4x \sec (2 \sec 4x)$$

$$44. y' = \sec x \operatorname{cosec} x \sec (2 \sec x)$$



$$45. y' = \sin x \sin(2\cos x) + \cos x \sin(2\sin x)$$

$$46. y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \sec^2 \sqrt{\sin x} \cos(\tan \sqrt{\sin x})$$

$$47. y' = \sin 2x \sec^2(\sin^2 x)$$

$$48. y' = -6x e^{-3x^2+1}$$

$$49. y' = \frac{\ln 2}{2\sqrt{x}} 2^{\sqrt{x}}$$

$$50. y' = x^{n-1} a^{-x^2} (n - 2x^2 \ln a)$$

$$51. y' = \frac{\ln 3}{t^2} \operatorname{cosec}^2(1/t) 3^{\cot(1/t)}$$

$$52. y' = (\ln 2)(\ln 3) \sin 2x 3^{\sin^2 x} 2^{\cos^2 x}$$

$$53. y' = \frac{1}{2(\ln 5)x \sqrt{\log_5 x}}$$

$$54. y' = \frac{1}{x} - 1$$

$$55. y' = \frac{1-2t \ln t}{t e^{2t}}$$

$$56. y' = \frac{8e^{4x}}{e^{8x} - 1}$$

$$57. y' = e^{x \ln x} (1 + \ln x)$$

$$58. y' = \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}$$

$$59. y' = -\frac{6}{5(x^2-1)}$$

$$60. y' = \frac{3}{x} + \cot x$$

$$61. y' = -\frac{1}{x^2} \tan \frac{x-1}{x}$$

$$62. G'(2) = 20$$

$$63. F'(0) = -30$$

$$64. (f \circ g)'(x) = -\frac{3(3x^2+10x+3)}{2(x+1)^4}$$

$$65. h'(x) = [3u^2 - 4u](2) = 6(2x-1)^2 - 8(2x-1) = 24x^2 - 40x + 14$$

$$66. h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{v}} (6x^2) = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-4}}$$

$$67. h'(x) = 5t^4 \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{-5(1-2\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}$$

$$68. h'(x) = \frac{-2bc}{(b+cx)^2}$$

$$69. h'(x) = \left(-\frac{1}{v^2}\right) \left(\frac{-ax}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = \frac{x}{a(a^2-x^2)^{3/2}}$$

$$70. \frac{dy}{dx} = (9u^2 - 16u^3)(2x) = 18x(x^2-1)^2 - 32x(x^2-1)^3$$

$$71. \frac{dy}{dx} = 5v^4(2b) = 10b(3a+2bx)^4$$

$$72. \frac{dy}{dx} = 4t^3 \left(\frac{a}{c}\right) = \frac{4a(ax+b)^3}{c^4}$$

$$73. \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2v^{3/2}} (6x) = \frac{-3x}{(3x^2-1)^{3/2}}$$

$$75. y = \frac{3}{4}, x = 0$$

$$74. 12x - y + 11 = 0, x - 12y + 13 = 0$$

$$76. 7x - 18y - 13 = 0, 54x + 21y - 47 = 0$$

$$77. x - 12y - 17 = 0, 12x + y + 30 = 0$$

$$78. 8x - y - 3 = 0, 2x + 16y - 17 = 0$$

$$79. y + 4x - 1 = 0, 16y - 4x + 7 = 0$$

$$80. y - 12x - 17 = 0, 12y + x - 86 = 0$$

81.  $6y + 15x - 5\pi + 3\sqrt{3} = 0$ ,  $30y - 12x + 4\pi + 15\sqrt{3} = 0$

82. En (1,0),  $y - 2x + 2 = 0$  En (2,0):  $y + x - 2 = 0$  En (3,0)  $y - 2x + 6 = 0$

83. (0, 0), (4, 0) y (2, 16) 84.  $2y - x - 4 = 0$ ,  $2y - x + 4 = 0$ . Son paralelas.

85.  $y + x = 0$ ,  $9y + x = 0$

86.  $y - 5x + 2 = 0$  87.  $2y - x - 2\ln 2 = 0$

## CAPITULO 4

## SECCION 4.1

1.  $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x$  2.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x}$  3.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}$  4.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1+2xy^2-3y^2}{6xy-2x^2y}$

5.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1+2x^2}{2x^2y}$  6.  $\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2-y)y^2}{1+xy^2}$  7.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3-2xy^2}{y^3-3xy^2+2x^2y-1}$

8.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 3x(x-y)^2$  9.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  10.  $\frac{dy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2y}$  11.  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

12.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x-ay}{ax-y}$  13.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$  14.  $\frac{dy}{dx} = \frac{6\sqrt{y}\sqrt[3]{y^2}}{2\sqrt{y}+3\sqrt[3]{y^2}}$  15.  $\frac{dy}{dx} = -1$

16.  $y' = \frac{y}{\sec^2 y - x} = \frac{y \cos^2 y}{1 - x \cos^2 y}$  17.  $y' = -\frac{y}{x}$  18.  $y' = \frac{\sin(x-y) + y \cos x}{\sin(x-y) - \sin x}$

19.  $y' = \frac{e^y}{1-xe^y} = \frac{e^y}{2-y}$  20.  $y' = \frac{e^{x+1}}{e^y + ye^y} = \frac{1}{1+y} e^{x-y+1}$

21.  $y' = 2^{x-y} \frac{2^y-1}{1-2^x}$  22.  $y' = \frac{1}{2(1+\ln y)}$  23.  $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$

24. b.  $(f^{-1})'(3) = -\frac{1}{4}$  c.  $y+4x = 7$  d.  $4y+x = 7$

25. b.  $(g^{-1})'(2) = \frac{1}{10}$  c.  $y-10x = -8$  d.  $10y-x = 8$

26. b.  $(h^{-1})'(0) = 1$  c.  $y = x$  d.  $y = x$  27.  $x - y + 5 = 0$

28.  $5x - 6y + 9 = 0$  29.  $y - x = 0$  30.  $14x + 13y - 12 = 0$

31.  $9x + 20\sqrt{3}y - 75 = 0$ ,  $-9x + 20\sqrt{3}y + 75 = 0$

32.  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$  en (a, b) y  $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2$  en (a, -b) 33.  $9x + 13y - 40 = 0$

37.  $45^\circ$  en (1, 2) y en (3, -2) 38.  $0^\circ$  en (0, 0) y  $9^\circ 2'$  en (1, 1).

# SECCION 4.2

487

$$1. y' = x^{5/2} (1 + 3 \ln x)$$

$$3. y' = 2 \ln x \cdot x^{\ln x - 1}$$

$$5. y' = (\ln 2)(\ln 3) 3^x 2^{3^x}$$

$$7. y' = \sqrt{x} \left( \frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$$

$$8. y' = (x^2 + 1)^{\sin x} \left( \frac{2x \sin x}{x^2 + 1} + \cos x \ln(x^2 + 1) \right)$$

$$9. y' = (\sin x)^{\cos x} \left( \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x \right)$$

$$10. y' = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \left( \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$11. y' = \frac{x(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}} \left( \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{x}{x^2 + 1} \right)$$

$$12. y' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x(x^2 - 1)}{(x + 1)^2}} \left( \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2}{x + 1} \right)$$

# SECCION 4.3

$$1. y' = \frac{1}{\sqrt{81 - x^2}}$$

$$2. y' = \frac{3}{x \sqrt{x^2 - 9}}$$

$$3. y' = \frac{1}{2\sqrt{x} \sqrt{1-x}}$$

$$4. y' = \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$$

$$5. y' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$$6. y' = 2\sqrt{4 - x^2}$$

$$7. y' = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x}$$

$$8. y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \tan^2 x}}$$

$$9. y' = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

$$10. y' = -\frac{1}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}}$$

$$11. y' = 0$$

$$12. y' = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \operatorname{arccot}^{-1} x$$

$$13. y' = \frac{1}{x} \sqrt{4x - x^2}$$

$$14. y' = (x + y)^2$$

$$15. y' = \frac{y}{x} \left( \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

$$16. 12y + 2x - 6 - 3x = 0$$

$$17. 4y + 8x - 3x = 0$$



# SECCION 4.2

487

$$1. y' = x^{5/2} (1 + 3 \ln x)$$

$$3. y' = 2 \ln x \cdot x^{\ln x - 1}$$

$$5. y' = (\ln 2)(\ln 3) 2^x 3^x$$

$$7. y' = \sqrt{x} \left( \frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$$

$$8. y' = (x^2 + 1)^{\sin x} \left( \frac{2x \sin x}{x^2 + 1} + \cos x \ln(x^2 + 1) \right)$$

$$9. y' = (\sin x)^{\cos x} \left( \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x \right)$$

$$10. y' = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \left( \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$11. y' = \frac{x(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}} \left( \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{x}{x^2 + 1} \right)$$

$$12. y' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x(x^2 - 1)}{(x + 1)^2}} \left( \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2}{x + 1} \right)$$

# SECCION 4.3

$$1. y' = \frac{1}{\sqrt{81 - x^2}}$$

$$2. y' = \frac{3}{x \sqrt{x^2 - 9}}$$

$$3. y' = \frac{1}{2\sqrt{x} \sqrt{1-x}}$$

$$4. y' = \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$$

$$5. y' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$$6. y' = 2\sqrt{4 - x^2}$$

$$7. y' = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x}$$

$$8. y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \tan^2 x}}$$

$$9. y' = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

$$10. y' = -\frac{1}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}}$$

$$11. y' = 0$$

$$12. y' = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \operatorname{arccot}^{-1} x$$

$$13. y' = \frac{1}{x} \sqrt{4x - x^2}$$

$$14. y' = (x + y)^2$$

$$15. y' = \frac{y}{x} \left( \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

$$16. 12y + 2x - 6 - 3x = 0$$

$$17. 4y + 8x - 3x = 0$$

# SECTION 4.4

$$1. y'' = \frac{-b^2}{(b^2 - x^2)^{3/2}} \quad 2. y'' = \frac{2(1-x^2)}{3(1+x^2)^3} \quad 3. y'' = 2 \tan^{-1} x + \frac{2x}{1+x^2}$$

$$4. y'' = -\frac{x}{1-x^2} - \frac{\sec^{-1} x}{(1-x^2)^{3/2}} \quad 5. y'' = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{3/2}} \right) e^{\sqrt{x}}$$

$$6. y'' = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x \sec^{-1} x}{(1-x^2)^{3/2}} \quad 7. y'' = 20x^3 - 24x, \quad y''' = 60x^2 - 24$$

$$8. z'' = 14x^6 - 10x^4 - 1, \quad z''' = 84x^5 - 40x^3$$

$$9. f''(x) = 12(x-1)^2, \quad f'''(x) = 24(x-1)$$

$$10. g''(x) = 6(x^2+1)^2 + 24x^2(x^2+1), \quad g'''(x) = 120x^3 + 72x$$

$$11. y'' = \frac{-1}{4x^{3/2}}, \quad y''' = \frac{3}{8x^{5/2}} \quad 12. h''(x) = \frac{-4}{(2+x)^3}, \quad h'''(x) = \frac{12}{(2+x)^4}$$

$$13. y'' = -x \sin x + 2 \cos x, \quad y''' = -x \cos x - 3 \sin x$$

$$14. y'' = (4x^3 + 12x^2 + 6x)e^{2x}, \quad y''' = (8x^3 + 36x^2 + 36x + 6)e^{2x}$$

$$15. y'' = \frac{2}{x^3} \quad 16. y'' = \frac{-4a^2}{y^3} = \frac{-a}{xy} \quad 17. y'' = \frac{2x^4 + 2xy^3}{y^5} = \frac{2x}{y^5}$$

$$18. y'' = \frac{-2x^2}{9y^5} = \frac{-2}{9x^{4/3}} \quad 19. y'' = \frac{1}{2x^{3/2}} \quad 20. y'' = \frac{-b^4}{a^2 y^3}$$

$$24. y^{(n)} = n! \quad 25. y^{(n)} = 0 \quad 26. y^{(n)} = (n+1)!x \quad 27. y^{(n)} = n!a$$

$$28. y^{(n)} = n!a_n \quad 29. y^{(n)} = n!a^n \quad 30. y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \quad 31. y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$32. y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x-a)^{n+1}} \quad 33. y^{(n)} = a^n \cos(ax + n\frac{\pi}{2})$$

$$34. y^{(n)} = 2^{n-1} \sin \left[ 2x + (n-1)\frac{\pi}{2} \right] \quad 35. y^{(n)} = a^n e^{ax} \quad 36. y^{(n)} = (x+n)e^x$$

$$37. y^{(n)} = (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}, \quad n \geq 2 \quad 38. y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad 39. y''(1) = 40$$

$$40. y''(-1) = -\frac{11}{8} \quad 41. y''(1) = \frac{1}{2} \quad 42. y''(2) = -\frac{3}{2}$$

$$43. a. \text{ on } t = -2 \quad y = t = 4 \quad b. \text{ on } t = 1 \quad c. (-\infty, -2) \cup (4, \infty) \quad d. (-2, 4)$$

44. a. en  $t = 3$  b. en  $t = -3\sqrt[3]{2}$  c.  $(3, +\infty)$

45.  $a(-5) = -\frac{2}{3} \text{ m/seg}^2$ ,  $a(1) = \frac{2}{3} \text{ m/seg}^2$

d.  $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$

47.  $v(1) = -27 \text{ m/seg}$

48. a. 160 pies

b. 48 pies/seg

46.  $a(1/2) = 2 \text{ m/seg}^2$

d.  $t = 5 \text{ seg}$  e.  $v(5) = -112 \text{ pies/seg}$

50.  $v_0 = 117,6 \text{ m/seg}$

c.  $t = 1,5 \text{ seg}$

51. 156,8 m

### SECCION 4.5

1.  $y' = -\operatorname{cosech} x$

3.  $y' = x^{\tanh x} \left( \frac{\tanh x}{x} + \operatorname{sech}^2 x \ln x \right)$

2.  $y' = 2\cosh 2x e^{\sinh 2x}$

5.  $y' = e^{ax} [a \cosh bx + b \sinh bx]$

4.  $y' = \frac{1}{4} \operatorname{sech}^4 \frac{x}{2}$

6.  $y' = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}} = \frac{1}{2\sqrt{\cosh x + \sinh x}}$

7.  $y' = \frac{-2\operatorname{cosech}^{-1} x}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

8.  $y' = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + a^4}}$

9.  $y' = -\operatorname{cosec} x$

10.  $y' = \frac{2}{1-x^4}$

### SECCION 4.6

1. 2.100.000 litros/año

2. a. 200 habitantes por año b. 2%

3.  $3\pi \text{ m}^2/\text{seg}$

4. 1,5 m/min

5. -4,5 m/min

6. -2,8 Km/h

7. 16 m/min

8. 80 pies/min

9.  $(-1, -5)$

10.  $100\sqrt{3} \text{ cm}^2/\text{min}$

11. -15 cm/seg

12.  $-\frac{10}{\pi} \text{ pies/min}$ , -240 pies<sup>2</sup>/seg

14.  $-\frac{7}{2} \text{ m/min}$

15.  $\frac{80}{3} \text{ m/seg}$

16.  $\frac{1}{3\pi} \text{ m/min}$

17. 3 m./hora

18.  $\frac{8}{75} \text{ m/h}$

19. -0,9 m/h

20.  $-\frac{17}{\sqrt{10}} \approx -5,38 \text{ pies/seg}$

21.  $\frac{5\pi}{36} \approx 0,44 \text{ m/h}$

22.  $-\frac{6.600}{\sqrt{124}} \approx -592,7 \text{ Km/h}$

23. 2,33 m/seg

24.  $10\pi \text{ Km/min}$

25. -1.200 pies/seg

26. 64 pies/seg

27.  $\frac{14,3}{49} \approx 0,292 \text{ ohms/seg}$

28. b. 2 horas.

### SECCION 4.7

1. a.  $\Delta y = 2x dx + (dx)^2$

b.  $dy = 2x dx$

c.  $(dx)^2$



2. a.  $\Delta y = e^x (e^{\Delta x} - 1)$  b.  $dy = e^x dx$  c.  $e^x (e^{\Delta x} - 1 - dx)$

3. a.  $\Delta y = \ln(1 + \frac{\Delta x}{x})$  b.  $dy = \frac{dx}{x}$  c.  $\ln(1 + \frac{\Delta x}{x}) - \frac{dx}{x}$

4. a. 0,1791 b. 0,18 c. 0,0009

5. a. -0,2276278 b. -0,2302585 c. 0,0026307

10.  $dy = 6x e^{-3x^2} dx$  11.  $dy = -\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$  12.  $dy = \frac{2 dx}{3(x+1)^{4/3}(x-1)^{2/3}} dx$

13.  $dy = -\frac{x}{y} dx$  14.  $dy = \frac{2x + \sqrt{y/x}}{2y - \sqrt{x/y}} dx$  15.  $dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{x}} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{x} \right) dx$

17. 8,9444 18. 3,0092592 19. 6,0185 20. 2,005 21.  $\frac{\pi}{4} + 0,04 \approx 0,8254$

22. 0,07 23. 0,24 24. 0,86618 25. a. 86,4 cm b. 87,848 cm<sup>3</sup>

c. 28,8 cm<sup>2</sup> d. 29,04 cm<sup>2</sup> 26. 3 840  $\pi \approx 12063,71$  cm<sup>3</sup> 27. 2,5 %

28. a. 0,64  $\pi$  m<sup>3</sup> b. 0,75 % 29. a. 72/ $\pi \approx 22,92$  cm<sup>2</sup> b. 1/72  $\approx 0,01389$

c. 1296/ $\pi^2 \approx 131,312$  d. 1/48  $\approx 0,0208$  30. a.  $\pi/18 \approx 0,174533$  b. 0,504 %

31. a. \$ 27 200 b. \$ 432 c. 0,0159 d. 1,59 %

## CAPITULO 5

### SECCION 5.1

1. máx. =  $f(0) = 4$ , mín. = no tiene 2. máx. = no tiene, mín. =  $g(2) = -1$

3. máx. = no tiene, mín. =  $h(2) = h(-2) = 0$  4. máx. = no tiene, mín. = no tiene

5. máx. = no tiene, mín. = no tiene 6. máx. =  $g(4/3) = 3$ , mín. =  $g(3) = 1/2$

7. máx. =  $h(-4) = 6$ , mín. =  $\ln 1 = 0$  8. máx. =  $f(1) = 3$ , mín. =  $f(2) = 0$

9. 0, 2,  $\frac{8}{3}$  10.  $\pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$  11. 0, 2 12. Todos los reales

13. 1 14. 0,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{5\pi}{3}$  15. máx. =  $f(3) = \frac{3}{4}$ , mín. =  $f(1) = \frac{1}{2}$

16. máx. =  $f(1) = \frac{1}{2}$ , mín. =  $f(-1) = -\frac{1}{2}$  17. máx. =  $f(\pi/4) = 1 - \frac{\pi}{4}$ ,  
mín. =  $f(-\pi/4) = \frac{\pi}{4} - 1$

18. máx. =  $f(3) = 1$ , mín. =  $f(-5) = -3$

19. máx. =  $f(\pi/4) = \sqrt{2}$ , mín. =  $f(-\pi/2) = -1$  20. máx. =  $f(\pi/6) = f(5\pi/6) = 5/4$

21. -2    22. 1/2    23. 0    24. 1/2    25. 0    26. 1    27. -1  
 28. 1    29. 0    30. 0    31. 0    35.  $y=0$     36.  $y=0$   
 37.  $y=0$     38.  $y=2, y=-2$   
 39.  $y=1, y=-1$     40. No tiene    41.  $y=0$     42.  $x=-4, x=4, y=2$   
 43.  $x=1, y=2, y=-2$     44.  $x=-\sqrt{2}, x=\sqrt{2}, y=1, y=-1$

## SECCION 2.7

1. a    2.  $\frac{1}{a}$     3.  $\frac{1}{e}$     4. e    5. a - b    6. 1

## SECCION 2.8

1.  $y=x+1$     2.  $y=x$     3.  $y=\frac{1}{2}x-1$     4.  $y=2x+2$     5.  $y=x, y=-x$   
 6.  $y=x, y=-x$     7.  $y=2x-2, y=-2$  (horizontal)    8.  $y=-x+2$

## CAPITULO 3

## SECCION 3.1

1.  $f'(1)=0$     2.  $g'(3)=1$     3.  $h'(2)=3$     4.  $f'(2)f=4$     5.  $g'(-1)=-4$   
 6.  $h'(-2)=-\frac{3}{4}$     7.  $f'(-1)=-6$     8.  $g'(2)=\frac{3}{4}$     9.  $h'(-1)=3$     12.  $a=\frac{1}{3}, b=\frac{2}{3}$   
 13.  $f'(x)=0$     14.  $g'(x)=1$     15.  $h'(x)=3$     16.  $f'(x)=4$ ;    17.  $g'(x)=4x$   
 18.  $h'(x)=-\frac{3}{x^2}$     19.  $f'(x)=6x$     20.  $g'(x)=1-\frac{1}{x^2}$     21.  $h'(x)=3x^2$   
 22. a.  $f'(1)=5$     b.  $5x-y-3=0$     c.  $x+5y-11=0$     23. a.  $g'(12)=\frac{1}{6}$   
       b.  $x-6y+6=0$     c.  $6x+y-75=0$     24. a.  $h'(x)=x-1$     b. (4, 11)  
       c.  $3x-y-1=0$     25. a.  $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$     b.  $2x-4y+5=0$

## SECCION 3.2

1.  $y'=8x-6$     2.  $y'=-\frac{1}{3}+x^5$     3.  $y'=2x^3-0.6x+2.5$

$$\max = f(0) = f(\pi/2) = 1$$

$$21. \max = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071067$$

$$\min = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0.7071067$$

$$22. \max = f(e^{1/2}) = \frac{1}{2e} = 0.1839397$$

$$\min = f(1) = 0$$

## SECCION 5.2

$$1. c = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad 2. c_1 = \frac{\pi}{4}, c_2 = \frac{5\pi}{4} \quad 3. c = 3.2 \quad 4. c = 1 \quad 5. c = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad 6. c = \sqrt{2}$$

$$7. c = 1 + \frac{8}{9}\sqrt{3} \quad 8. c = \frac{1 - \sqrt{1 - \ln^2 2}}{\ln 2} = 0.4028 \quad 9. c = \tan^{-1}(2 \ln 2) = 0.5885$$

$$10. c_1 = \sqrt{\frac{4 - \pi}{\pi}} = 0.5227, c_2 = \sqrt{\frac{4 - \pi}{\pi}} = 0.5227$$

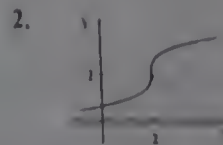
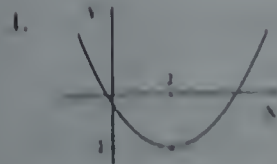
$$20. f(3) = 20$$

$$30. c = \pi/4$$

$$31. c = \frac{e}{e-1} = 1.58198$$

$$32. c = 1/2$$

## SECCION 5.3



3. a.  $-1, 0, 2, 4$  b. Decreciente  $(-\infty, -1]$ ,  $[0, 2]$  y  $[2, 4]$  Creciente  $[-1, 0]$ ,  $[4, +\infty)$  c. Mínimos locales en  $-1$  y  $4$ . Máximo local en  $0$

4. a.  $1, 2$  y  $3$  b. Cóncava hacia arriba en  $(-\infty, 1)$  y  $(3, +\infty)$ . Cóncava hacia abajo en  $(1, 2)$  y  $(2, 3)$  c.  $1$  y  $3$

5. a.  $-2$  b. Creciente en  $(-\infty, -2]$ , decreciente en  $[-2, +\infty)$  c.  $f(-2) = 1$  es máxima local. d. No tiene e. Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, +\infty)$  f. No tiene

6. a.  $-1, 1$  b. Creciente en  $(-\infty, -1]$  y en  $[1, +\infty)$ , decreciente en  $[-1, 1]$  c.  $f(-1) = 3$  es máximo local y  $f(1) = -1$  es mínimo local d.  $0$  e. Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, 0)$  y cóncava hacia arriba en  $(0, +\infty)$  f.  $(0, f(0)) = (0, 1)$

7. a.  $-3, 1$  b. Creciente en  $(-\infty, -3]$  y en  $[1, +\infty)$ , decreciente en  $[-3, 1]$  c.  $f(-3) = 39$  es máximo local y  $f(1) = 7$  es mínimo local d.  $-1$  e. Cóncava hacia arriba en  $(-\infty, -1)$ , cóncava hacia abajo en  $(-1, +\infty)$  f.  $(-1, f(-1)) = (-1, 20)$

8. a.  $-1, 0, 1$  b. Creciente en  $[-1, 0]$  y en  $[1, +\infty)$ , decreciente en  $(0, 1]$  c.  $f(-1) = 3$  y  $f(1) = 3$  son mínimos locales,  $f(0) = 4$  es máximo local d.  $\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3$  e. Cóncava hacia arriba en  $(-\infty, -\sqrt{3}/3)$  y en  $(\sqrt{3}/3, +\infty)$ , cóncava hacia abajo en  $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$  f.  $(-\sqrt{3}/3, f(-\sqrt{3}/3)) = (-\sqrt{3}/3, 11/3)$  y  $(\sqrt{3}/3, f(\sqrt{3}/3)) = (\sqrt{3}/3, 11/3)$



9. a.  $-2, -1/2, 3$  b. Creciente en  $[-2, -1/2]$  y en  $[1, +\infty)$ , decreciente en  $(-\infty, -2]$  y en  $[-1/2, 1]$  c.  $f(-2) = -3$  y  $f(1) = -3$  son máximos locales,  $f(-1/2) = 3$  es mínimo local d.  $-1/2 - \sqrt{3}/2, -1/2 + \sqrt{3}/2$  e. Cóncava hacia arriba en  $(-\infty, -1/2 - \sqrt{3}/2)$  y en  $(-1/2 + \sqrt{3}/2, +\infty)$ , cóncava hacia abajo en  $(-1/2 - \sqrt{3}/2, -1/2 + \sqrt{3}/2)$

f.  $(-1/2 - \sqrt{3}/2, f(-1/2 - \sqrt{3}/2)) = (-1/2 - \sqrt{3}/2, -0.73)$  y

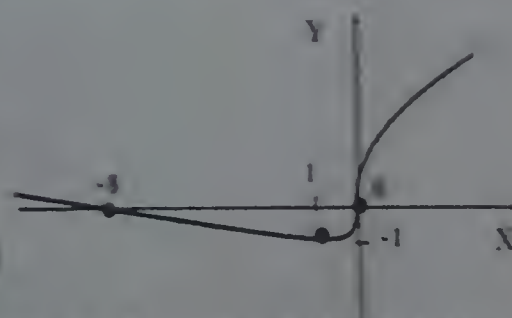
$(-1/2 + \sqrt{3}/2, f(-1/2 + \sqrt{3}/2)) = (-1/2 + \sqrt{3}/2, -0.73)$

10. a. No tiene b. Decreciente en  $(-\infty, 2]$  y en  $(2, +\infty)$  c. No tiene d. No tiene e. Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, 2]$  y cóncava hacia arriba en  $(2, +\infty)$  f. No tiene

11. a. 3 b. Creciente en  $[2, +\infty)$  y decreciente en  $[0, 2]$  c.  $f(2) = -4\sqrt{2}$  mínimo local d. No tiene e. Cóncava hacia arriba en  $(0, +\infty)$  f. No tiene

12. a.  $-1, 0$  b. Creciente  $[-1, +\infty)$  c.  $f(-1) = -1$  es mínimo local d.  $0, -8$  e. Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, -8]$  y en  $(0, +\infty)$ , cóncava hacia arriba en  $(-8, 0)$

f.  $(-8, f(-8)) = (-8, 0)$  y  $(0, f(0)) = (0, 0)$

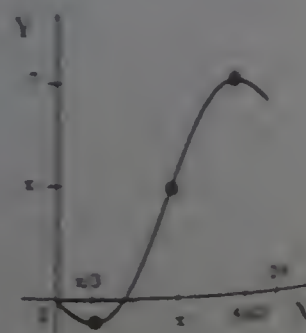


13. a. 0 b. Creciente en  $(-\infty, +\infty)$  c. No tiene d. 0 e. Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, 0)$ , cóncava hacia arriba en  $(0, +\infty)$  f.  $(0, 0)$

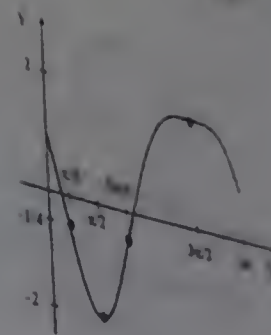
14. a. 1 b. Decreciente en  $(0, 1]$  y creciente en  $[1, +\infty)$  c.  $h(1) = 1$  es mínimo local d. No tiene e. Cóncava hacia arriba en  $(0, +\infty)$  f. No tiene

15. a. No tiene b. Creciente en  $(-\infty, +\infty)$  c. No tiene d. 0 e. Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, 0)$  y cóncava hacia arriba en  $(0, +\infty)$  f.  $(0, 0)$

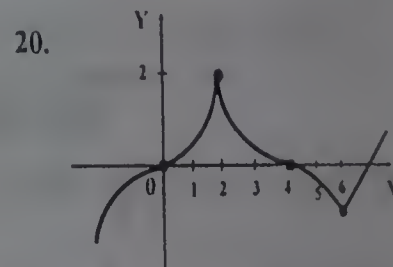
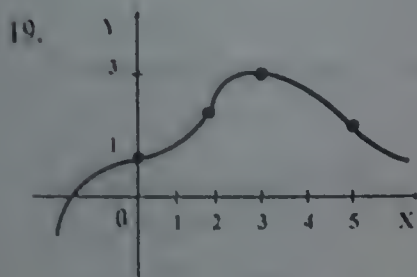
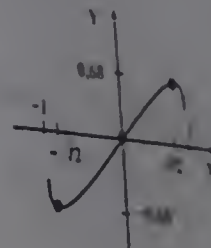
16. a.  $\pi/3, 5\pi/3$  b. Decreciente en  $[0, \pi/3]$  y en  $[5\pi/3, 2\pi]$ , decreciente en  $[\pi/3, 5\pi/3]$  c.  $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3} \approx -0.7$  es mínimo local,  $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3} \approx 7$  es máximo local d.  $\pi$  e. Cóncava hacia arriba en  $(0, \pi)$ , cóncava hacia abajo en  $(\pi, 2\pi)$  f.  $(\pi, f(\pi)) = (\pi, \pi)$



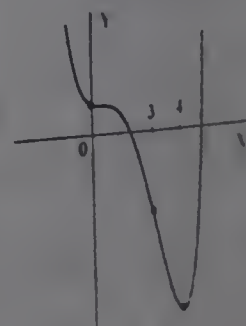
17. a.  $\pi/2, 3\pi/2$  b. Decreciente en  $[0, \pi/2]$  y en  $[3\pi/2, 2\pi]$  c.  $g(\pi/2) = -2$  es mínimo local,  $g(3\pi/2) = 2$  es máximo local d.  $\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$  e. Cóncava hacia abajo en  $(0, \pi/6)$ ,  $(5\pi/6, 3\pi/2)$  y en  $(3\pi/2, 2\pi)$ , cóncava hacia arriba en  $(\pi/6, 5\pi/6)$  f.  $(\pi/6, g(\pi/6) = (\pi/6, -1/4)$ ,  $(5\pi/6, g(5\pi/6) = (\pi/6, -1/4)$ ,



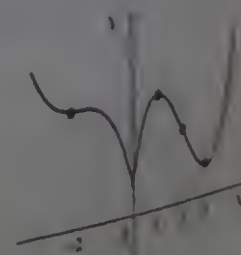
18. a.  $-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2$  b. Decreciente en  $[-1, -\sqrt{3}/2]$  y en  $[\sqrt{3}/2, 1]$ , creciente en  $[-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2]$  c.  $h(-\sqrt{3}/2) = -0.68$  es mínimo local,  $h(\sqrt{3}/2) = 0.68$  es máximo local, d. 0 e. Cóncavo hacia arriba en  $(-1, 0)$  y cóncavo hacia abajo en  $(0, 1)$  f.  $(0, 0)$ .

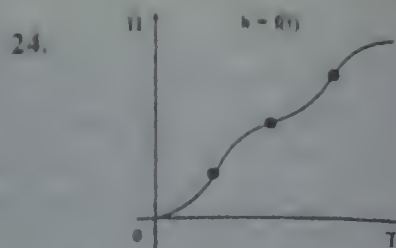
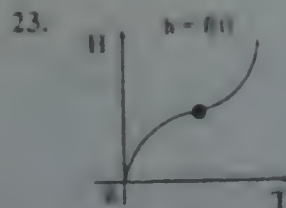


21. a. 0 y 4  
b. Decreciente en  $(-\infty, 0]$  y en  $[0, 4]$   
Creciente en  $[4, +\infty)$   
c. Mínimo local en 4.  
d. 0 y 3  
e. Cóncava hacia arriba en  $(-\infty, 0)$  y  $(3, +\infty)$   
Cóncava hacia abajo en  $(0, 3)$   
f. 0 y 3



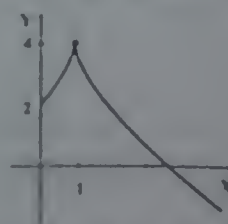
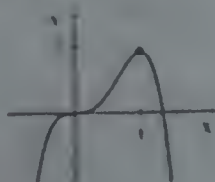
22. a. -2, 0, 1 y 3  
b. Decreciente en  $(-\infty, -2]$ ,  $[-2, 0]$  y  $[1, 3]$   
Creciente en  $[0, 1]$  y  $[3, +\infty)$   
c. Mínimo local en 0 y 3. Máximo local en 1  
d. 0 y 3  
e. Cóncava hacia arriba en  $(-\infty, -2)$  y  $(2, +\infty)$   
Cóncava hacia abajo en  $(-2, 0)$  y  $(0, 2)$   
f. -2 y 2





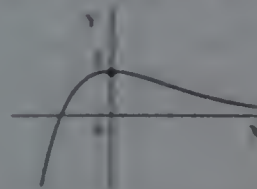
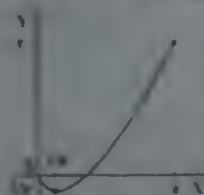
25. Max:  $f(1) = 1$ . Min: No tiene

26. Max:  $f(1) = 4$ . Min: No tiene



27. Max:  $f(c) = c$ . Min:  $f(1/c) = 1/c$

28. Max:  $f(1) = 4$ . Min: No

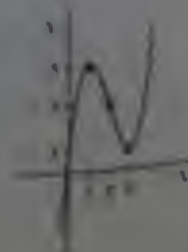


### SECCION 5.4

1. 0   2.  $-\frac{1}{2}$    3. -1   4.  $\frac{1}{2}$    5.  $\frac{1}{2}$    6. 2   7.  $\frac{\pi^2}{2}$    8. 2   9. 0
10. 1   11.  $\frac{\ln^2 10 - \ln^2 5}{2}$    12. 0   13. 1   14.  $\frac{1}{2}$    15.  $-\frac{1}{4}$    16.  $\frac{1}{12}$
17.  $\frac{1}{2}$    18. -1   19.  $\frac{1}{2}$    20.  $\frac{1}{3}$    21.  $\frac{1}{8}$    22. 0   23. 1   24.  $\frac{2}{3}$
25.  $-\frac{49}{8}$    26. 1   27. 1   28.  $\frac{1}{8}$    29.  $e^{-1}$    30. 1   31. 1   32. 1
33. 1   34.  $\frac{1}{e}$    35. 1   36.  $\frac{2}{3}$    37.  $\pi$    38.  $e^2$    39.  $\frac{1}{2}$    40.  $e^2$
41. 0   42. -8   43. 0

### SECCION 5.5

1. A. R   B. Ninguna  
 C. En Y: (0,1). En X: un máximo en (0,104, 0)  
 D. No se aplica   E. una local =  $f(1) = 5$ , otra local =  $f(3) = 1$   
 F. Conc. abajo en  $(-\infty, 2]$ ; Conc. arriba en  $[2, \infty)$   
 P. inflexión: (2, 3)

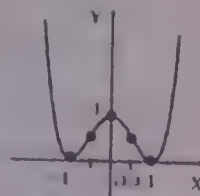




2. A. R B. Ninguna C.  $(0,1), (-1,0), (1,0)$

D. No asíntotas E. max local =  $f(0) = 1$ , min local =  $f(-1) = 0$   
 min local =  $f(1) = 0$  E. Conc. arriba en  $(-\infty, -\sqrt{3}/3]$  y en  
 $[\sqrt{3}/3, +\infty)$ . Conc. abajo en  $[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$ .

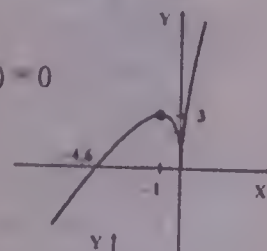
P. inflexión:  $(-\sqrt{3}/3, 4/9)$  y  $(\sqrt{3}/3, 4/9)$



3. A. R B. Ninguna C.  $(0,0), (-4,6,0), (0,0)$

D. No asíntotas E. max local =  $f(-1) = 3$ , min local =  $f(0) = 0$   
 F. Conc. abajo en  $(-\infty, 0]$  y en  $[0, +\infty)$ .

P. inflexión: No hay.



4. A. R B. Simetría resp. al origen C.  $(0,0)$

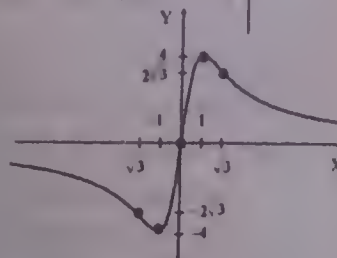
D. Asíntotas:  $y = 0$  E.  $f'(x) = -\frac{8(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

Min local =  $f(-1) = -4$ , Max local =  $f(1) = 4$

E.  $f''(x) = \frac{16(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ . Conc. abajo en  $(-\infty, -\sqrt{3}]$

y en  $[0, \sqrt{3}]$ . Conc. arriba en  $[-\sqrt{3}, 0]$  y en  $[\sqrt{3}, +\infty)$ .

P. inflexión:  $(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ ,  $(0,0)$ ,  $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$



5. A.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

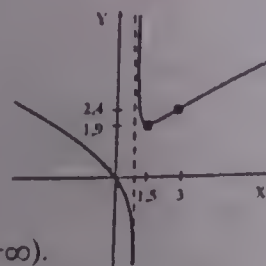
B. Ninguna simetría C. Intersección con los ejes  $(0,0)$

D. Continua en  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Asíntota vertical:  $x = 1$

E.  $f'(x) = \frac{2x-3}{3(x-1)^{4/3}}$  Min. local:  $f(3/2) = 3/\sqrt[3]{4} \approx 1,9$

F.  $f''(x) = \frac{2(3-x)}{9(x-1)^{7/3}}$ . Conc. abajo en  $(-\infty, 1)$  y en  $[3, +\infty)$ .



Conc. arriba en  $(1, 3]$ . P. De inflexión:  $(3, 3\sqrt[3]{2}) \approx (3, 2,4)$

6. A.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  B. Simetría respecto al eje Y.

C. Intersección con los ejes:  $(0,0)$

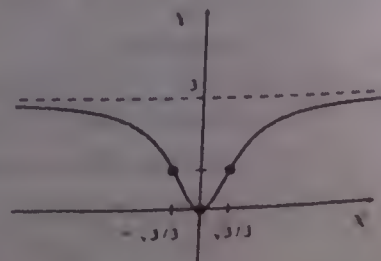
D. Continua en todo  $\mathbb{R}$

No hay asíntotas verticales.

Asíntota horizontal:  $y = 3$

E.  $f'(x) = \frac{8x}{(x^2+1)^2}$ . Min local =  $f(0) = 0$

F.  $f''(x) = \frac{8(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$ . Conc. abajo en  $(-\infty, -\sqrt{3}/3)$  y en  $(\sqrt{3}/3, +\infty)$



Conc arriba en  $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$

P de inflexión  $(-\sqrt{3}/3, 3/4)$  y  $(\sqrt{3}/3, 3/4)$

7. A.  $\text{Dom}(f) = [-\pi, \pi]$  B. Ninguna simetría

C. Intersecciones: Eje Y:  $(0, \pi)$

Eje X:  $(-\pi/3, 0), (2\pi/3, 0)$

D. Continua en  $[-\pi, \pi]$  Sin asíntotas

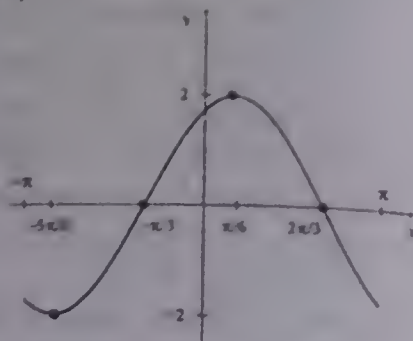
E. Min local:  $f(-5\pi/6) = -2$

Max local:  $f(\pi/6) = 2$

F. Conc arriba en  $[-\pi, -\pi/3]$  y  $[2\pi/3, \pi]$

Conc abajo en  $[-\pi/3, 2\pi/3]$

P de inflexión:  $(-\pi/3, 0)$  y  $(2\pi/3, 0)$



8. A.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$  B. Ninguna simetría

C. Intersecciones: Eje Y:  $(0, -3)$

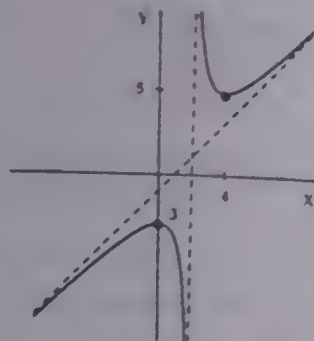
D. Continua en  $\mathbb{R} - \{2\}$

Asíntota vertical:  $x = 2$  Asíntota oblicua:  $y = x - 1$

E. Max local:  $f(0) = -3$  Min local:  $f(4) = 5$

F. Conc abajo en  $(-\infty, 2)$  Conc. arriba:  $(2, +\infty)$

No hay P. de inflexión



9. A.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$  B. Ninguna simetría

C. Intersecciones: No corta al Eje Y.

Eje X:  $(1, 0)$

D. Cont. en  $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical:  $x = 0$

Asíntota oblicua:  $y = x - 3$

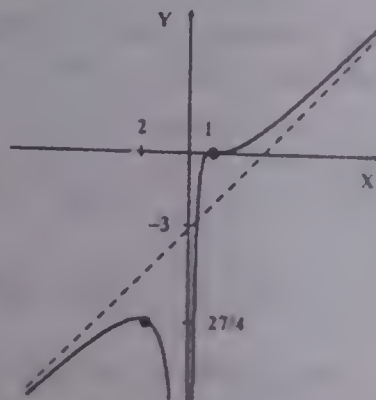
$$E. f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$$

Max local:  $f(-2) = -27/4$  Min local:  $f(1) = 0$

F. Conc. abajo en  $(-\infty, 0)$  y en  $(0, 1)$

Conc. arriba en  $(1, +\infty)$

P de inflexión:  $(1, 0)$



10. A.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  B. Ninguna simetría

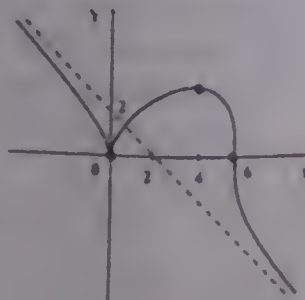
C. Intersecciones: Eje Y:  $(0, 0)$  Eje X:  $(0, 0), (6, 0)$

D. Continua en  $\mathbb{R}$  Asíntota oblicua:  $y = -x + 2$

$$E. f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \quad \text{Min local: } f(0) = 0$$

Max local:  $f(4) = 2\sqrt[3]{4} \approx 3.17$

F. Conc. abajo en  $(-\infty, 0)$  y en  $[2, 6]$



Conc arriba en  $(6, +\infty)$ . P. de inflexión  $(6, 0)$

11. A.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$  B. Simetría respecto al origen  
C. No interseca a los ejes D. Conc en  $\mathbb{R} - \{0\}$   
D. Asintota vertical  $x = 0$  Asintota oblicua  $y = x$   
E.  $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{1/x^2} (x + \sqrt{2}) (x - \sqrt{2})$

Max. local:  $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} e^{1/2} \approx -2,33$

Min. local:  $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} e^{1/2} \approx 2,33$

- F. Conc. abajo en  $(-\infty, 0)$ . Conc. arriba en  $(0, +\infty)$   
No hay p. de inflexión



## SECCION 5.6

1. largo = ancho = 18 cm.  
3. 100 m., 200 m. 4. 16 cm. 5. 3 cm. 6. 1 dm 7. 1 dm  
8. largo = ancho = altura = 40 cm. 9. 140 m,  $\frac{280}{\pi}$  m 10.  $\frac{40(\pi/2)}{\pi}$  rad  
11. base =  $\frac{14}{4+\pi}$ , altura rectángulo =  $\frac{7}{4+\pi}$  12. base =  $\frac{36}{12-\sqrt{3}}$  = 3,61  
altura rectángulo =  $\frac{54-9\sqrt{3}}{12-\sqrt{3}} \approx 3,74$  13. Entre B y C a 1,6 Km de B  
14. P coincide con C 15. Remar hasta P entre F y B a 3,6 Km de F  
16. Remar hasta la bodega 17. 70 habitaciones, \$ 75 18. 88 plantas  
19. base =  $\sqrt{2} r$ , altura =  $\frac{\sqrt{2}}{2} r$  20.  $\frac{\pi}{3}$  21. 4, 4 22.  $a = 2\sqrt{3}$ ,  $h = 2\sqrt{6}$   
23. a)  $\frac{12\pi}{4+\pi} \approx 5,28$  para la circunferencia b) 12 para la circunferencia (en km)  
cuadrado) 24. base = 6 cm., altura =  $3\sqrt{3}$  cm 27.  $3\sqrt{3}$   
28. radio del cilin. =  $\frac{\sqrt{2}}{2} r$ , altura =  $\sqrt{2} r$  29. radio cono =  $\frac{2\sqrt{2}}{3} r$ , altura =  $\frac{4}{3}$   
30. radio del cono =  $\frac{2\sqrt{2}}{3} r$ , altura =  $\frac{4}{3} r$  32. a.  $\theta = 2,5$  b.  $A = 171,4$  m<sup>2</sup>  
33. 60 m., 120 m. 34. 24 m, 36 m. 35. a. 3 dm, 6 dm, 4 dm  
36. 18 cm, 27 cm 37.  $8\sqrt{6}$  m,  $10\sqrt{6}$  m  
38. radio = 1 dm, altura = 2 dm. 39. radio = altura =  $\sqrt{2}$  dm



40. radio = altura = 6 cm.    41. 80 Km/h.    43. a.  $x = 16$  cm.    b.  $x = 16$  cm.  
 44. radio =  $4\sqrt{6}$  cm., altura =  $8\sqrt{3}$  cm.    45.  $\sqrt[3]{13^2} \approx 46,87$     46. 8 m.

## SECCION 5.7

1. 1,179509    2. 0,103803    3. 0,739085    4. 0,835123    5. 0,567143  
 6. 1,763223    7. 1,377337    8. 3,096639    9. 2,028758    10. -2,331122  
 11. 0,377677    12. 2,668402    13. 1,1224620    14. 3,645174    15. 1,146470  
 16. a.  $P_0 = (1,165, 1,357)$     b. 1,594    17.  $g(2,058) = 5,586$

## APENDICES

## APENDICE A

1.  $(-\infty, 4)$     2.  $(-\infty, -32/3)$     3.  $(17/5, +\infty)$     4.  $(-\infty, -43/37]$   
 5.  $(17/5, 19]$     6.  $(-19, -9)$     7.  $(-2, 3)$     8.  $(-1, 1)$   
 9.  $(-\infty, -1 - \sqrt{21}] \cup [-1 + \sqrt{21}, +\infty)$     10.  $(-\infty, -3) \cup (1/2, +\infty)$   
 11.  $(-\infty, 1/3) \cup (2/3, +\infty)$     12.  $(3, 4)$     13.  $[-3, -2] \cup [1, +\infty)$   
 14.  $(-2, 2]$     15.  $[-10/3, 0)$     16.  $[1/3, 1)$     17.  $(-\infty, -2] \cup (0, 2]$   
 18.  $(-\infty, -1 - \sqrt{3}] \cup (-1, -1 + \sqrt{3}]$     19.  $(-3, -1) \cup (0, +\infty)$   
 20.  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$     21.  $(2 - 2\sqrt{3}, 0) \cup (3, 2 + 2\sqrt{3})$

## APENDICE B

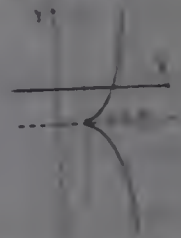
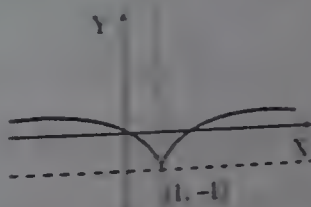
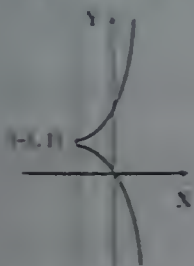
1. 9, 1    2. -4/3, 2    3. 7/2    4. (1, 7)    5.  $(-16/3, 14/3)$     6.  $(-3/2, 9/2)$   
 7.  $[-2, 2/3]$     8.  $(-\infty, -3/5] \cup [-1/5, +\infty)$     9.  $(-\infty, -1) \cup (-1/2, +\infty)$   
 10.  $(-\infty, -5/2] \cup [25/2, +\infty)$     11.  $[-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty)$   
 12.  $[-4, -1) \cup (1, 4)$     13.  $(2, 4) - \{3\}$     14.  $(1/2, +\infty)$     15.  $[2/3, 4]$   
 16.  $[-1, 2] - \{1/2\}$     17.  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$     18.  $[-2, 2]$     19.  $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$   
 20.  $(-\infty, -7] \cup [1/3, +\infty)$     21.  $M = 43$     22.  $M = 9$     23.  $M = 10$

# APENDICE C

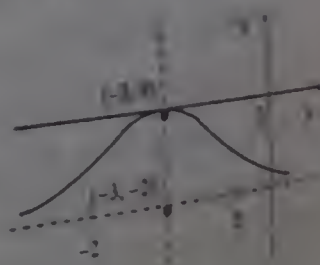
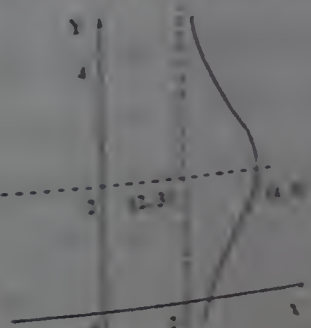
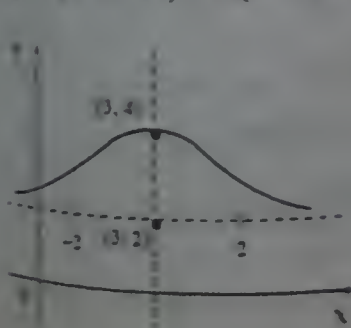
1. 4
2. -4
3. raíces: 1, -2, -1;  $(x-1)(x+2)(x+1)=0$
4. raíces:  $1, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$ ;  $(x-1)(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})=0$
5. raíces:  $1, -3/2, 1/2$ ;  $4(x-1)(x+3/2)(x-1/2)=0$
6. raíces:  $-2, 3/2+\sqrt{7}/2, 3/2-\sqrt{7}/2$ ;  $20x^3-20x^2+3\sqrt{7}x-3\sqrt{7}=0$
7. raíces:  $-1, 2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ ;  $(x+1)(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$
8. raíces:  $1, -1, -2, 1/3$ ;  $3(x-1)(x+1)(x+2)(x-1/3)=0$
9. raíces:  $-1, -2, 1, 2, 3$ ;  $(x+1)(x-2)(x-1)(x-2)(x-3)=0$
10. raíces:  $-1, -2, -3, 3$ ;  $(x-1)^2(x-2)(x+3)(x-3)=0$

# APENDICE D

1.  $\sqrt{5}, (1/2, 1)$
2.  $2\sqrt{2}, (2, 4)$
3.  $\sqrt{7-2\sqrt{2}}, (0, (1-\sqrt{5})/2)$
5.  $B = (3, 9)$
6.  $A = (-1, 18)$
13.  $(2, 2)$  y  $(-4, 2)$
14.  $(0, 1)$  y  $(1, -1)$
15.  $5x+2y-3=0$
16.  $x^2+y^2=9$
17.  $(1, -3)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(-5, 7)$
18.  $(-2, -5), (0, -9)$
19.  $(9/2, 1)$
20.  $(y-1)^2 = (x+1)^3$
21.  $(x-1)^2 = (y+0)^3$
22.  $(y+0)^2 = (x-0)^3$



23.  $(x-3)^2(y-2) = 4(4-y)$
24.  $(y-3)^2(x-2) = 4(4-x)$
25.  $(x-3)^2(y-2) = 4(4-y)$



### APENDICE E

2.  $y = 5x - 2$     3.  $y = -3x$     4.  $y = 2x - 1$     5.  $y = -\frac{2}{5}x + 2$     6.  $y = -\frac{2}{5}x + \frac{12}{5}$   
 7.  $y = \frac{x}{5} - \frac{11}{5}$     8.  $y = -2x + \frac{41}{23}$     9.  $x + y = 2$ ,  $x - y = 14$     10. a.  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$   
 b.  $\frac{9\sqrt{5}}{50}$     11. 5    12.  $L_2$  es paralela a  $L_3$ ;  $L_3$  es perpendicular a  $L_1$ ;  $L_4$  es perpendicular a  $L_2$ .  
 13. a.  $x - 3y - 6 = 0$     b.  $x + 2y - 13 = 0$     c.  $y = 1$   
 14.  $y - 3x - 25 = 0$     15. 3    16. 2    17.  $2/\sqrt{10}$     18. 2    19.  $\frac{4}{5}\sqrt{10}$   
 20. 285    21.  $C = -7$  ó  $C = 59$     22.  $5x + 12y + 40 = 0$ ,  $5x + 12y - 64 = 0$   
 23.  $3x - 2y - 12 = 0$ ,  $3x - 8y + 24 = 0$   
 24. a.  $k = 3$ ,  $n$  cualquiera    b.  $k = -\frac{4}{3}$ ,  $n$  cualquiera    c.  $k = 3$ ,  $n \neq 6$     d.  $k = 3$ ,  $n = 6$   
 25. a.  $k = -4$  y  $n = 2$  ó  $k = 4$  y  $n = -2$     b.  $k = -4$  y  $n = 2$  ó  $k = 4$  y  $n = -2$   
 c.  $k = 0$  y  $n$  cualquiera    26.  $x - 2y - 18 = 0$ ,  $2x + y + 14 = 0$ ,  $2x + y - 16 = 0$

### APENDICE F

1.  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$     2.  $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$     3.  $x^2 + y^2 = 25$   
 4.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 50$     5.  $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$     6.  $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 16$   
 7.  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$     8.  $(x-1)^2 + y^2 = 1$     9.  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$   
 10. Centro (1, 0),  $r = 2$     11. Centro (0, -2),  $r = 2\sqrt{2}$     12. Centro (0, -1/2),  $r = 1/2$   
 13. Centro (1, -2),  $r = 3$     14. Centro (1/4, -1/4),  $r = \sqrt{10}/4$   
 15. Centro (3/2, 1/2),  $r = 9/4$   
 16. Parábola, vértice (0, 0) y eje el eje Y, se abre hacia arriba.  
 17. Parábola, vértice (0, 0) y eje el eje X, se abre hacia la derecha.  
 18. Parábola, vértice (0, 0) y eje el eje Y, se abre hacia abajo.  
 19. Parábola, vértice (0, 0) y eje el eje Y, se abre hacia arriba.  
 20. Elipse, centro (0, 0)  
 21. Hipérbola, centro (0, 0), vértices (0, -1) y (0, 1), asíntotas:  $y = x$ ,  $y = -x$   
 22. Hipérbola, centro (0, 0), vértices (-1, 0) y (1, 0), asíntotas:  $y = 3x$ ,  $y = -3x$



33. Parábola, vértice (0, 9) y eje el eje Y, se abre hacia arriba.  
 34. Parábola, vértice (1/2, 0) y eje, el eje X, se abre hacia la izquierda.  
 35. Hipérbola, centro (0, 0), vértices (-5, 0) y (5, 0), asíntotas  $y = \frac{4}{5}x$  y  $y = -\frac{4}{5}x$ .  
 36. Circunferencia, centro (0, 0) y  $r = 3/2$ .  
 37. Parábola, vértice (0, -1/2), eje paralelo al eje X, se abre hacia la izquierda.  
 38. Elipse, centro (0, 2).  
 39. Hipérbola, centro (-3, 5), vértices (-10/3, -5) y (-8/3, 5), asíntotas  $y = 3x + 4$  y  $y = -3x - 4$ .  
 30. El punto (1, 2).  
 31. El punto (1, 1).  
 32. Hipérbola, centro (-1, 1), vértices (-2, 1) y (0, 1), asíntotas  $y = x + 2$  y  $y = -x$ .

# **APENDICE G**

1. a.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  b.  $-\frac{1}{2}$  c.  $-\sqrt{3}$  d.  $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$  e. -2 2. a.  $\alpha = n\pi, n \in \mathbb{Z}$   
 b.  $\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$  c. ninguno d. ninguno  
 e.  $\alpha = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi$  o  $\frac{5}{3}\pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$  6. -1 7. a.  $-\sin \alpha$  b. 0  
 8. a.  $\frac{2\pi}{3}$  b.  $\frac{\pi}{2}$  9. a.  $\frac{1}{3}$  rad b.  $\frac{1}{10}$  rad. c.  $\frac{\pi}{3}$  rad. 10. a. 4.71 cm  
 b. 35.34 cm c. 7.85 cm. 11. a. 111.13 km. b. 3.333,76 km c. 5.000,64 km  
 d. 8.973,37 km. 12. 1.852 km. 13.  $\frac{2}{3}\pi$  rad. 14. 61.35 grados  
 15. 20,45 grados. 16.  $(-\sqrt{3}, -1)$  17.  $P = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$  18. 18  
 19. a.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  b.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  20.  $\frac{\sqrt{3}}{12}$  21.  $2r \sin \frac{\pi}{n}$  22.  $\frac{2500}{\pi} \approx 795,78$  giros por min.  
 23. 40 revoluciones por seg. 24.  $y = x + 4\sqrt{2} = 0$  25.  $\frac{\pi}{4}$   
 26.  $x - 5y + 3 = 0, 5x + y - 11 = 0$   
 27.  $3x - 4y + 15 = 0, 4x + 3y - 30 = 0, 3x - 4y - 10 = 0, 4x + 3y - 5 = 0$

# INDICE ALFABETICO

## A

Aceleración, 234  
 Agnesi, Maria Gaetana, A38  
 Álgebra de funciones, 24  
 Ángulo de inclinación, A64  
 Ángulo entre curvas, 211  
 Ángulo entre rectas, A65  
 Ángulos orientados, A62  
 Aproximación lineal, 267  
 Arco Gateway, 241  
 Ars Magna, 62  
 Asíntotas horizontales, 139  
 Asíntotas oblicuas, 153  
 Asíntotas verticales, 125

## B

Bernoulli, Jacob, Johann, Daniel, 278  
 Bicondicional, 2  
 Bruja de Agnesi, A35

## C

Cambio de base exponencial, 51  
 Cambio de base logarítmica, 50  
 Cardano, Girolamo, 62  
 Catálogo de funciones cont., 113  
 Catenaria, 241  
 Cauchy, Agustín, 65  
 Ceros racionales de un polinomio, A25  
 Circunferencia, A50  
 Cisoide de Diocles, 221  
 Concavidad, 304  
 Condicional, 2  
 Composición de funciones, 25  
 Continuidad, 108  
 Continuidad en intervalos, 111  
 Continuidad lateral, 110  
 Continuidad removible, 109  
 Crecimiento exponencial, 53  
 Criterio de concavidad, 305  
 Criterio de la segunda derivada, 309  
 Criterio de la recta horizontal, 32  
 Criterio de recta vertical, 7  
 Criterio de inversión, A36  
 Criterio de la primera derivada, 303

Criterio de monotonía, 301  
 Criterios de simetría, 34  
 Criterios de traslación, A35  
 Curvas ortogonales, 212

## D

Decaimiento exponencial, 53  
 Decaimiento radioactivo, 54  
 Derivación implícita, 207  
 Derivación logarítmica, 221  
 Derivada, 165  
 Derivada de un cociente, 179  
 Derivada de la func. exponencial, 177  
 Derivada de un producto, 178  
 Derivada de una suma, 177  
 Derivada por la derecha, 167  
 Derivada por la izquierda, 167  
 Derivadas de las func. hiperbólicas, 243  
 Derivadas de las func. hiperb. inver., 245  
 Derivadas de las func. trigonométr., 187  
 Derivadas de las func. trigo. invers., 225  
 Derivadas de orden superior, 228  
 Descartes, René, 1  
 Diferenciabilidad y continuidad, 170  
 Diferencia indeterminada, 323  
 Diferenciales, 268  
 Discontinuidad esencial, 109  
 Distancia, A32  
 Distancia de un punto a una recta, A44  
 Dominio, 4

## E

Ecuación lineal, A41  
 Ecuación punto-pendiente, A39  
 Ecuaciones polinómicas, A21  
 Elipse, A53  
 Elipse trasladada, A54  
 Error porcentual, 271  
 Error relativo, 271  
 Estimación de errores, 271  
 Estiramiento y compresión, 22  
 Euler, Leonardo, 64  
 Extremo absoluto, 281

# CO

función relativa, 281

## F

Función con carbono 14, 55  
 Función indeterminadas, 315  
 Función, 4  
 Función coseno, 12, A56  
 Funciones como modelos, 13  
 Función compuesta, 25  
 Función cosecante, 36  
 Función cotangente inversa, 36  
 Función constante, 10  
 Función creciente, 9, 201  
 Función decreciente, 9, 201  
 Función creciente, 9, 201  
 Función de densidad normal, 341  
 Función derivada, 167  
 Función diferenciable, 165  
 Función exponencial natural, 44  
 Función identidad, 5  
 Función impar, 8  
 Función inversa, 31, 33  
 Función inyectiva, 31  
 Función logaritmo natural, 49  
 Función monótona, 9, 301  
 Función par, 8  
 Función parte entera, 7  
 Función polinómica, 11  
 Función racional, 11  
 Función raíz enésima, 10  
 Función reales, 5  
 Función secante inversa, 35  
 Función seno, 12, A56  
 Función seno inversa, 35  
 Función sierra, 16  
 Función tangente, inversa, 35  
 Funciones algebraicas, 12  
 Funciones exponenciales, 42  
 Funciones algebraicas, 12  
 Funciones hiperbólicas, 240  
 Funciones logarítmicas, 46  
 Funciones reales, 5  
 Funciones trascendentes, 12

## G

Gráfico de la función inversa, 33

Gráficos de una función, 2

A560

Hiperbólicas, A55

Hiperbólicas parciales, A55

Identidades trigonométricas, 302

Inecuaciones, A6

Intervalos, A8

Intervalo de crecimiento, A9

Intervalo de decrecimiento, A9

Interés compuesto, 37

Interés compuesto continuo, 37

Interés simple, 57

## L

Lagrange, Joseph Louis, 200

Leibniz, G. W., 206

Lemniscata de Bernoulli, 200

Ley de los cuadrados, A44

Leyes de los exponentes, 41

Leyes de los logaritmos, 41

Leyes de los límites, 71

Límite (no riguroso), 86

Límite (riguroso), 82

Límite en el infinito, 124, 139

Límite infinito, 122, 125

Límite por la derecha, 86

Límite por la izquierda, 86

Límites trigonométricos, 101

Límite unilateral, 86, 89

L'Hôpital, Marquis de, 200

## M

Máximo de una función, 281

Máximo relativo, 281

Media aritmética, A13

Media geométrica, A13

Método de Newton-Raphson, 199

Método de Störmer, A7

Mínimo de una función, 281

Mínimo relativo, 281

## N

Newton, Isaac, 192

Newton de Leibniz, 192



Número crítico, 283  
 Número crítico de segundo orden, 307  
 Número  $\pi$ , 44  
 Número irracional, A2

## P

Parábola, A34  
 Parábola cúbica, A35  
 Parábola semicúbica, A35  
 Pendiente, A39  
 Producto indeterminado, 322  
 Presencia indeterminada, 323  
 Punto crítico, 283  
 Punto de inflexión, 305

## R

Rango, 4  
 Rapson, Joseph, 375  
 Razón de cambio, 251  
 Razón de cambio relacionadas, 251  
 Recta tangente, 163, 171  
 Rectas paralelas, A42  
 Rectas perpendiculares, A43  
 Refracción de la luz, 364  
 Reflexiones, 21  
 Regla de la constante, 175  
 Regla de L'Hôpital, 375  
 Regla de la cadena, 193  
 Rolle, Michael, 288

## S

Siem, J. Ch. F., A13

## T

Tanagila, 62  
 Teorema de la derivación completa, A34  
 Teorema de Fermat, 283  
 Teorema del cambio de variable, 30  
 Teorema del factor, A22  
 Teorema de la suma y resta, 37  
 Teorema de la constante, 282  
 Teorema de la diferencia constante, 283  
 Teorema de la función inversa, 218  
 Teorema de Rolle, 288  
 Teorema de sustitución, 114  
 Teorema del punto fijo, 119  
 Teorema del residuo, A22  
 Teorema del valor extremo, 113  
 Teorema del valor medio, 235  
 Teorema del val. medio de Cauchy, 240  
 Teorema fundamental del álgebra, A34

## V

Valor absoluto, A34  
 Velocidad, 210  
 Velocidad instantánea, 194  
 Vida media, 54

# TABLAS

## ALGEBRA

### OPERACIONES

$$1. a(b+c) = ab+ac$$

$$2. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$3. \frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$$

$$4. \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

### EXPONENTES Y RADICALES

$$5. a^0 = 1, a \neq 0$$

$$6. (ab)^x = a^x b^x$$

$$7. a^x a^y = a^{x+y}$$

$$8. \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$9. (a^x)^y = a^{xy}$$

$$10. a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$11. \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$12. a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$13. a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$14. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$15. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

### TEOREMA DEL BINOMIO.

$$16. (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$17. (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$18. (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$19. (a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + na^{n-1}b + b^n$$

$$20. (a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + (-1)^k \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots - na^{n-1}b + (-1)^n b^n$$

$$- na^{n-1}b + (-1)^n b^n, \text{ donde } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

### PROGRESION GEOMETRICA

$$21. a_1 = a, a_2 = ar, a_3 = ar^2, a_4 = ar^3, \dots, a_n = ar^{n-1}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

## FACTORIZACION

22.  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

23.  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

24.  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

25.  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

## DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

26.  $a = b \Rightarrow a + c = b + c$

27.  $a < b \text{ y } c > 0 \Rightarrow ac < bc$

28.  $a < b \text{ y } c < 0 \Rightarrow ac > bc$


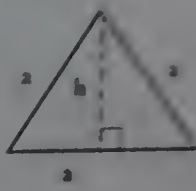
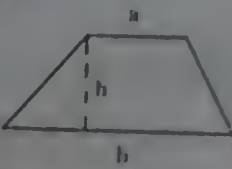
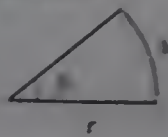



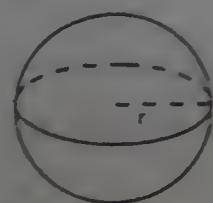
29.  $|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ o } x = -a$

30.  $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

31.  $|x| > a \Leftrightarrow -a < x \text{ o } x > a$

## GEOMETRIA

h = altura, A = Area, Al = Area Lateral, V = Volumen

<p>Triángulo</p> <p><math>h = a \sin \theta</math></p> <p><math>A = \frac{1}{2}bh</math></p> <p><math>A = \frac{1}{2}b \sin \theta</math></p> 	<p>Triángulo Equilátero</p> <p><math>h = \frac{\sqrt{3}}{2}a</math></p> <p><math>A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2</math></p> 
<p>Trapezio</p> <p><math>A = \frac{h}{2}(a + b)</math></p> 	<p>Sector Circular</p> <p><math>s = r\theta</math></p> <p><math>A = \frac{1}{2}r^2\theta</math></p> 
<p>Cono Circular Recto</p> <p><math>AL = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}</math></p> <p><math>V = \frac{1}{3}\pi r^2 h</math></p> 	<p>Tronco de Cono</p> <p><math>V = \frac{\pi}{3}(r^2 + rR + R^2)h</math></p> <p><math>AL = \pi s(r + R)</math></p> 
<p>Cilindro</p> <p><math>V = \pi r^2 h</math></p> <p><math>AL = 2\pi rh</math></p> 	<p>Esfera</p> <p><math>V = \frac{4}{3}\pi r^3</math></p> <p><math>A = 4\pi r^2</math></p> 



# TRIGONOMETRIA

## Identidades Fundamentales

$$1. \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$3. \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$5. \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$7. 1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$9. \cos(-x) = \cos x$$

$$2. \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$4. \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$6. 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$8. \sin(-x) = -\sin x$$

$$10. \tan(-x) = -\tan x$$

## Identidades de Cofunción y de Reducción

$$11. \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$13. \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$15. \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cosec} x$$

$$17. \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$19. \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$21. \sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$12. \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$14. \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$$

$$16. \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$$

$$18. \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$20. \cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$22. \tan(x + \pi) = \tan x$$

## Identidades de Suma y Diferencia

$$23. \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$24. \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$25. \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$26. \cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \pm 1}{\cot y \pm \cot x}$$

## Identidades del Angulo Dobles y triples

$$27. \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$28. \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$29. \operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$$

$$30. \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$31. \tan^2 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan x}$$

### Identidades de Reducción de Potencias

$$32. \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$33. \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$34. \tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

### Identidades del Angulo Mitad

$$35. \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$36. \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

### Transformación de productos en sumas

$$37. \operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2} [ \operatorname{sen} (x + y) + \operatorname{sen} (x - y) ]$$

$$38. \cos x \cos y = \frac{1}{2} [ \cos (x + y) + \cos (x - y) ]$$

$$39. \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} [ \cos (x - y) - \cos (x + y) ]$$

### Transformación de sumas en productos

$$40. \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad 41. \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

$$42. \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad 43. \cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

### Ley de los senos

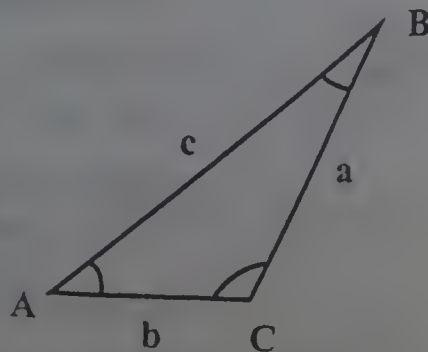
$$44. \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

### Ley de los cosenos

$$45. a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$46. b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$47. c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



# FORMULAS DE DERIVACION

$$1. D_x [f(x) g(x)] = f(x) D_x g(x) + g(x) D_x f(x)$$

$$2. D_x \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) D_x f(x) - f(x) D_x g(x)}{[g(x)]^2}$$

$$3. D_x (u^n) = n u^{n-1} D_x u \quad \text{ó bien} \quad D_x ((g(x))^n) = n(g(x))^{n-1} D_x u$$

$$4. D_x e^u = e^u D_x u$$

$$5. D_x a^u = a^u \ln a D_x u$$

$$6. D_x (\ln u) = \frac{1}{u} D_x u$$

$$7. D_x (\log_a u) = \frac{1}{u \ln a} D_x u$$

$$8. D_x (\sin u) = \cos u D_x u$$

$$9. D_x (\cos u) = -\sin u D_x u$$

$$10. D_x (\tan u) = \sec^2 u D_x u$$

$$11. D_x (\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u D_x u$$

$$12. D_x (\sec u) = \sec u \tan u D_x u$$

$$13. D_x (\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cot u D_x u$$

$$14. D_x \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

$$15. D_x \cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

$$16. D_x \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} D_x u$$

$$17. D_x \cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2} D_x u$$

$$18. D_x \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

$$19. D_x \operatorname{cosec}^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

$$20. D_x \sinh u = \cosh u D_x u$$

$$21. D_x \cosh u = \sinh u D_x u$$

$$22. D_x \tanh u = \operatorname{sech}^2 u D_x u$$

$$23. D_x \coth u = -\operatorname{cosech}^2 u D_x u$$

$$24. D_x \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u D_x u$$

$$25. D_x \operatorname{cosech} u = -\operatorname{cosech} u \coth u D_x u$$

$$26. D_x \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

$$27. D_x \operatorname{cosec}^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

$$28. D_x \sinh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} D_x u$$

$$29. D_x \cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

$$30. D_x \tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} D_x u$$

$$31. D_x \coth^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} D_x u$$

$$32. D_x \operatorname{sech}^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

$$33. D_x \operatorname{cosech}^{-1} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{1+u^2}} D_x u$$



## EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

$$1. \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$2. \log_a a = \frac{1}{\log a}$$

$$3. a^x = e^{x \ln a}$$

## IDENTIDADES HIPERBOLICAS

$$1. \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$2. \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$3. \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$4. \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$5. \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$6. \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$7. \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$8. 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$9. 1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$10. \sinh(-x) = -\sinh x$$

$$11. \cosh(-x) = \cosh x$$

$$12. \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$13. \sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$$

$$14. \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$15. \cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$16. \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

$$17. \cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$18. \sinh \frac{x}{2} = \pm \sqrt{(\cosh x - 1)/2}$$

$$19. \cosh \frac{x}{2} = \pm \sqrt{(\cosh x + 1)/2}$$

## ALFABETO GRIEGO

A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ε	epsilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta

I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	xi
Ο	ο	omicron
Π	π	pi

P	ρ	rho
Σ	σ	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	φ	phi
Χ	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

## ACERCA DEL AUTOR

Jorge Sáenz Camacho, estudió Matemáticas en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (Lima, Perú) y en la Universidad de Notre Dame (Indiana, USA), donde obtuvo su maestría y doctorado (Ph. D.). Estudió Educación Matemática en la Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle (La Cantuta, Perú) y en el Teachers College, Universidad de Columbia (Nueva York).

El Dr. Sáenz ha sido profesor en la Pontificia Universidad Católica del Perú, en la Universidad de los Andes, en la Universidad de Puerto Rico y en la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado". Es autor de varios textos de Matemáticas.

ISBN 980-6588-04-5



9 799806 588041